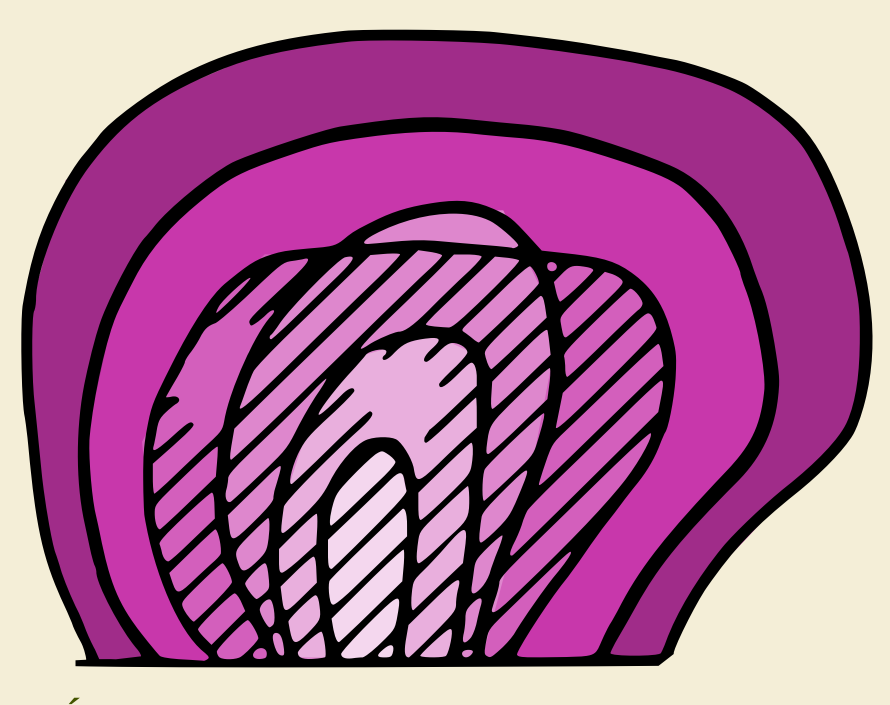
B. Gnédenko, Y. Béliaev, A. Soloviev

MÉTHODES MATHÉMATIQUES EN THÉORIE DE LA FIABILITÉ



Éditions Mir Moscou

Б. В. ГНЕДЕНКО, Ю. К. БЕЛЯЕВ, А. Д. СОЛОВЬЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

B. GNÉDENKO, Y. BÉLIAEV,
A. SOLOVIEV

MÉTHODES MATHÉMATIQUES EN THÉORIE DE LA FIABILITÉ

Principales caractéristiques de fiabilité
et leur analyse statistique

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

CDU = 519.240 (022) = 40

Traduit du russe
par Guy Der-Megreditchian

На французском языке

Table des matières

ANNEXES

AVANT-PROPOS

L'intérêt envers la théorie de la fiabilité que manifestent aujourd'hui les ingénieurs, les économistes, les mathématiciens, ainsi que les spécialistes chargés de l'organisation de la production, a conditionné l'apparition d'un grand nombre d'ouvrages, consacrés aux questions spéciales et générales de cette théorie (cf. la bibliographie du chapitre 1 [1] à [4]).

Les problèmes de la théorie de la fiabilité sont multiformes. Ils touchent les aspects technologiques, économiques, constructifs, physico-chimiques et d'organisation et témoignent de la nécessité d'élaborer un appareil mathématique développé adapté à la spécificité des questions soulevées. C'est pourquoi il est fort naturel que voient le jour divers ouvrages consacrés à la théorie de la fiabilité et l'éclairant chacun sous un certain angle de vue.

Nous n'avons considéré dans notre livre que les méthodes mathématiques de certaines branches de la théorie de la fiabilité. Un bref aperçu du contenu de ce livre permettra de s'en convaincre.

Le *premier* chapitre présente un caractère d'introduction. Nous y exposons les principales notions de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique ainsi que les énoncés des principaux théorèmes sur lesquels nous nous appuierons par la suite. Dans ce même chapitre nous avons donné également les principales propriétés de la transformation de Laplace que nous utiliserons aux chapitres 5 et 6.

Le *second* chapitre est consacré aux questions fondamentales, à l'exposé des principales notions de la théorie de la fiabilité et à l'étude des liaisons entre ses principales caractéristiques numériques. Nous nous écartons ici quelque peu de l'interprétation traditionnelle du terme de « fiabilité » et nous donnons, semble-t-il, une approche suffisamment large, permettant d'englober les diverses définitions qui ont été proposées dans la littérature scientifique.

Nous estimons que cette approche théorique ensembliste de la théorie de la fiabilité et de ses principales notions permet dans la plus grande mesure d'élucider les phénomènes qu'elle étudie et doit par conséquent faire l'objet d'un exposé clair et net.

Les chapitres *trois* et *quatre* ont un caractère statistique. On y expose les méthodes d'estimation des paramètres de fiabilité d'après les résultats des essais, ainsi que les voies permettant de vérifier divers types d'hypothèses sur la fiabilité. On formule également certaines propositions de la statistique mathématique, sur lesquelles nous nous appuyons. Une notable partie de ces chapitres est consacrée au cas de la distribution exponentielle, qui, pour le moment, joue un rôle dominant dans la théorie de la fiabilité.

Dans les chapitres *cinq* et *six* on étudie l'important procédé permettant d'élever la fiabilité des systèmes, la réservation. Au chapitre *cinq* on étudie divers problèmes de réservation sans renouvellement, au chapitre *six* la réservation avec renouvellement.

Le chapitre *sept* est consacré aux problèmes de contrôle de la qualité de la production. Dans les questions du contrôle courant nous nous sommes bornés à l'énoncé des problèmes. Notre attention a été concentrée sur les problèmes du contrôle d'acceptation. Nous n'avons donné que quelques schémas généraux, dont certains ne sont pas entièrement élaborés au point de vue scientifique. Ce chapitre se distingue quelque peu des autres. Son contenu, ainsi que les méthodes qui y sont exposées peuvent être utiles en premier lieu aux employés des services de contrôle, ainsi qu'aux ingénieurs et aux techniciens chargés des questions de contrôle de la qualité et de la fiabilité.

Le texte comporte de nombreux graphiques dont une grande partie n'est présentée qu'à titre d'illustration.

Un grand nombre de tables sont présentées à la fin de l'ouvrage. Dans le cas où ces tables sont très courantes, nous nous sommes contentés de deux ou trois chiffres significatifs. Si, au contraire, ces tables sont rares ou même publiées pour la première fois dans la littérature scientifique russe, nous les rapportons avec le nombre de chiffres qu'elles comportent dans les travaux originaux. Nous notons toujours les sources d'où nous avons extrait ces tables.

Le travail réalisé pour l'élaboration de ce livre se répartit ainsi entre les auteurs: les chapitres 3, 4, 7 ainsi que le § 2.1 ont été

écrits par Y. Béliaev; les chapitres 2, 5 et 6 par A. Soloviev; le chapitre 1 et le § 4.5 par B. Gnédenko, à qui a incombé également la coordination de tous les chapitres du livre. Les trois auteurs ont discuté ensemble le contenu, la composition, le style de l'exposé.

Au cours de notre travail nos discussions avec nos collègues nous ont été fort profitables. Nous tenons à remercier tous ceux qui nous ont aidé par leurs propositions, leurs conseils, leurs observations sur la spécificité du comportement des appareils au cours des essais. Nous remercions particulièrement notre maître A. Kolmogorov, qui a lu le chapitre 7 et nous a donné de nombreux conseils. Nous sommes reconnaissants à Y. Chor, qui a lu le manuscrit en entier; nous n'avons pas eu malheureusement, pour des raisons indépendantes de notre volonté, la possibilité de mettre à profit tous les conseils qu'il nous a prodigués en ce qui concerne la disposition des matières exposées. Les auteurs tiennent à noter le grand travail accompli par T. Toporichtchéva pour le calcul des tables. I. Ouchakov, A. Stoupatchenko et L. Kristallinski ont contribué à l'élargissement de nos connaissances sur les particularités des processus physiques, qui se manifestent au cours des essais des appareillages radio-électroniques.

Nous avions estimé en entreprenant notre ouvrage qu'il était possible de présenter dans un seul livre tous les principaux résultats ayant traits aux méthodes statistiques en théorie de la fiabilité. Au cours de notre travail nous nous sommes convaincus que cette tâche est irréalisable. Les auteurs se proposent par la suite de la poursuivre. Dans le nouvel ouvrage auquel nous avons déjà pensé, nous exposerons les questions du calcul de la fiabilité des systèmes complexes, de la réservation optimale, de la recherche optimale des pièces défectueuses, de la prophylaxie optimale, de la prévision des pannes, des méthodes des essais accélérés, de la synthèse des dispositifs sûrs effectuant des opérations logiques. Seront aussi reflétées dans ce nouveau livre les nouvelles méthodes statistiques de recherches telles que la planification des expériences, la théorie des processus aléatoires dirigés, etc.

Le présent ouvrage n'est pas destiné à une lecture rapide, mais exige du lecteur une attention soutenue, ainsi que la réalisation systématique des développements auxiliaires indispensables. Cela concerne principalement les chapitres 3 à 6. Les chapitres 2 et 7

peuvent être lus indépendamment des autres. Il semblerait utile lors de la lecture des chapitres 3 et 4 d'avoir à sa disposition un ouvrage sérieux de statistiques mathématiques (par exemple [7]-[10] d'après la bibliographie du chapitre 1). Par ailleurs ce livre peut être également utilisé comme formulaire, car nous nous sommes efforcés de réunir les principales formules dans des tables spéciales et de les mettre suffisamment en relief dans le texte.

INTRODUCTION

Le développement de la technique moderne a conféré une importance particulière aux questions liées à l'élévation de l'efficacité de divers genres de dispositifs. L'automation intégrale des processus de la production impose aux dispositifs de commande des tâches particulièrement importantes, qui doivent être réalisées sans défaillance durant toute la période de fonctionnement de la ligne. de l'atelier ou de l'entreprise automatisés. Un arrêt dans le fonctionnement du dispositif de commande automatique peut provoquer non seulement un abaissement de la qualité de la production, mais encore des avaries très graves, ressortant du cadre local de l'entreprise. Bien entendu, les exigences du bon fonctionnement ne doivent pas être imposées uniquement aux mécanismes et divers types de dispositifs commandant tel ou tel processus. Ces exigences doivent être imposées à n'importe quel dispositif technique. Pourrait-on concevoir un avion qui ne peut effectuer des raids sans défaillance ? A quoi bon posséder un tracteur, qui ne peut accomplir la tâche qu'on lui confie ou une automobile qui ne peut transporter le fret ou les passagers ? La médecine moderne fait un large emploi de divers moyens techniques tant pour des questions de diagnostic et d'investigation que pour la réalisation des fonctions responsables pendant et après les opérations chirurgicales. On doit leur imposer des exigences particulièrement sévères, car une défaillance dans le fonctionnement, disons, d'un cœur artificiel durant une opération chirurgicale à cœur ouvert peut entraîner une issue fatale. Chacun de nous rencontre dans la vie courante de multiples exemples faisant état du rôle primordial que joue la qualité de la production.

La discipline scientifique étudiant les méthodes générales et les modes d'action que l'on doit suivre lors de l'établissement de projet, la fabrication, la réception, le transport et l'exploitation

des articles, pour assurer le maximum d'efficacité lors de leur utilisation, et élaborant les méthodes générales de calcul de la qualité des dispositifs d'après la qualité connue des éléments qui les composent est appelée *théorie de la fiabilité* (en langue anglaise reliability theory). La théorie de la fiabilité établit les lois d'apparition des pannes dans les dispositifs et les méthodes de leur prévision ; elle se rapporte aussi à la recherche des méthodes permettant d'améliorer la qualité des articles lors de l'établissement de projet et en cours de fabrication, ainsi qu'aux procédés permettant de préserver la qualité en cours de stockage et d'exploitation ; elle élabore des méthodes de vérification de la qualité des articles et les méthodes de contrôle de la qualité lors de la réception de grands lots d'articles fabriqués. La théorie de la fiabilité introduit des indices quantitatifs de la qualité de la production.

Il est indéniable que la théorie de la fiabilité est une science complexe, directement liée en premier lieu à la compétence de l'ingénieur, du physicien, du chimiste et de l'économiste. Par ailleurs, un grand nombre de questions de la théorie de la fiabilité ont un caractère essentiellement mathématique et nécessitent pour leur résolution aussi bien les méthodes mathématiques déjà connues que l'élaboration de nouvelles méthodes. Plus encore, s'il est souhaitable que la théorie de la fiabilité soit capable de formuler des conclusions exactes, si nous désirons nous arracher du domaine des conclusions purement qualitatives et parfois entièrement subjectives, nous devons absolument faire appel au langage mathématique. Des affirmations du genre : « je suis convaincu que cette construction offre plus de sécurité que cette autre » ou « nous pensons que notre production est meilleure que celle de l'entreprise voisine », qui ne reposent pas sur d'autres confirmations que la confiance individuelle, ne peuvent servir de base à des conclusions sûres.

Les méthodes de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique s'avèrent indispensables pour l'étude et la résolution d'une notable partie des questions traitées par la théorie de la fiabilité. Cela est dû à la nature même de ces problèmes et non aux intérêts spécifiques de ceux qui s'occupent aujourd'hui de la théorie de la fiabilité. Quel que soit notre désir de maintenir constantes les conditions de production, l'homogénéité des matériaux de base et la stabilité de la technologie de fabrication, les fluctua-

tions inévitables de tous ces éléments entraînent une dispersion notable des propriétés des articles fabriqués. Les propriétés moléculaires des matériaux, qui jouent un rôle exclusif lors de la fabrication des appareils électroniques à vide et à semi-conducteurs, ne perdent pas leur importance pour les dispositifs mécaniques. Les phénomènes d'usure et de vieillissement des matériaux rendent inévitable l'étude de leur structure moléculaire. On introduit en théorie de la fiabilité, outre la structure moléculaire de la matière, les méthodes mathématiques propres à cette branche de la physique, les méthodes de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique. Au cours du processus d'exploitation les articles sont soumis à des conditions des plus diverses: les automobiles doivent passer aussi bien sur des autoroutes que sur des chemins de traverse en mauvais état. Cela fait qu'elles sont soumises à des influences non seulement variables, mais encore aléatoires. Tout au long de notre exposé nous montrerons maintes fois des exemples réels qui illustreront cette considération d'ordre général. Si après avoir fabriqué dans des conditions déterminées à partir d'un même lot de matière première un grand nombre d'articles d'un type défini, on recueille les données statistiques relatives à la durée de leur fonctionnement sans défaillance, on découvrira un tableau fort spécifique: la durée de fonctionnement sans défaillance présente une dispersion substantielle et il n'est pas possible de prévoir avec exactitude pour chaque article déterminé sa durée de service. Par contre, pour un lot d'articles de taille relativement élevée on peut formuler des prévisions suffisamment concrètes sur la proportion de ceux qui auront une durée de vie déterminée, sur les causes des pannes, etc. Nous nous trouvons donc dans une situation typique d'application de la statistique mathématique.

Attirons l'attention sur le fait que la théorie de la fiabilité est souvent conduite à résoudre des problèmes contradictoires. La complexité croissante des fonctions que doivent remplir les dispositifs de divers genres entraîne un accroissement du nombre d'éléments constitutifs. L'accroissement du nombre d'éléments a pour incidence la diminution de la fiabilité de leur fonctionnement global. Or, on exige de ces dispositifs la réalisation de fonctions de plus en plus responsables, donc une fiabilité plus élevée. La résolution de ces exigences contradictoires nécessite une étude des

plus poussées et des plus minutieuses du problème d'accroissement de la fiabilité des éléments et des dispositifs. On a à répondre à des questions: est-il possible et rationnel d'accroître la fiabilité des éléments constitutifs, comment choisir les régimes de fonctionnement, rechercher les schémas les plus rationnels, calculer les réservations et les régimes optimaux de prophylaxie, etc. ? A cet égard il convient de souligner cette vérité triviale, semblerait-il, que l'*accroissement de la fiabilité ne s'obtient pas gratuitement et nécessite aussi bien des dépenses matérielles déterminées que la poursuite de travaux de recherches scientifiques systématiques.*

Notons que l'un des problèmes offrant les meilleures perspectives en théorie de la fiabilité doit être l'élaboration des principes constructifs des appareillages complexes permettant la réalisation de dispositifs capables de fonctionner même quand certains de leurs éléments constitutifs sont défectueux. Les systèmes biologiques possèdent dans une grande mesure cette propriété des plus précieuses. L'étude des systèmes biologiques du point de vue des principes d'organisation et de fiabilité peut donner à l'homme un riche éventail de moyens et de procédés, dont la réalisation technique serait fort utile. Nous sommes convaincus que la nature ne s'est pas frayé une voie uniquement dans le sens d'une réservation coûteuse, mais a progressé avant tout dans la *voie du choix des schémas optimaux de solution*, *d'un choix minutieux des éléments* capables de conserver une stabilité très grande en cours de fonctionnement. Il est indéniable que l'étude des particularités des systèmes biologiques du point de vue de la théorie de la fiabilité permettra de découvrir de nouveaux principes qu'on ne saurait déceler par une approche traditionnellement technique de ces problèmes.

Aujourd'hui l'accroissement de la fiabilité préoccupe non seulement les ingénieurs et les savants, mais aussi les hommes d'Etat. L'élévation de la fiabilité est souvent qualifiée de problème numéro un. Ce n'est pas là bien entendu un engouement passager, mais une exigence impérieuse de notre temps. A cet égard il nous semble intéressant de citer quelques phrases du chapitre d'introduction du livre « Reliability : Management, Methods and Mathematics » de deux auteurs américains David Lloyd et Myron Lipow publié en 1962. « La non-fiabilité se fait sentir sur le coût, le gaspillage du temps, psychologiquement sous forme d'incommodités, et en certains cas

constitue également une menace pour la sécurité des hommes et des nations. Les pertes qu'entraîne la fiabilité insuffisante représentent habituellement non seulement le coût du système défectueux, mais encore la valeur de l'équipement qui le dessert et qui est détérioré ou détruit du fait de la panne... Un exemple classique de l'effet psychologique d'une fiabilité insuffisante est celui du satellite américain « Avant-garde » de triste mémoire. Les Etats-Unis, fort affectés de la réussite de la Russie ayant déjà placé sur orbite « Spoutnik 1 », s'efforcèrent d'entrer en compétition en utilisant pour cela une fusée qui pratiquement n'avait pas été soumise aux essais indispensables et qui devait fonctionner presque à la limite de ses possibilités. Les échecs réitérés, le découragement et la perte de prestige qui en résultèrent furent très sérieux. »

Conformément aux problèmes de la théorie de la fiabilité que nous avons décrits, plusieurs groupes de questions se posent pour assurer la fiabilité. On doit penser à la fiabilité au premier stade de réalisation de l'article, avant même qu'il soit construit et dès que l'idée de sa réalisation se pose: quels matériaux supporteront le mieux les contraintes qui se manifestent en cours d'exploitation de l'article; quels schémas sont les plus adéquats au point de vue de la stabilité envers les influences extérieures; quels régimes doit-on choisir pour le fonctionnement de l'article; comment assurer le fonctionnement normal de l'article lors des surcharges éventuelles, etc. ? Après que l'article a été construit, on doit le soumettre aux essais avant que ne soit prise la décision de le produire en série. Les essais à ce stade de la production doivent absolument comporter la vérification de la fiabilité de l'article. Il est très important ici de noter que les essais doivent être suffisamment représentatifs, pour permettre de juger non seulement de ces articles, mais aussi des articles que l'on fabriquera en série. Il convient également à ce stade d'élaborer un système de règles que l'on devra observer lors de la fabrication des articles à l'usine, à la réception, pendant le transport et l'exploitation afin de mieux préserver la fiabilité en cours de fonctionnement. Le troisième stade de préservation de la fiabilité commence après la livraison de l'article à l'entreprise. Après une vérification minutieuse du schéma on doit s'assurer de la qualité des matériaux de base, de l'équipement de production, de la précision de traitement, de la concordance entre le processus

technologique et le problème technique posé. Aucunes concessions temporaires du problème posé ne sont tolérables pour aucune des opérations.

Il existe de nombreuses voies pour réaliser la vérification de la qualité d'exécution, en particulier, pour la production en masse et en grande série, celle des méthodes de contrôle statistique courant. Après qu'un lot d'articles a été fabriqué on doit élaborer, pour vérifier la fiabilité des articles, des méthodes d'essais, ainsi que des plans de vérification de la qualité, devant contenir le nombre d'articles soumis aux essais, la durée et le mode du contrôle. On doit aussi élaborer pour la période d'exploitation les mesures adéquates pour préserver la fiabilité, devant prévoir les revisions prophylactiques périodiques, le remplacement des éléments, les procédures de recherche des pannes, etc. Le calcul de la fiabilité doit naturellement être effectué au stade de l'établissement de projet. La grande majorité des exigences que nous venons de formuler ne présente pas un caractère mathématique, mais relève purement de la science d'ingénieur.

Les processus physico-chimiques provoquant la panne des éléments et des articles sont extrêmement complexes. Leur nature reste aujourd'hui encore fort peu étudiée. En règle générale, le nombre de paramètres, dont on doit tenir compte lors de l'élaboration des modèles mathématiques du phénomène de vieillissement, de variation graduelle des propriétés des articles, etc., est très élevé. Cette circonstance justifie à elle seule la nécessité d'élaboration de nouvelles méthodes mathématiques de recherche. Nous sommes convaincus que dans les années à venir la théorie de la fiabilité sera la source de nombreux problèmes mathématiques, ainsi que de nouvelles théories mathématiques. Il est déjà clair aujourd'hui que les méthodes de la statistique mathématique, de la théorie des probabilités, de la démographie, de la théorie de l'expérience ont besoin d'être profondément développées, afin de pouvoir favoriser pleinement le développement de la théorie de la fiabilité.

Chapitre premier

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS ET DE LA STATISTIQUE MATHÉMATIQUE

§ 1.1. Notions d'événement aléatoire. Principales formules de la théorie des probabilités

La représentation d'événement aléatoire en tant qu'événement, dont nous ne pouvons affirmer avec certitude qu'il sera ou non réalisé, est intuitivement claire. Toutefois pour qu'elle devienne l'objet d'une étude mathématique et qu'elle acquière une sérieuse valeur d'application, cette représentation exige d'être précisée. En effet, la seule affirmation que le claquage du condensateur en essais est un événement aléatoire est absolument insuffisante pour la pratique. Nous avons toujours besoin de savoir avec quelle fréquence cet événement peut se produire lors des essais d'un grand nombre de condensateurs. De même, il ne suffit pas dans la pratique de savoir qu'une automobile peut parcourir sans révision intégrale deux cent mille kilomètres. Pour évaluer la qualité de l'automobile il est important de découvrir quelle sera la fréquence d'un tel événement. Comme en théorie de la fiabilité on doit utiliser la notion d'événement aléatoire dans toute sa généralité et que le système universellement adopté d'exposé est utile non seulement pour l'introduction des notions de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique, mais aussi pour obtenir une représentation claire des notions de la théorie de la fiabilité, nous préférons familiariser d'emblée le lecteur avec les idées générales de la définition axiomatique d'un événement aléatoire et de sa probabilité, proposées par A. Kolmogorov.

La notion d'événement aléatoire dans la conception, proposée par Kolmogorov et aujourd'hui universellement adoptée, n'est pas une notion primaire, mais est construite sur la base de la notion d'événement élémentaire.

On suppose que l'on dispose d'un certain ensemble $\mathfrak{U}$ d'éléments étroitement lié au problème étudié. La nature de cet ensemble, qui est importante pour la compréhension du sens physique du problème, ne joue aucun rôle pour la construction logique de la théorie des probabilités.

On considère ensuite le système $\mathfrak{F}$ de sous-ensembles de l'ensemble $\mathfrak{U}$, qui possède les propriétés suivantes.

1°. *Le système $\mathfrak{F}$ contient en qualité d'élément l'ensemble $\mathfrak{U}$ tout entier.*

2°. *Si* $\mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{B}$ *sont des sous-ensembles de l'ensemble* $\mathfrak{U}$ *et sont des éléments de* $\mathfrak{F}$, *alors* $\mathfrak{F}$ *contient également les ensembles* $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ et $\overline{\mathfrak{B}}$ *.

Comme il est admis dans la théorie des ensembles, nous désignons par $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ la *somme* de $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{B}$, c'est-à-dire l'ensemble dont chaque élément appartient à l'un au moins des ensembles $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$; nous désignons par $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ le *produit* de $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, c'est-à-dire l'ensemble de tous et seulement de tous les éléments de $\mathfrak{U}$, qui appartiennent simultanément à $\mathfrak{A}$ et à $\mathfrak{B}$; $\overline{\mathfrak{A}}$ désigne l'ensemble de tous les éléments de $\mathfrak{U}$, qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{A}$, autrement dit $\overline{\mathfrak{A}}$ est le complément de $\mathfrak{A}$ dans l'ensemble $\mathfrak{U}$.

Comme $\mathfrak{U}$ est un élément de $\mathfrak{F}$, il découle de la condition 2° que $\mathfrak{F}$ contient obligatoirement l'ensemble $\overline{\mathfrak{U}}$, c'est-à-dire l'ensemble n'ayant aucun élément, l'*ensemble vide*.

On comprend aisément que la condition 2° implique l'appartenance à $\mathfrak{F}$ des sommes et des produits de tout nombre fini d'ensembles appartenant à $\mathfrak{F}$.

Chaque élément de l'ensemble $\mathfrak{F}$ est appelé *événement aléatoire*.

Donnons un exemple simple pour illustrer notre exposé. Désignons par τ la durée de vie d'un certain article dans des conditions déterminées d'exploitation ou d'essais. Adoptons en qualité d'ensemble $\mathfrak{U}$ l'ensemble de tous les nombres non négatifs, c'est-à-dire toutes les durées de vie possibles. L'événement élémentaire $\tau = t$ signifie que l'article a fonctionné exactement pendant un laps de temps égal à t, puis est tombé en panne. En particulier, $t = 0$ signifie que l'article a été mis hors d'usage immédiatement dès sa mise en fonctionnement.

Supposons maintenant que tout ensemble de la forme $\tau \geqslant t$ entre dans le système $\mathfrak{F}$. L'événement aléatoire $\tau \geqslant t$ signifie évidemment que l'article a fonctionné de façon satisfaisante au moins pendant un laps de temps non inférieur à t. Pour $t = 0$, nous obtenons tout l'ensemble $\mathfrak{U}$. Ainsi, la première condition que nous avons formulée envers le système $\mathfrak{F}$ est remplie. Toutefois le système $\mathfrak{F}$ est bien plus riche en éléments que nous venons de l'indiquer. En effet, la deuxième condition implique qu'avec les ensembles $\tau \geqslant a$ et $\tau \geqslant b$ $(a < b)$ le système $\mathfrak{F}$ contient également les ensembles $\tau < a$, $\tau < b$ et $a \leqslant \tau < b$. Nous ne pousserons pas plus loin ici l'étude de la structure du système.

Il peut arriver que nous devons observer plusieurs paramètres, par exemple, le diamètre d'un arbre, sa courbure et sa résistance à la flexion. Supposons que les valeurs possibles du diamètre soient comprises dans les limites $a \leqslant d \leqslant b$, celles de la courbure ρ dans les limites $\alpha \leqslant \rho \leqslant \beta$ et celles de la résistance à la flexion R dans les limites $r_1 \leqslant R \leqslant r_2$; dans ce cas l'ensemble des états élémentaires

* On utilise souvent les notations $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$. $\overline{\mathfrak{A}}$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{U}$, qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{A}$.

est caractérisé par les points de l'espace à trois dimensions (d, ρ, R), situés dans le parallélépipède déterminé précédemment par les inégalités rapportées.

Dans de nombreux problèmes le système $\mathfrak{F}$, répondant uniquement aux deux conditions 1° et 2°, s'avère trop pauvre et doit être complété par des événements aléatoires d'une nature plus fine. Un tel élargissement du système est en particulier indispensable pour pouvoir réaliser divers passages à la limite. Nous imposerons complémentairement à l'ensemble $\mathfrak{F}$ la condition suivante.

3°. *Si les sous-ensembles* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots$ *de l'ensemble* $\mathfrak{U}$ *sont des éléments de l'ensemble* $\mathfrak{F}$, *alors leur somme* $\bigcup_i \mathfrak{A}_i$ *et leur produit* $\bigcap_i \mathfrak{A}_i$ *sont aussi des éléments de* $\mathfrak{F}$.

Un ensemble $\mathfrak{F}$ vérifiant les conditions 1° à 3° est appelé *champ d'événements* ou *σ-algèbre*. Ce terme est largement utilisé dans la littérature consacrée à la théorie des probabilités.

En théorie des probabilités l'usage a établi une certaine terminologie spécifique, qu'il nous semble rationnel d'exposer ici même. Si dans la composition de deux événements aléatoires A et B n'entrent pas les mêmes éléments, ces événements sont dits *incompatibles*. Les événements $\mathfrak{U}$ et $\overline{\mathfrak{U}}$ sont appelés respectivement événement *certain* et événement *impossible*. Les événements A et $\bar{A}$ sont appelés événements *contraires*.

Pour l'exemple que nous avons rapporté il est certain que la durée de vie de l'article sera comprise dans les limites entre 0 et ∞; les événements $a \leqslant \tau \leqslant b$ et $c \leqslant \tau \leqslant d$ sont incompatibles si $b < c$; les événements $\tau \leqslant a$ et $\tau > a$ sont contraires pour tout $a > 0$.

La notion de probabilité d'un événement aléatoire est introduite axiomatiquement à l'aide des axiomes suivants.

1. *A chaque événement aléatoire A du champ $\mathfrak{F}$ on fait correspondre un nombre non négatif* $\mathbf{P}\{A\}$, *appelé probabilité.*

2. $\mathbf{P}\{\mathfrak{U}\} = 1$.

3. *Si deux événements A et B sont incompatibles, alors*

$$\mathbf{P}\{A \cup B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\}.$$

Ce dernier axiome est appelé *axiome d'addition des probabilités.*

Les axiomes rapportés permettent d'établir diverses conséquences importantes relatives aux probabilités des événements aléatoires.

La probabilité d'un événement impossible est nulle: $\mathbf{P}\{\overline{\mathfrak{U}}\} = 0$; pour n'importe quel événement aléatoire A on a $0 \leqslant \mathbf{P}\{A\} \leqslant 1$; les probabilités des événements contraires A et $\bar{A}$ sont liées par l'égalité

$$\mathbf{P}\{\bar{A}\} = 1 - \mathbf{P}\{A\}. \tag{1.1.1}$$

On dit que l'événement aléatoire A *implique* l'événement B, si l'ensemble B contient tous les éléments entrant dans la composition de l'ensemble A. Dans notre exemple l'événement $A = \{\tau \leqslant a\}$ implique l'événement $B = \{\tau \leqslant b\}$, si $a < b$.

Si l'événement A implique l'événement B, alors $\mathbf{P}\{A\} \leqslant \mathbf{P}\{B\}$. Pour deux événements arbitraires A et B on a le *théorème d'addition*

$$\mathbf{P}\{A \cup B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{A \cap B\}. \qquad (1.1.2)$$

Il en découle l'inégalité évidente

$$\mathbf{P}\{A \cup B\} \leqslant \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\},$$

ainsi que sa généralisation suivante: *pour tout nombre fini d'événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ on a l'inégalité*

$$\mathbf{P}\{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\} \leqslant \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \ldots + \mathbf{P}\{A_n\}. \qquad (1.1.3)$$

La construction de la théorie des probabilités dans toute sa généralité exige un axiome complémentaire.

Axiome élargi d'addition. *Si l'événement A consiste dans la réalisation de l'un au moins des événements deux à deux incompatibles $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, alors*

$$\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \ldots + \mathbf{P}\{A_n\} + \ldots$$

Dans les problèmes réels on a continuellement affaire à un état de choses quand on doit déterminer la probabilité d'un événement A sous la condition complémentaire qu'un autre événement B est déjà réalisé. En général, cette information complémentaire modifie la probabilité des événements. Si, par exemple, nous savons qu'un certain article a travaillé durant un laps de temps T, la probabilité pour qu'il fonctionne encore pendant un laps de temps t est en règle générale supérieure à la probabilité que, mis en service, il ait une durée de vie égale à $T + t$.

Si l'on doit trouver la probabilité d'un certain événement A, sachant qu'un événement B ayant une probabilité positive a eu lieu, on appelle cette probabilité la *probabilité conditionnelle* et on la note par le symbole $\mathbf{P}\{A \mid B\}$ ou $\mathbf{P}_B\{A\}$. Rigoureusement parlant, toute probabilité (*a priori* ou conditionnelle) est conditionnelle, car on ne peut parler d'événement aléatoire et de sa probabilité que dans le cas où ne peuvent se produire que les événements appartenant au système $\mathfrak{F}$. En outre, les probabilités des événements dépendent notablement des conditions extérieures dans lesquelles se trouve le système. Considérons par exemple la durée de vie τ d'un certain article pour deux systèmes dffférents de conditions. Posons que le *premier système de conditions* consiste en ce que l'article fonctionne à une température t_0 constante en l'absence de vibrations. Si l'on est en présence du *deuxième système de conditions*, soit que la température s'élève jusqu'à t_1 ou que des vibrations apparaissent,

la probabilité de l'événement $\tau < a$ sera également modifiée. Ainsi, quand on parle de la probabilité d'un événement aléatoire, on suppose toujours que l'on est en présence d'un certain système de conditions auquel on associe cet événement aléatoire.

En théorie de la fiabilité nous ne pouvons pas non plus parler de la fiabilité de l'article indépendamment des conditions dans lesquelles il devra fonctionner. La fiabilité d'une automobile dépend notablement du fait que son exploitation se fera dans les conditions du Grand Nord, de Moscou ou d'un désert de sable. Il peut alors arriver que l'ensemble initial $\mathfrak{U}$ d'événements élémentaires ne soit pas modifié, mais que les probabilités des événements aléatoires, qui nous intéressent, le soient.

La probabilité conditionnelle de l'événement A, sachant que B est réalisé, est définie par l'égalité

$$\mathbf{P}\{A \mid B\} = \frac{\mathbf{P}\{A \cap B\}}{\mathbf{P}\{B\}}. \tag{1.1.4}$$

Il en découle en particulier que $\mathbf{P}\{B \mid B\} = 1$; cette égalité était naturellement attendue, puisque nous savons avec certitude que l'événement B a eu lieu.

Nous obtenons de la définition de la probabilité conditionnelle l'égalité importante

$$\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{B\}\,\mathbf{P}\{A \mid B\},$$

connue sous le nom de *théorème du produit des probabilités*. Comme

$$\mathbf{P}\{A \cap B\} = \mathbf{P}\{A\}\,\mathbf{P}\{B \mid A\}, \tag{1.1.5}$$

nous concluons des deux dernières égalités que

$$\mathbf{P}\{A\}\,\mathbf{P}\{B \mid A\} = \mathbf{P}\{B\}\,\mathbf{P}\{A \mid B\}. \tag{1.1.6}$$

On dit que l'*événement A ne dépend pas de B*, si $\mathbf{P}\{A \mid B\} = \mathbf{P}\{A\}$. Comme le montre l'égalité précédente, l'indépendance est une propriété réciproque, autrement dit, *si A ne dépend pas de B, alors B ne dépend pas de A.*

Supposons maintenant que l'événement B peut être réalisé avec l'un des n événements incompatibles $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dans ces conditions on a la *formule des probabilités totales*:

$$\mathbf{P}\{B\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{A_i\}\,\mathbf{P}\{B \mid A_i\}. \tag{1.1.7}$$

Illustrons cette formule par un exemple simple. Supposons que certaines pièces (par exemple des condensateurs) sont fournies par trois usines et que la probabilité pour qu'un article donné ait été fabriqué à la première usine est égale à $\frac{1}{5}$, à la seconde usine à $\frac{3}{10}$ et à la troisième $\frac{1}{2}$. La probabilité pour que dans des condi-

tions déterminées de fonctionnement le condensateur travaille normalement pendant un laps de temps T est respectivement égale à 0,9; 0,92 et 0,808 pour les première, seconde et troisième usines. Quelle est la probabilité pour qu'un condensateur pris au hasard dans le stock fonctionne de façon satisfaisante durant un laps de temps T? Il peut s'avérer que ce condensateur provient de la première (événement A_1), de la seconde (événement A_2) ou de la troisième (événement A_3) usine. Conformément à la formule citée, la probabilité de l'événement qui nous intéresse (l'événement B) est

$$\mathbf{P}\{B\} = 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}92 + 0{,}5 \cdot 0{,}808 = 0{,}86.$$

Nous nous arrêterons maintenant sur une autre formule appelée *théorème de Bayes*. Supposons comme auparavant que l'événement B peut être réalisé avec l'un des événements incompatibles A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). A la suite des essais il s'est avéré que l'événement B est réalisé. Quelle est la probabilité pour qu'il soit réalisé avec l'événement A_i? Nous devons trouver la probabilité $\mathbf{P}\{A_i \mid B\}$. Conformément à l'égalité (1.1.6) nous trouvons que

$$\mathbf{P}\{A_i \mid B\} = \frac{\mathbf{P}\{A_i\}\,\mathbf{P}\{B \mid A_i\}}{\mathbf{P}\{B\}}. \tag{1.1.8}$$

La probabilité $\mathbf{P}\{B\}$ peut être calculée d'après la formule (1.1.7).

Supposons que dans l'exemple que nous venons de citer le condensateur n'a pas atteint la durée de vie établie et est tombé en panne. Quelle est la probabilité pour qu'il ait été fabriqué par la première, la seconde ou la troisième usine? Les calculs d'après la formule (1.1.8) nous conduisent aux résultats suivants:

$$\mathbf{P}\{A_1 \mid \overline{B}\} = 0{,}143; \quad \mathbf{P}\{A_2 \mid \overline{B}\} = 0{,}171; \quad \mathbf{P}\{A_3 \mid \overline{B}\} = 0{,}686.$$

Nous voyons qu'après avoir pris connaissance des résultats des essais, l'estimation *a priori* (avant l'expérience) des probabilités inconnues est notablement modifiée.

Dans ce qui suit nous aurons besoin d'une généralisation de la notion d'indépendance au cas de *plusieurs* événements. Nous dirons que les événements $A_1, A_2, \ldots, A_s$ sont *mutuellement indépendants* si pour tout groupe $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ ($k \leqslant s$) on a l'égalité

$$\mathbf{P}\{\prod_r A_{i_r}\} = \prod_{r=1}^{k} \mathbf{P}\{A_{i_r}\}.$$

Pour que les événements soient mutuellement indépendants il ne suffit pas qu'ils soient indépendants deux à deux.

Considérons maintenant le problème de l'application des règles générales.

Trouver la probabilité pour qu'un certain article fonctionne durant un laps de temps non inférieur à t, si la probabilité de la panne de l'article au cours de l'intervalle de temps $(t, t + h)$, quand il a déjà fonctionné durant un temps t, est égale à $a(t)\,h + o(h)$.

Désignons par $p(t)$ la probabilité du fonctionnement de l'article durant un laps de temps non inférieur à t ; nous avons alors en vertu de la condition adoptée

$$p(t+h) = p(t)(1 - a(t)h - o(h)).$$

Nous en tirons que

$$p'(t) = -a(t)p(t),$$

ce qui signifie que

$$p(t) = Ce^{-\int_0^t a(z)\,dz}.$$

Comme pour $t = 0$ l'article fonctionnait, on a $p(0) = 1$, et par conséquent, $C = 1$. Ainsi, nous trouvons

$$p(t) = e^{-\int_0^t a(z)\,dz}.$$

Si $a(t) = a$, c'est-à-dire si la probabilité pour que l'article fonctionne encore ne dépend pas du fait combien il a déjà fonctionné, alors

$$p(t) = e^{-at}.$$

On utilise souvent en démographie pour composer les tables de mortalité la *formule de Machegham* suivant laquelle

$$a(t) = \alpha + \gamma\beta e^{\gamma t}.$$

L'hypothèse de Machegham signifie que la mortalité est due à l'influence de deux facteurs : l'un qui ne dépend pas de l'âge et l'autre qui augmente (si $\gamma > 0$) ou diminue (si $\gamma < 0$) en progression géométrique avec l'âge. Cette hypothèse complémentaire permet de trouver que

$$p(t) = e^{-\alpha t - \beta(e^{\gamma t} - 1)}. \qquad (1.1.9)$$

Une grande importance est dévolue en théorie de la fiabilité au *schéma de Bernoulli*. Supposons que l'on effectue une série de n épreuves indépendantes durant chacune desquelles l'événement A peut être réalisé avec une même probabilité p. On demande quelle est la probabilité pour que l'événement A se produise au cours de m essais quelconques et n'ait pas lieu au cours de $n - m$ autres essais. Si l'on désigne cette probabilité par $P_n(m)$ et que l'on introduit la notation $q = 1 - p$, on a la *formule de Bernoulli*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m};$$

ici C_n^m désigne le nombre de combinaisons de n éléments m à m, égal comme on le sait à $\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$.

Si, par exemple, on a soumis à l'essai 20 lampes et si la probabilité pour qu'une lampe tombe en panne durant la période d'essai est égale à 0,1, alors les probabilités $P_{20}(0)$, $P_{20}(1)$, $P_{20}(2)$ seront respectivement

$$0{,}9^{20};\quad 2\cdot 0{,}9^{19};\quad 1{,}9\cdot 0{,}9^{18};$$

la probabilité pour qu'au cours des essais quatre lampes au plus tombent en panne est égale à

$$\sum_{m=0}^{4} C_{20}^{m} 0{,}1^{m} 0{,}9^{20-m}.$$

Dans la théorie de la fiabilité on considère souvent la *distribution binomiale négative*, qui apparaît dans le modèle suivant. Imaginons que l'on effectue des observations indépendantes. Au cours de chaque observation l'événement A (par exemple le claquage du condensateur) peut se produire avec une probabilité p. Les essais sont poursuivis jusqu'à ce que l'événement A se produise k fois. On demande quelle est la probabilité qu'il faudra pour cela effectuer exactement n observations?

Il découle clairement de la position même du problème qu'au cours du dernier essai l'événement A doit être réalisé et qu'au cours des $n-1$ essais précédents doivent avoir lieu les $k-1$ réalisations de l'événement A. La probabilité pour qu'au cours du dernier essai ait lieu l'événement A est p, et la probabilité pour qu'au cours des $n-1$ essais précédents aient lieu $k-1$ réalisations de l'événement A est, conformément à la formule de Bernoulli, égale à $C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k}$. La probabilité cherchée est ainsi égale à

$$\mathbf{P}\{\mu=n\} = C_{n-1}^{k-1} p^{k} q^{n-k}.$$

Ici μ peut prendre les valeurs k, $k+1$, $k+2$, ...

Désignons par γ la grandeur $\mu-k$, c'est-à-dire le nombre d'essais que l'on doit effectuer en plus des k précédents pour terminer la procédure exigée. Nous avons alors

$$\mathbf{P}\{\nu=r\} = \mathbf{P}\{\mu=r+k\} = C_{r+k-1}^{k-1} p^{k} q^{r}. \qquad (1.1.10)$$

La valeur ν peut prendre les valeurs 0, 1, 2, ...

On peut aisément se convaincre que le terme général du développement du produit

$$p^{k}(1-q)^{-k}$$

suivant les puissances de q est précisément égal à la probabilité $\mathbf{P}\{\nu=r\}$. C'est la raison pour laquelle on dit que la grandeur ν suit la *distribution binomiale négative*, alors que la distribution binomiale usuelle s'obtient de manière analogue, mais en remplaçant $-k$ par k.

Outre le schéma de Bernoulli, un rôle important est joué en théorie de la fiabilité par un *schéma d'urne* que l'on appelle souvent *schéma de la boule non remise* (tirage exhaustif). Supposons que nous disposons de N objets dont M possèdent une propriété donnée A, et les $N - M$ autres ne la possèdent pas. On choisit au hasard de l'ensemble des N objets un nombre n d'entre eux. On demande quelle est la probabilité pour que parmi les n objets prélevés m d'entre eux possèdent la propriété A et les $n - m$ autres ne la possèdent pas?

Il est évident que m ne peut prendre que les valeurs

$$l_0 = \max(0, n - N + M), \ l_0 + 1, \ l_0 + 2, \ \ldots, \ \min(M, n).$$

Si n est plus petit que M et $N - M$, alors m peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et n.

A l'appui de simples raisonnements on obtient l'égalité

$$p_m = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Il est particulièrement intéressant d'étudier le cas, où M est très inférieur à N et n est petit par rapport à N. Dans ce cas important pour la théorie de la fiabilité m peut évidemment prendre les valeurs 0, 1, 2, . . ., min (M, n).

L'un des problèmes où l'on utilise la formule ici rapportée consiste en ce qui suit: on sait que dans un lot de N pièces il y a M pièces défectueuses. On prélève au hasard un échantillon de n éléments dans ce lot. Quelle est la probabilité pour que dans cet échantillon il y ait m pièces défectueuses?

§ 1.2. Variables aléatoires et leur fonction de répartition

Il est bien connu que les principales caractéristiques de fiabilité des articles (durée de fonctionnement satisfaisant, temps de renouvellement, grandeur de l'usure au cours d'un laps de temps déterminé, etc.) fabriqués, semblerait-il, dans des conditions identiques à partir des mêmes matériaux, possèdent une dispersion notable. On a rapporté à titre d'exemple dans la table 1.2.1 les données des essais à la fatigue lors de la flexion des éprouvettes d'acier de nuance B 95. La durée de fonctionnement de l'éprouvette est mesurée par le nombre N de cycles avant la rupture. On avait soumis en tout à l'essai 463 éprouvettes. Les résultats des essais sont répartis en différents groupes suivant la valeur du logarithme du nombre N.

Ainsi, si l'on prend une pièce quelconque dans un grand lot, on ne saurait prévoir sa durée de vie. Toutefois on peut indiquer, à l'appui des essais rationnellement posés, le pourcentage des cas où cette pièce aura une durée de vie donnée. En d'autres termes,

Table 1.2.1

log N	Effectif du groupe	log N	Effectif du groupe	log N	Effectif du groupe
4,60-4,65	2	5,05-5,10	43	5,50-5,55	12
4,65-4,70	3	5,10-5,15	41	5,55-5,60	8
4,70-4,75	3	5,15-5,20	45	5,60-5,65	10
4,75-4,80	12	5,20-5,25	42	5,65-5,70	5
4,80-4,85	12	5,25-5,30	38	5,70-5,75	1
4,85-4,90	20	5,30-5,35	22	5,75-5,80	1
4,90-4,95	18	5,35-5,40	24	5,80-5,85	1
4,95-5,00	27	5,40-5,45	14	5,85-5,90	0
5,00-5,05	41	5,45-5,50	18		

pour tout a et b donnés ($a < b$), on peut évaluer la probabilité pour que la pièce fonctionne durant un laps de temps non inférieur à a et non supérieur à b. Il est ainsi indispensable pour la théorie et la pratique de la fiabilité d'apprendre à opérer avec les variables aléatoires, c'est-à-dire avec des grandeurs, qui en fonction du hasard peuvent prendre telles ou telles valeurs.

Pour caractériser une variable aléatoire il faut indiquer, premièrement, quelles valeurs peut-elle prendre, c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs possibles, et deuxièmement, les probabilités de ces valeurs. Si la variable aléatoire ne peut prendre qu'un ensemble fini ou dénombrable de valeurs, il est aisé de caractériser cette variable : il suffit d'énumérer toutes ses valeurs possibles et d'indiquer les probabilités associées à ces valeurs. Considérons pour illustrer notre exposé les deux exemples dont nous avons pris connaissance au précédent paragraphe.

Exemple 1. Le nombre de réalisations de l'événement A au cours de n essais indépendants, dans chacun desquels A peut se produire avec une même probabilité p, est une variable aléatoire, ne pouvant prendre que les valeurs 0, 1, 2, . . ., n. Comme nous le savons, la probabilité pour que l'événement A ait lieu exactement au cours de m essais est égale à $P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$. La variable aléatoire considérée est dite *distribuée* suivant une *loi binomiale* et l'ensemble des probabilités correspondantes est appelé *distribution binomiale.*

Exemple 2. *Distribution hypergéométrique.* La variable aléatoire (considérée au § 1.1, p. 25), prenant les valeurs entières $m =$

$= 0, 1, 2, \ldots, \min(M, n)$ avec les probabilités

$$p_m = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

est dite *distribuée suivant la loi hypergéométrique*.

On ne peut toutefois utiliser la méthode considérée de représentation de la variable aléatoire pour toutes les variables aléatoires. En effet, si l'ensemble des valeurs possibles n'est pas dénombrable, on ne peut pas associer à chaque valeur possible une probabilité déterminée. Un problème se pose, celui de la recherche d'un procédé, qui serait applicable pour tous les cas. L'un des artifices de ce genre les plus répandus réside dans l'utilisation de la notion de fonction de répartition. On appelle *fonction de répartition de la variable aléatoire* ξ la probabilité pour que ξ prenne une valeur inférieure à x:

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}.$$

Ici l'argument x peut prendre toute valeur réelle.

La fonction de répartition possède les propriétés suivantes: *avec la croissance de x la fonction $F_\xi(\tau x)$ ne décroît pas*, autrement dit si $x_2 > x_1$, alors

$$F_\xi(x_2) \geqslant F_\xi(x_1).$$

Elle admet les limites suivantes

$$F_\xi(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1, \quad F_\xi(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0.$$

La probabilité pour que ξ prenne une valeur inférieure à b et non inférieure à a, autrement dit, la probabilité de l'inégalité

$$a \leqslant \xi < b,$$

est calculée d'après la formule

$$\mathbf{P}\{a \leqslant \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Pour tout c on a l'égalité

$$\mathbf{P}\{\xi = c\} = F_\xi(c+0) - F_\xi(c).$$

Ainsi, si la fonction $F_\xi(x)$ est continue au point c, la probabilité pour que ξ prenne exactement la valeur c est égale à zéro. Si au point c la fonction $F_\xi(x)$ admet une discontinuité, la probabilité pour que ξ prenne la valeur c est donnée par la grandeur du saut de cette fonction en ce point.

Toute fonction $F(x)$ non décroissante, pour laquelle

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$

et pour tout x

$$\lim_{z\to x-0} F(z) = F(x),$$

peut être considérée comme une fonction de répartition. Par exemple, la fonction indiquée sur la figure 1.2.1 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire, qui admet la valeur 0 avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et peut prendre n'importe quelle valeur dans l'intervalle (0, 1),

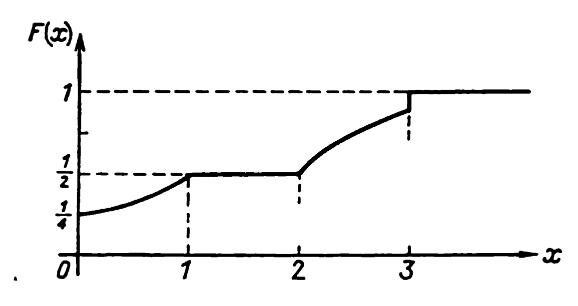


Fig. 1.2.1

la probabilité de tomber dans cet intervalle étant égale à $\frac{1}{4}$. Comme dans l'intervalle (1, 2) la fonction de répartition est constante, la variable aléatoire qu'elle définit ne possède pas de valeurs possibles dans cet intervalle. La variable aléatoire peut, enfin, avec la probabilité $\frac{1}{3}$ tomber dans l'intervalle (2, 3) et avec la probabilité $\frac{1}{6}$ prendre la valeur 3. De $-\infty$ à 0 la fonction $F(x)$ est égale à zero et de 3 à $+\infty$ elle est égale à 1. Dans ces deux intervalles la variable aléatoire qu'elle définit ne prend pas de valeurs.

Si l'on peut trouver une fonction $f_\xi(x)$, telle que pour toutes les valeurs de x on ait l'égalité

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(z)\, dz,$$

on dit que la grandeur ξ est *continue*; on appelle $f_\xi(x)$ la *densité de probabilité* de ξ. Pour la densité de probabilité on a l'égalité:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\, dx = 1\,;$$

et pour tous a et b

$$\mathbf{P}\{a \leqslant \xi < b\} = \int_{a}^{b} f_\xi(x)\, dx\,;$$

pour les valeurs de x pour lesquelles la dérivée $F'_\xi(x)$ existe, on a

$$f_\xi(x) = F'_\xi(x).$$

Nous passerons maintenant à la considération de diverses fonctions de répartition, présentant un intérêt particulier pour la théorie de la fiabilité.

Exemple 3. *Distribution uniforme.* On dit que la variable aléatoire ξ est *distribuée uniformément* sur le segment (a, b), si sa fonction

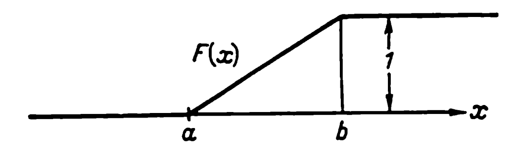


Fig. 1.2.2

de répartition (fig. 1.2.2) est déterminée par les égalités

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leqslant a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{si } a < x \leqslant b. \\ 1, & \text{si } x > b. \end{cases}$$

La densité de probabilité de la distribution uniforme est

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \text{ et } x > b, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{si } a \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Exemple 4. *Distribution normale.* La variable aléatoire est dite *normalement distribuée*, si la densité de probabilité a la forme

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Les constantes a et $\sigma > 0$ peuvent être arbitraires, leur interprétation probabiliste sera donnée au paragraphe suivant. La fonction

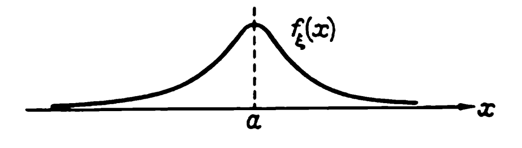


Fig. 1.2.3

$f_\xi(x)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées au point $x = a$; son graphique est représenté sur la fig. 1.2.3.

Exemple 5. *Distribution singulière.* On dit que la variable aléatoire, dont la fonction de répartition est donnée par les égalités

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x\leqslant a,\\ 1, & \text{si } x>a,\end{cases}$$

suit une *distribution singulière*; elle prend avec une probabilité 1 l'unique valeur possible a. Nous voyons ainsi qu'une constante peut être considérée comme une variable aléatoire singulière.

Exemple 6. *Distribution de Poisson.* La variable aléatoire qui ne prend que des valeurs entières non négatives avec les probabilités

$$p_m=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

est dite *distribuée suivant la loi de Poisson.* Sa fonction de répartition est une fonction en escalier comportant une infinité de gradins, à partir des abscisses entières non négatives.

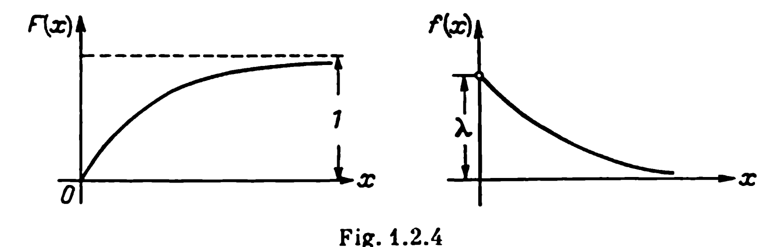


Fig. 1.2.4

La distribution de Poisson joue un rôle particulier dans la théorie de la fiabilité, étant donné qu'elle décrit les lois de l'apparition des pannes subites dans les systèmes complexes.

Nous éluciderons dans le paragraphe suivant la signification du paramètre λ.

Exemple 7. *Distribution exponentielle* (fig. 1.2.4)

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x\leqslant 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{si } x>0.\end{cases}$$

La densité de probabilité existe et est égale à

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x\leqslant 0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x>0.\end{cases}$$

La constante λ a une interprétation probabiliste simple que nous éluciderons au paragraphe suivant.

La distribution exponentielle joue un rôle essentiel en théorie de la fiabilité et dans la pratique des calculs. Notons ici que dans de nombreux cas l'intervalle de temps compris entre deux pannes successives d'un système complexe est précisément distribué suivant une loi exponentielle.

Exemple 8. La *distribution gamma* a la densité de probabilité (fig. 1.2.5) définie par les égalités:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x\leqslant 0,\\ Cx^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & \text{si } x>0.\end{cases}$$

Nous déterminerons les constantes $\alpha>0$ et $\beta>0$ au paragraphe suivant. La constante C est déterminée en fonction de α et β à partir de l'égalité

$$C\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\beta x}\,dx=1,$$

d'où nous tirons

$$C=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)},$$

où

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx.$$

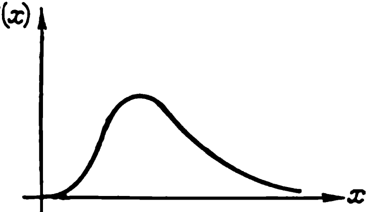


Fig. 1.2.5

Un cas particulier de la distribution gamma est la distribution exponentielle ($\alpha = 1$), un autre cas particulier est la *distribution d'Erlang* (dans le cas des valeurs entières de α). On peut interpréter la distribution d'Erlang pour $\alpha = k$ comme la distribution de l'intervalle de temps séparant la première et la $(k+1)$-ième pannes d'un système complexe (ou séparant deux appels téléphoniques à la centrale, entre lesquels on a enregistré k autres appels).

Exemple 9. *Distribution de Weibull.* C'est la distribution dont la fonction de répartition s'exprime par la formule

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x<0,\\ 1-e^{-cx^{-\alpha}}, & \text{si } x>0,\end{cases}$$

où c et α sont positifs (fig. 1.2.6). Dans son article [13] Weibull utilisa cette distribution pour la description expérimentale de la dispersion de la résistance à la fatigue de l'acier, de ses limites d'élasticité, des dimensions des particules de la suie. Tout dernièrement la distribution de Weibull a été utilisée pour étudier la dispersion des durées de vie de l'appareillage radio-électronique.

En théorie des probabilités la distribution de Weibull était connue auparavant comme la distribution limite (quand $n\to\infty$) de la plus petite valeur de n variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de distribution. Cette question sera étudiée en détail au § 1.4.

Exemple 10. *Distribution doublement exponentielle.* Dans les problèmes où l'on doit établir la distribution de l'article le plus

durable dans un grand lot d'articles identiques, on peut appliquer la distribution doublement exponentielle dont la fonction de répartition est de la forme

$$\Lambda(x) = e^{-ce^{-\alpha x}};$$

les constantes $c > 0$ et $\alpha > 0$ déterminent la forme de la fonction de répartition (fig. 1.2.7).

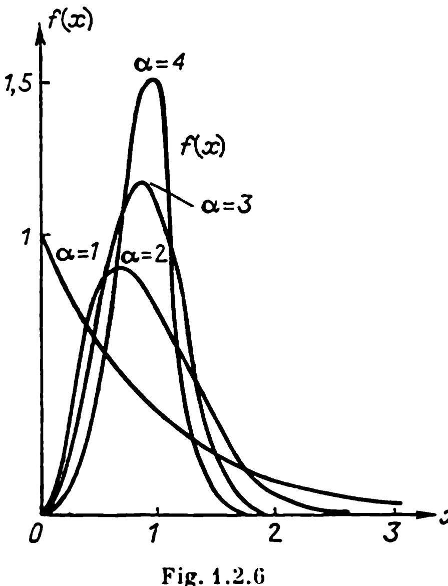


Fig. 1.2.6

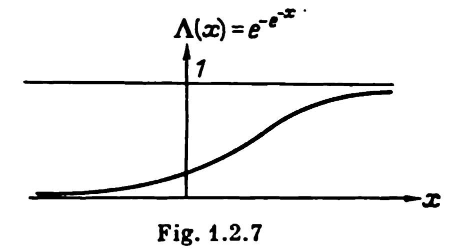


Fig. 1.2.7

Exemple 11. *Distribution lognormale.* Ces dernières années dans de multiples problèmes de la technique, de la biologie, de l'économie, de la géologie et de la théorie de la fiabilité la distribution lognormale a acquis une grande importance. En particulier, comme l'a montré A. Kolmogorov [14] (cf. également A. Philippov [15]), on est conduit à cette distribution lors de l'étude des dimensions des particules de morcellement. Une variable aléatoire non négative suit une distribution lognormale si son logarithme est distribué normalement. La densité de probabilité de la distribution lognormale (fig. 1.2.8) est donnée par la formule

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x} e^{-\frac{(\lg x - a)^2}{2\sigma^2}}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Exemple 12. *Distribution bêta.* Dans les problèmes de la statistique mathématique la distribution bêta joue un grand rôle, sa densité de probabilité (fig. 1.2.9) est donnée par la formule

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \text{ et } x > 1, \\ \dfrac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B\ a,\ b)}, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

où

$$B(a, b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Exemple 13. *Distribution du mélange.* Dans les situations pratiques, il arrive souvent qu'une variable aléatoire est le mélange de deux ou d'un plus grand nombre de variables aléatoires suivant des lois de distribution différentes. Par exemple, la distribution des pièces stockées au dépôt d'après leur durée de vie vérifie précisément cette condition, si les pièces proviennent de différentes usines ou si, comme cela arrive dans les ateliers de réparation, les pièces neuves se trouvent mélangées avec des pièces en état de service déposées des machines à réparer (réparation impersonnelle). Supposons que l'on mélange les variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ dont les fonctions de répartition sont respectivement $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x)$, de sorte que la variable aléatoire ξ_k est prise avec une probabilité p_k, $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$. La fonction de répartition et la densité de probabilité du mélange sont de la forme

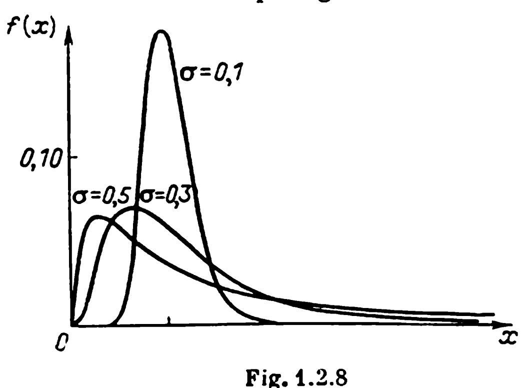


Fig. 1.2.8

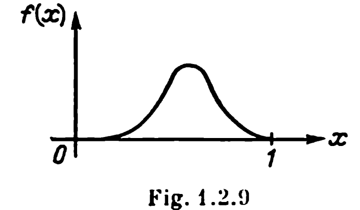


Fig. 1.2.9

$$F(x)=\sum p_k F_k(x), \quad f(x)=\sum p_k f_k(x). \qquad (1.2.1)$$

Si la distribution $F(x, \lambda)$ dépend du paramètre λ, qui est lui-même une variable aléatoire distribuée suivant une loi $A(\lambda)$, la fonction de répartition de la variable aléatoire observée sera égale à

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(x, \lambda)\, dA(\lambda). \qquad (1.2.2)$$

La formule (1.2.1) est un cas particulier de (1.2.2) si l'on choisit pour paramètre λ l'indice k et pour la fonction $A(\lambda)$ la distribution en gradins comportant des sauts p_k aux points $\lambda = k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Si $F(x, \lambda) = 1 - e^{-\lambda x}$ et λ est une variable aléatoire suivant une distribution gamma de densité de probabilité

$$A(\lambda) = \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \lambda^{\alpha} e^{-\beta\lambda} \text{ pour } \lambda > 0,$$

alors, conformément à la formule (1.2.2), on aura

$$F(x) = \int_0^{\infty} [1 - e^{-\lambda x}] \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \lambda^{\alpha} e^{-\beta\lambda} \, d\lambda = 1 - \frac{\beta^{\alpha+1}}{(\beta+x)^{\alpha+1}}.$$

Supposons, en particulier, qu'un dépôt est approvisionné de pièces provenant de trois usines; la distribution de la durée de vie de ces pièces est normale, mais de paramètres différents a_i et σ_i ($i = 1, 2, 3$). La proportion des pièces provenant de chaque usine est respectivement p_1, p_2 et p_3. Si l'on prélève au hasard une pièce dans un lot, quelle sera la probabilité de sa durée de vie? Conformément à la formule (1.2.1)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{p_1}{\sigma_1} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{p_2}{\sigma_2} e^{-\frac{(x-a_2)^2}{2\sigma_2^2}} + \frac{p_3}{\sigma_3} e^{-\frac{(x-a_3)^2}{2\sigma_3^2}} \right].$$

Nous donnerons au paragraphe suivant divers autres exemples intéressants de distributions.

Dans les problèmes pratiques on a souvent à considérer non pas une seule variable aléatoire, mais un ensemble de variables aléatoires, qui, en règle générale, sont liées entre elles. Pour la description complète de l'ensemble de n variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ou, comme on dit autrement, du vecteur à n dimensions, ou de la variable aléatoire à n dimensions, on utilise les fonctions de répartition à n dimensions, c'est-à-dire les probabilités pour que soient vérifiées simultanément les inégalités $\xi_1 < x_1$ $\xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n$,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{P}\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n\}.$$

Les variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont dites *indépendantes* si pour tous les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on a les inégalités

$$\mathbf{P}\{\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n\} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{\xi_k < x_k\}.$$

Dans le langage des fonctions de répartition cette égalité s'écrit

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} F_k(x_k).$$

En théorie de la fiabilité on doit constamment, à partir des variables aléatoires données, former des nouvelles variables aléatoires. Par exemple, lors du calcul de l'influence de l'introduction

des éléments ou des dispositifs de réserve il est important de calculer d'après la fonction (ou les fonctions) de répartition des durées de vie des éléments la fonction de répartition de la durée de vie du groupe de réserve. Si la réservation est chargée (réserve chaude) et que le dispositif fonctionne tant qu'au moins un seul élément (principal ou de réserve) soit en état de service, la durée de vie du groupe de réserve sera

$$\eta_n = \max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

où $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont les durées de vie des éléments de réserve. Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ la fonction de répartition des $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, on a alors

$$A_n(x) = \mathbf{P}\{\eta_n < x\} = \mathbf{P}\{\xi_1 < x, \xi_2 < x, \ldots, \xi_n < x\} = F(x, x, \ldots, x).$$

Dans le cas où les variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont indépendantes, cette formule s'écrit

$$A_n(x) = \mathbf{P}\{\eta_n < x\} = F_1(x) F_2(x) \ldots F_n(x),$$

où $F_k(x)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire ξ_k. Si toutes les variables considérées suivent en outre une même distribution (par exemple, si les éléments de réserve sont pris du même lot dans lequel on a choisi l'élément principal), alors

$$A_n(x) = F^n(x).$$

La densité de probabilité de la variable η_n dans le cas où les variables aléatoires indépendantes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ suivent la même loi de distribution est

$$a_n(x) = A_n'(x) = nF^{n-1}(x) f(x).$$

Introduisons maintenant la notation

$$\zeta_n = \min(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

Pour que $\zeta_n > x$, il faut évidemment que soient vérifiées simultanément les inégalités $\xi_1 > x, \xi_2 > x, \ldots, \xi_n > x$. Nous avons ainsi

$$B_n(x) = \mathbf{P}\{\zeta_n < x\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi_1 \geqslant x, \xi_2 \geqslant x, \ldots, \xi_n \geqslant x\}.$$

Dans le cas où les variables ξ_k sont indépendantes et suivent la même loi de distribution, on a

$$B_n(x) = 1 - [1 - F(x)]^n.$$

Attirons l'attention sur le fait que pour tout n et pour la distribution $\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}$ la distribution de la variable η_n s'obtient de la distribution initiale par translation de l'origine des coordonnées, comme cela apparaît de l'égalité

$$A_n(x) = e^{-ne^{-x}} = e^{-e^{-(x - \log n)}}.$$

De même, pour la distribution de Weibull $F(x) = 1 - e^{-x^{\alpha}}$ pour tout n la distribution de ζ_n s'obtient de la distribution initiale par un changement d'échelle, comme le montre l'égalité

$$B_n(x) = 1 - e^{-nx^{\alpha}} = 1 - e^{-(\sqrt[\alpha]{n}x)^{\alpha}}.$$

Dans le présent paragraphe notre exposé avait un caractère purement intuitif. Nous allons maintenant considérer la notion de variable aléatoire du point de vue de la théorie axiomatique des événements aléatoires que nous avons exposée au § 1.1. Conformément aux considérations générales nous partirons de l'ensemble des événements élémentaires $\mathfrak{U}$. A chaque événement élémentaire e faisons correspondre un nombre (ou un groupe de nombres)

$$\xi = f(e).$$

La fonction ξ est appelée *variable aléatoire* si elle est mesurable par rapport à la probabilité introduite dans l'ensemble considéré $\mathfrak{U}$. En d'autres termes, si pour chaque valeur réelle de x pour l'ensemble $\mathfrak{A}_x$ des e tels que $f(e) < x$ la probabilité est déterminée. La fonction de répartition de la variable aléatoire est alors introduite de façon tout à fait naturelle:

$$F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\} = \mathbf{P}\{\mathfrak{A}_x\}.$$

§ 1.3. Caractéristiques numériques des variables aléatoires

La caractéristique la plus complète d'une variable aléatoire est donnée par sa fonction de répartition, qui indique quelles valeurs et avec quelle probabilité, prend la variable aléatoire. Par ailleurs, on a souvent besoin de connaître certaines représentations globales de la variable aléatoire. Ainsi, pour évaluer approximativement le nombre de machines que nécessite l'exécution d'un travail déterminé, on a seulement besoin de connaître quel travail peut fournir « en moyenne » chacune de ces machines. Pour la théorie des probabilités et ses applications, en particulier, pour la théorie de la fiabilité certaines constantes obtenues d'après des règles déterminées à partir des fonctions de répartition jouent un rôle déterminant. Parmi ces constantes servant à donner une estimation quantitative globale des variables aléatoires, pour les caractériser «en entier», un rôle particulier appartient à la *valeur moyenne* (ou, autrement dit, à l'*espérance mathématique*), à la *variance*, à la *médiane*, au *mode* et aux *moments* de différents ordres.

Si la variable aléatoire ξ prend les valeurs $x_1, x_2, \ldots$ respectivement avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots, \sum_i p_i = 1$ et

$$\sum_i |x_i| p_i < +\infty,$$

alors la somme (la somme des produits des valeurs possibles de la variable aléatoire par leurs probabilités)

$$M\xi = \sum_i x_i p_i \tag{1.3.1}$$

est appelée *espérance mathématique* de la variable aléatoire ou *valeur moyenne* de ξ et est notée par le symbole $M\xi$ (ou souvent $E\xi$).

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire distribuée suivant une loi de Poisson est ainsi égale à

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

On peut en se basant sur la formule (1.3.1) parvenir à la définition de l'espérance mathématique dans le cas où la fonction de répartition de la variable aléatoire est donnée. A cette fin on a uniquement besoin de la notion d'intégrale de Stieltjes

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x). \tag{1.3.2}$$

Dans le cas où la densité de probabilité existe, on a

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx. \tag{1.3.3}$$

Si la variable aléatoire ξ suit une distribution uniforme sur le segment (a, b), on a

$$M\xi = \int_a^b \frac{x\,dx}{b-a} = \frac{a+b}{2},$$

autrement dit, l'espérance mathématique est égale à la moyenne arithmétique des abscisses extrêmes du segment (a, b).

Pour la distribution normale de paramètres a et σ on a

$$M\xi = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (a+z\sigma) e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz.$$

Comme

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = \sqrt{2\pi} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = 0,$$

il en découle que

$$M\xi = a.$$

Nous avons obtenu le résultat suivant : *le paramètre a de la distribution normale est égal à l'espérance mathématique.*

Il existe des lois de distribution pour lesquelles l'espérance mathématique n'existe pas. Ainsi, par exemple, pour la distribution de Cauchy, dont la densité de probabilité est $p(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$, l'espérance mathématique n'existe pas puisque l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx$ diverge.

Formulons maintenant les propriétés générales de l'espérance mathématique, qui ont une grande importance dans les questions pratiques et théoriques.

1°. *L'espérance mathématique d'une constante C est égale à cette constante*: $MC = C$.

2°. *On peut sortir un facteur constant de sous le signe d'espérance mathématique*: $M\,C\xi = C\,M\xi$.

3°. *L'espérance mathématique de la somme de variables aléatoires arbitraires (liées entre elles de façon arbitraire) est égale à la somme de leurs espérances mathématiques*: $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$.

4°. *L'espérance mathématique du produit de variables aléatoires indépendantes est égale au produit de leurs espérances mathématiques*: $M\xi\eta = M\xi \cdot M\eta$.

Pour estimer la dispersion des valeurs de la variable aléatoire autour de sa valeur moyenne on utilise plusieurs caractéristiques numériques, dont la plus importante est la *variance*. On définit la variance comme l'espérance mathématique du carré de l'ecart de la variable aléatoire de son espérance mathématique :

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2. \qquad (1.3.4)$$

Quelques transformations algébriques simples jointes à l'utilisation des propriétés formulées de l'espérance mathématique conduisent à l'égalité

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2. \qquad (1.3.5)$$

Si la variable aléatoire ξ possède une densité de probabilité, pour calculer la variance on peut utiliser les formules suivantes :

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2\, p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx\right)^2. \qquad (1.3.6)$$

Nous allons donner quelques exemples de calcul de la variance pour certaines distributions importantes.

La variance de la distribution normale de paramètres a et σ:

$$\mathbf{D}\xi = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sigma^2.$$

Nous voyons que pour la distribution normale le second paramètre σ possède également un sens probabiliste simple, *son carré est égal à la variance.*

La variance d'une variable aléatoire distribuée suivant une loi de Poisson de paramètre λ est:

$$\mathbf{D}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} - \lambda^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

Nous avons obtenu un résultat intéressant que l'on utilise lors de la vérification de l'hypothèse selon laquelle la distribution observée est une distribution de Poisson: *l'espérance mathématique et la variance de la distribution de Poisson sont égales.*

La variance d'une variable aléatoire ξ uniformément distribuée sur le segment (a, b) est égale à $\mathbf{D}\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$ et, par conséquent, est une fonction croissante de la longueur de l'intervalle (a, b). On peut considérer la variance comme une mesure de dispersion (de fluctuation) des valeurs de la variable aléatoire autour de sa valeur moyenne. Pour la distribution normale (comme d'ailleurs pour de nombreuses autres) la variable aléatoire correspondante peut, pour une valeur positive quelconque de la variance, prendre n'importe quelles valeurs réelles. Toutefois, plus la variance est petite, plus grande sera la proportion des valeurs de la variable aléatoire situées au voisinage de l'espérance mathématique. Pour illustrer cette remarque nous rapportons sur la fig. 1.3.1 le graphique de la densité de probabilité de la distribution normale pour $\sigma = 0{,}5$; 1; 2.

La variance possède les *propriétés* suivantes:

1°. *La variance d'une constante est nulle*: $\mathbf{D}C = 0$.

2°. *On peut sortir un facteur constant de sous le signe de la variance en l'élevant au carré*: $\mathbf{D}C\xi = C^2\mathbf{D}\xi$.

3°. *La variance de la somme des variables aléatoires indépendantes est égale à la somme des variances des termes*: $\mathbf{D}\sum_{k=1}^{n}\xi_k = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}\xi_k$.

On appelle *moment d'ordre k* par rapport à la valeur a de la variable aléatoire ξ l'espérance mathématique de la k-ième puissance de la différence $(\xi - a)$:

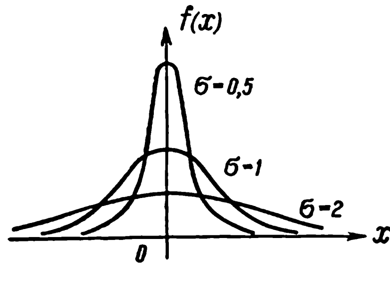


Fig. 1.3.1

$$\nu_k(a) = \mathbf{M}(\xi - a)^k.$$

Si $a = 0$, le moment est parfois appelé moment *initial* (non centré), et si $a = \mathbf{M}\xi$, moment *centré*. La variance est ainsi le moment centré du second ordre. Dans ce qui suit nous désignerons les moments centrés par la lettre μ_k et les moments simples initiaux par la lettre ν_k; l'indice k indique l'ordre du moment. On vérifie aisément que les moments centrés et les moments initiaux sont liés par la relation $(k \geqslant 1)$

$$\mu_k = \sum_{r=2}^{n} (-1)^{k-r} C_k^r \nu_r \nu_1^{k-r} + (-1)^{k-1}(k-1)\nu_1^k.$$

Pour les quatre premiers moments qui jouent un rôle important en théorie des probabilités et en statistique mathématique cette égalité prend la forme

$$\mu_0 = 1,$$
$$\mu_1 = 0,$$
$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3,$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.$$

On appelle *mode* d'une distribution continue, dont la densité de probabilité est $p(x)$, l'abscisse x_M pour laquelle $p(x)$ admet un maximum. La distribution normale est unimodale et pour elle le mode et l'espérance mathématique coïncident. La distribution de Weibull possède un mode pour $\alpha > 1$, elle n'en a pas pour $\alpha \leqslant 1$. A. Khintchine [16] a élucidé les conditions pour lesquelles une distribution est unimodale.

Soit $F(x)$ une certaine distribution. La racine de l'équation

$$F(x) = \alpha \qquad (0 < \alpha < 1)$$

est appelée le *quantile d'ordre* α de la distribution $F(x)$. Si la fonction $F(x)$ est discontinue, le quantile n'existera pas pour n'importe

quel α, étant donné qu'en règle générale pour un α donné on ne trouvera qu'une valeur de x_α, telle que

$$F(x_\alpha - 0) \leqslant \alpha < F(x_\alpha + 0).$$

Par ailleurs, si $F(x)$ est continue et qu'elle conserve une valeur constante dans certains intervalles, alors pour certains α il existera un continuum de quantiles d'ordre α, toutes les valeurs de x pour lesquelles $F(x) = \alpha$.

On vérifie aisément d'après les tables que pour la distribution normale les quantiles pour les valeurs $\alpha = 0{,}25$; $\alpha = 0{,}5$ et $\alpha = 0{,}75$ sont respectivement égaux à $x_{0,25} = a - 0{,}6745\sigma$; $x_{0,5} = a$; $x_{0,75} = a + 0{,}6745\sigma$.

Le quantile correspondant à la valeur $\alpha = 0{,}5$ est appelé *médiane* de la distribution. Pour la distribution normale la médiane coïncide avec l'espérance mathématique.

Si les variables aléatoires ξ et η sont liées par la relation $\eta = \varphi(\xi)$, la fonction $\varphi(x)$ étant une fonction non décroissante de x, alors les quantiles de la grandeur η (que nous désignerons par y_α) sont liés aux quantiles x_α de la grandeur ξ par une relation simple

$$y_\alpha = \varphi(x_\alpha).$$

Supposons que $F(x)$ soit continue. Considérons la fonction $\Psi(x)$ inverse de $F(x)$, c'est-à-dire telle que pour tout x on ait

$$\Psi(F(x)) = x.$$

Il est clair que l'on a la relation $x_\alpha = \Psi(\alpha)$. Cette dernière égalité est utilisée pour l'élaboration de divers papiers fonctionnels probabilistes.

Considérons encore quelques exemples de distributions largement utilisées en théorie de la fiabilité.

Exemple 14. *Distribution du* χ^2. Supposons que les variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ soient indépendantes et normalement distribuées, $M\xi_i = a$, $D\xi_i = \sigma^2$. La fonction de répartition de la grandeur

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - a)^2$$

est appelée *distribution du* χ^2. La densité de probabilité du χ^2 est égale à 0 pour $x \leqslant 0$ et

$$p_n(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

pour $x > 0$. Le nombre n est appelé *nombre de degrés de liberté*.

Exemple 15. *Distribution de Student.* Si les variables aléatoires ξ et η sont indépendantes, ξ est distribuée normalement, $M\xi = 0$, $D\xi = 1$ et η suit la distribution du χ^2, alors le rapport $\frac{\xi}{\eta}$ est distribué suivant une loi de Student (Gosset):

$$p(x; n) = \left[2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\pi n}\right]^{-1} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Si ξ est distribuée normalement, $M\xi = \delta$, $D\xi = 1$, et si η suit la distribution du χ^2 à n degrés de liberté, alors le rapport $\frac{\xi}{\eta}$ suit la *distribution non centrale de Student* avec un paramètre de non-centralité δ. La densité de probabilité de la distribution non centrale de Student est de la forme

$$p(x; \delta, n) = \left[2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{n\pi}\right]^{-1} e^{-\frac{1}{2}\frac{n\delta^2}{n+x^2}} \times$$
$$\times \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \int_0^\infty z^n e^{-\frac{1}{2}\left(z - \frac{x\delta}{\sqrt{n+x^2}}\right)^2} dz.$$

Exemple 16. *Distribution de Fischer-Snédécore.* Supposons que les variables aléatoires χ_1^2 et χ_2^2 sont indépendantes et suivent une distribution du χ^2 à n_1 et n_2 degrés de liberté respectivement. Le rapport $F = \frac{n_2\chi_1^2}{n_1\chi_2^2}$ suit la *distribution* F. La densité de probabilité de la distribution F est donnée par la formule

$$f_{n_1n_2}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1} \left(1 + \frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}.$$

§ 1.4. Quelques théorèmes limites de la théorie des probabilités

Les théorèmes limites jouent un très grand rôle en théorie des probabilités et dans ses applications, car ils permettent dans une grande mesure de tenir compte des particularités réelles de la structure des objets étudiés (influence d'un grand nombre d'interactions dont chacune est insignifiante en grandeur, structure moléculaire, etc.). Nous rapporterons ici quelques théorèmes de ce type, où les lois générales sont déterminées non pas par le caractère de chaque interaction particulière, mais par leur grand nombre. On a constamment affaire à ce genre de phénomènes en théorie de la fiabilité. D'une part, quand on passe à une étude approfondie des phénomènes

d'usure des surfaces en frottement ou des processus se déroulant dans les appareils modernes à semi-conducteurs, nous sommes tenus d'étudier les phénomènes au niveau moléculaire et même de prendre en considération la structure atomistique de la matière. Les connaissances que nous avons de la nature des particules et de leurs interactions sont très pauvres; on sait seulement avec certitude que leur nombre est très grand. Il est naturel que dans de telles conditions l'appareil de la théorie des probabilités et de ses théorèmes limites est particulièrement adapté à l'objet de l'étude : on suppose la présence d'un grand nombre d'ingrédients équivalents et le but principal consiste à rechercher les lois générales, qui sont conditionnées précisément par le caractère de masse du phénomène et ne dépendent que dans une mesure insignifiante du caractère individuel des composantes. Encore, l'élaboration des modèles mathématiques des phénomènes devient souvent plus claire quand on rejette ce qui obscurcit le tableau du phénomène, mais n'exerce pas une influence déterminante sur lui.

Théorème de Poisson. *Si l'événement A a une faible probabilité p de se produire au cours de chacune de n épreuves, alors pour les grandes valeurs de n on a*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \qquad (m = 0, 1, 2 \ldots).$$

où $\lambda = pn$.

En particulier, si la probabilité de fabriquer une pièce défectueuse est petite, alors on peut considérer avec une bonne approximation que la probabilité pour que dans un lot de n pièces il y ait un nombre déterminé de pièces défectueuses suit une loi de Poisson.

Théorème intégral de Moivre-Laplace. *Si au cours d'une série de n épreuves indépendantes la probabilité de l'événement A est égale à p, où $0 < p < 1$, alors la probabilité pour que le nombre μ de réalisations de l'événement A au cours de n épreuves indépendantes vérifie les inégalités* (*a* et *b* *sont des nombres arbitraires*)

$$a \leqslant \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < b,$$

est pour des grandes valeurs de n proche de

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\frac{-z^2}{2}} dz.$$

Le théorème intégral de Moivre-Laplace trouve une large application tant dans les recherches théoriques, que lors de la réalisation des calculs appliqués. Supposons, par exemple, que l'on sache qu'au cours d'une saison une certaine pièce de machine ne peut servir sans être remplacée que dans les $\frac{2}{3}$ des cas et dans $\frac{1}{3}$ des cas

un tel remplacement est indispensable. Supposons que dans une certaine région il y ait 16 200 machines comportant une pièce de ce genre. Combien doit-on apporter de ces pièces pour garantir l'approvisionnement continu des machines en fonctionnement ?

Désignons par μ le nombre de pièces mises hors de service au cours de la saison. Dans ce cas, conformément au théorème de Moivre-Laplace, la probabilité pour qu'il suffise de prévoir 5400 pièces de rechange (c'est ainsi précisément que l'on juge habituellement de l'exigence en pièces de rechange) est égale à la probabilité pour que le nombre de pièces cassées soit inférieure à ce nombre

$$\mathbf{P}\{\mu < 5400\} = \mathbf{P}\{\mu - 5400 < 0\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\mu - 5400}{\sqrt{npq}} < 0\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = 0.5.$$

Ainsi, en cas d'une telle réservation des pièces de rechange la probabilité d'un approvisionnement continu ne sera égale qu'à $\frac{1}{2}$, autrement dit ce n'est que dans la moitié des cas que nos réserves seront suffisantes.

Il serait naturel de connaître les réserves qui aurait satisfait les besoins avec une probabilité suffisamment grande, par exemple 0,95. Ainsi, quel doit être le nombre b pour que

$$\mathbf{P}\{\mu < b\} = 0{,}95\ ?$$

Nous avons

$$\mathbf{P}\{\mu < b\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < \frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right\}.$$

D'après le théorème de Laplace

$$\mathbf{P}\{\mu < b\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{b-np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz.$$

Nous trouvons de la table que l'intégrale de Laplace est égale à 0,95 pour une valeur de l'argument égale à 1.65 ; ainsi

$$1{,}65 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}} = \frac{b - 5400}{60}.$$

Nous trouvons de cette équation que pour satisfaire les besoins il suffit dans la grande majorité des cas de disposer d'une réserve de 5499 pièces.

Loi des grands nombres sous forme de Bernoulli. *Supposons que pour une série d'épreuves indépendantes la probabilité de l'événe-*

ment A soit constante et égale à p; supposons encore que μ signifie le nombre de réalisations de l'événement A au cours de n épreuves indépendantes. Alors, quel que soit le nombre positif $\varepsilon > 0$, pour $n \to \infty$ on a

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} \to 0.$$

Au début de notre siècle le mathématicien français E. Borel découvrit une proposition plus forte, conformément à laquelle

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{n\to\infty} \frac{\mu}{n} = p\right\} = 1.$$

Les théorèmes de Bernoulli et de Borel sont à la base de l'estimation de la probabilité inconnue de l'événement A à l'aide de la fréquence de sa réalisation, autrement dit à l'aide de la grandeur $\frac{\mu}{n}$.

Loi des grands nombres sous forme de Tchébichev. *Si la suite des variables aléatoires deux à deux indépendantes* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *est telle que leurs espérances mathématiques* $\mathbf{M}\xi_n = a_n$ *sont finies et leurs variances sont bornées par une même constante* C ($\mathbf{D}\xi_n \leqslant C$), *alors, quand* $n \to \infty$ *et pour toute constante positive arbitraire* ε, *on a*

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k)\right| \leqslant \varepsilon\right\} \geqslant 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Il en découle que pour $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right| < \varepsilon\right\} \to 1.$$

En particulier, si toutes les variables aléatoires ont une même espérance mathématique ($a_n = a$), alors quand $n \to \infty$, on a

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a\right| < \varepsilon\right\} \to 1.$$

Théorème central limite (théorème de Liapounov et sa généralisation). Les théorèmes du type de la loi des grands nombres établissent la tendance des sommes des variables indépendantes vers une suite de constantes. En vue d'une utilisation pratique on a besoin en règle générale d'en savoir beaucoup plus, notamment *avec quelle fréquence, c'est-à-dire avec quelle probabilité peut se manifester tel ou tel écart entre la somme considérée et ces constantes.* La réponse à cette question est donnée sous des conditions très générales par le théorème central limite. Nous formulerons ce théorème pour les conditions de *Lindeberg.*

Soit donnée une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ldots$ *pour lesquelles nous supposons l'exis-*

tence des espérances mathématiques et des variances finies

$$a_n = \mathbf{M}\xi_n, \quad b_n^2 = \mathbf{D}\xi_n, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \mathbf{D}\sum_{k=1}^{n}\xi_k.$$

Si pour tout $\tau > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int_{|x-a_k|>B_n\tau} (x-a_k)^2\, dF_k(x) = 0, \qquad (1.4.1)$$

où $F_k(x)$ *est la fonction de répartition de* ξ_k, *alors pour tout* x *on a*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k) < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz. \qquad (1.4.2)$$

La condition (1.4.1) est appelée *condition de Lindeberg*; on peut démontrer que si la condition de Lindeberg est vérifiée, alors pour tout $\tau > 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{|\xi_k - a_k|}{B_n} > \tau\right\} = 0.$$

En d'autres termes, si la condition de Lindeberg est vérifiée, alors tous les termes sont uniformément petits dans ce sens que la probabilité pour qu'au moins un terme $\frac{\xi_k - a_k}{B_n}$ soit supérieur à τ tend vers zéro quand le nombre de termes tend vers l'infini.

Le théorème de Lindeberg fut précédé par le *théorème de A. Liapounov* d'une grande importance tant de principe que pratique. Nous formulerons ce théorème sous l'hypothèse particulière de l'existence des moments finis du troisième ordre. Dans ce qui suit c'est précisément sous cette forme que nous l'utiliserons lors de l'étude des questions de réservation.

Supposons que la suite des variables aléatoires mutuellement indépendantes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ possède les moments finis du troisième ordre. Introduisons les notations

$$c_k = \mathbf{M}\,|\xi_k - a_k|^3, \quad C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$$

pour compléter celles qui avaient été formulées lors de l'énoncé du théorème de Lindeberg.

Si pour $n \to \infty$ *le rapport de Liapounov*

$$L_n = \frac{C_n}{B_n^3} \to 0, \qquad (1.4.3)$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k) < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz.$$

Le rapport (1.4.3) est appelé *condition de Liapounov*.

Si tous les termes ont une même distribution et possèdent une variance finie, alors la condition de Lindeberg est obligatoirement remplie et, par conséquent, pour les sommes de ces termes on a l'égalité (1.4.2).

L'exigence que tous les termes aient la même distribution est trop forte, mais elle peut être affaiblie. En effet, on peut exiger seulement que les variances des termes soient finies et aussi que parmi les fonctions de répartition des termes de la suite $\xi_1, \xi_2, \ldots$ il n'y ait qu'un nombre fini de différentes.

Exactement de la même façon, si toutes les variables ξ_k sont bornées supérieurement et inférieurement par les mêmes grandeurs a et b ($a \leqslant \xi_k \leqslant b$) et $B_n \to \infty$ quand $n \to \infty$, alors la condition de Lindeberg est remplie et on a l'égalité limite (1.4.2).

Nous avons rapporté deux cas particuliers du théorème limite central pour se représenter la grande diversité de possibilités pour lesquelles peut apparaître la distribution normale.

Les théorèmes limites du type du théorème central limite jouent un rôle considérable dans les applications, puisque souvent il se présente des situations pour lesquelles le résultat qui nous intéresse se déroule sous l'influence d'un grand nombre de facteurs agissant indépendamment, dont chacun ne produit qu'une action insignifiante par rapport à l'action globale de tous les autres. C'est précisément ce tableau que l'on observe dans la théorie des erreurs d'observation, dans les phénomènes d'usure, de dispersion aléatoire des valeurs des paramètres, déterminant la qualité des articles de production en masse. On peut souvent estimer que les conditions du théorème central limite sont remplies, de sorte que dans les problèmes pratiques on rencontre très souvent des distributions proches de la distribution normale. Dans ce qui suit nous rencontrerons de nombreux cas où nous utiliserons cette conséquence.

Distributions limites pour les valeurs maximale et minimale. Considérons un groupe de n variables aléatoires indépendantes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ suivant une même loi. Formons maintenant les nouvelles grandeurs $\eta_n = \max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ et $\zeta_n = \min(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ définies comme suit: supposons que les variables aléatoires $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ ont pris les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, alors η_n prendra la valeur $\max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, et ζ_n la valeur $\min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Les fonctions de répartition des grandeurs η_n et ζ_n sont définies par les égalités

$$F_n(x) = \mathbf{P}\{\eta_n < x\} = \mathbf{P}\{\xi_1 < x, \xi_2 < x, \ldots, \xi_n < x\} = F^n(x)$$

et

$$F_n^*(x) = \mathbf{P}\{\zeta_n < x\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi_1 \geqslant x, \xi_2 \geqslant x, \ldots, \xi_n \geqslant x\} = 1 - (1 - F(x))^n.$$

Posons-nous la question, vers quelles distributions peuvent converger les distributions des grandeurs $\frac{\eta_n - b_n}{a_n}$ et $\frac{\zeta_n - b_n}{a_n}$ pour

un choix approprié des constantes b_n et $a_n > 0$, quand $n \to \infty$? Il s'avère que les distributions limites de la variable $\frac{\eta_n - b_n}{a_n}$ se ramènent à l'un des types suivants:

1. $\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}$,

2. $\Phi_\alpha(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $e^{-x^{-\alpha}}$ si $x > 0$,

3. $\Psi_\alpha(x) = e^{-(-x)^\alpha}$ si $x \leqslant 0$ et 1 si $x > 0$.

Les distributions limites de la variable $\frac{\zeta_n - b_n}{a_n}$ se ramènent de même à l'un des types suivants:

1. $\Lambda^*(x) = 1 - e^{-e^x}$,

2. $\Phi^*_\alpha(x) = 1 - e^{-(x)^{-\alpha}}$ si $x \leqslant 0$ et 1 si $x > 0$,

3. $\Psi^*_\alpha(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $1 - e^{-x^\alpha}$ si $x > 0$.

La constante α peut prendre n'importe quelle valeur positive.

Il est bon de noter que parmi les distributions citées se trouve la distribution de Weibull. Il est possible que le large emploi que l'on fait en pratique de la distribution de Weibull s'explique par le fait que la variable aléatoire observée est le minimum d'un grand nombre de variables aléatoires agissant indépendamment.

Les conditions de convergence vers chacun des types de distributions limites possibles sont bien étudiées [17], [18].

Sur l'un des modèles de réalisation de la distribution lognormale. Nous pouvons maintenant obtenir du théorème limite central de nombreuses conséquences semblables à celle que nous allons rapporter maintenant.

Si $\xi_1, \xi_2, \ldots$ est une suite de variables aléatoires indépendantes distribuées suivant une même loi pour lesquelles $\mathbf{M} \log \xi_k = a$ et $\mathbf{D} \log \xi_k = \sigma^2$, alors le produit $\prod_{k=1}^{n} \xi_k$ est asymptotiquement distribué suivant une loi lognormale de paramètres na et $n\sigma^2$.

En fait, ces idées ont été maintes fois utilisées pour élaborer des modèles de phénomènes pour lesquels on est conduit à considérer la distribution lognormale. En particulier, A. Kolmogorov utilisa en 1941 un principe similaire pour expliquer la distribution des dimensions des particules lors du morcellement [14].

En 1903, Kapteyn [19] proposa le modèle suivant. Supposons que l'état d'un certain processus est caractérisé par une grandeur $X(t)$. La variation de $X(t)$ au cours du laps de temps compris entre t_i et t_{i+1} est proportionnelle à l'état atteint

$$X(t_{i+1}) - X(t_i) = \varepsilon_i X(t_i)\,; \qquad (1.4.4)$$

le coefficient de proportionnalité ε_i est une variable aléatoire, indépendante des autres ε_j et des grandeurs $X(t_j)$. On a alors

$$\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i = \sum_{i=0}^{n} \frac{X(t_{i+1}) - X(t_i)}{X(t_i)}$$

et

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{X(t_{i+1}) - X(t_i)}{X(t_i)} \sim \int_{t_0}^{t_{n+1}} \frac{dX}{X},$$

si simplement les valeurs t_i sont proches l'une de l'autre. Posant $t = t_{n+1}$ nous trouvons que

$$\log X(t) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i + \log X(t_0).$$

Pour des grandes valeurs de n et des suppositions adéquates envers les ε_i, le logarithme de $X(t)$ possède une distribution proche de la loi normale et par conséquent $X(t)$ suit une loi lognormale.

Si l'on remplace l'hypothèse (1.4.4) par

$$X(t_{i+1}) - X(t_i) = \varepsilon_i \varphi(X(t_i)),$$

où $\varphi(z)$ est une fonction donnée, alors le schéma de Kapteyn permet d'obtenir une grande diversité de distributions limites: quand $\varphi(z) = C$ on obtient la distribution normale ordinaire, quand $\varphi(z) = z$ la distribution lognormale, etc.

Modèle d'Erlang. Supposons que l'intervalle de temps séparant la réalisation de deux événements successifs soit distribué suivant une loi exponentielle de densité de probabilité $\beta e^{-\beta x}$ quand $x > 0$. Si nous sommes intéressés par la distribution de la durée de l'intervalle de temps séparant non pas deux événements successifs, mais comportant k événements entre eux, il est aisé de voir que sa densité de probabilité est $Cx^k e^{-\beta x}$ pour $x > 0$.

Pour illustrer cette distribution par un problème réel lié avec la théorie de la fiabilité, posons le problème de la distribution de l'intervalle de temps séparant deux remplacements consécutifs de blocs pour les conditions suivantes. Chaque bloc se compose d'un élément principal et de $k - 1$ éléments de réserve; les éléments de réserve se mettent en jeu un par un au fur et à mesure de la mise hors service de celui qui fonctionnait avant cet instant; les éléments en réserve ne vieillissent pas; la durée de vie de chaque élément suit une loi de distribution exponentielle.

Le modèle d'Erlang présente un caractère de distribution non limite; notre but était d'illustrer à l'aide de ce modèle la possibilité d'apparition dans une situation réelle de distributions gamma.

La forme des distributions et leurs principales caractéristiques sont données dans les tables 1.4.1 et 1.4.2.

Distributions

Dénomination de la distribution	Domaine des valeurs	Densité de probabilité
Uniforme	(a, b)	$\frac{1}{b-a}$
Normale	$(-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$
Lognormale	$(0, \infty)$	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - a)^2}{2\sigma^2}}$
De Weibull	$(0, \infty)$	$\alpha c x^{\alpha-1} e^{-cx^{\alpha}}$
Gamma	$(0, \infty)$	$\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$
Cas particuliers: Exponentielle	$(0, \infty)$	$\lambda e^{-\lambda x}$
Cas particuliers: du χ^2	$(0, \infty)$	$\frac{z^{\frac{k}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}} e^{-\frac{z}{2}}$
Bêta	$(0, 1)$	$x^{a-1}(1-x)^{b-1}$
De Student	$(-\infty, \infty)$	$\left[2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\pi n}\right]^{-1} \times$ $\times \left(1+\frac{x^2}{2}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$
De Fisher	$(0, \infty)$	$\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1} \times$ $\times \left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}$

Table 1.4.1

continues

Espérance mathématique	Variance	Mode
$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	
a	σ^2	a
$e^{a+\frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2a+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1)$	$e^{a-\sigma^2}$
$\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{c^{1/\alpha}}$	$\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{c^{\frac{2}{\alpha}}}$	(pour $\alpha>1$) $\sqrt[\alpha]{\frac{\alpha-1}{c\alpha}}$
$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$(\alpha\leqslant 1)$ $\frac{\alpha-1}{\beta}$ $(\alpha>1)$
$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	
k	$2k$	$k-2$
$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	$\frac{a-1}{a+b-2}$
0	$\frac{1}{\frac{n}{2}-2}$	0
$\frac{n_2}{n_2-2}$	$\frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$	$\frac{(n_1-2)n_2}{2n_1^2+n_2}$

Table 1.4.2

Distributions discrètes

Dénomination de la distribution	Valeurs possibles	Probabilité	Espérance mathématique	Variance
Binomiale	$0, 1, 2, \ldots, n$	$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$	np	npq
Hypergéométrique	$0, 1, \ldots, \min(M, n)$	$P_m = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$	$n\frac{M}{N}$	$\frac{M(N-M)n(N-n)}{N^2(N-1)}$
De Poisson	$0, 1, 2, \ldots$	$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$	λ	λ
Géométrique	$0, 1, 2, \ldots$	$P_m = pq^{m-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Binomiale négative	$r, r+1, \ldots$	$P_m = C_{m-1}^{r-1} p^r q^{m-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{qr}{p^2}$

§ 1.5. Notions générales sur la théorie des processus aléatoires

Remarques préliminaires. Dans les applications de la théorie des probabilités nous avons constamment affaire à des variables aléatoires, qui sont des fonctions d'un ou de plusieurs paramètres. Ces paramètres peuvent soit varier de façon continue, soit ne prendre que des valeurs discrètes.

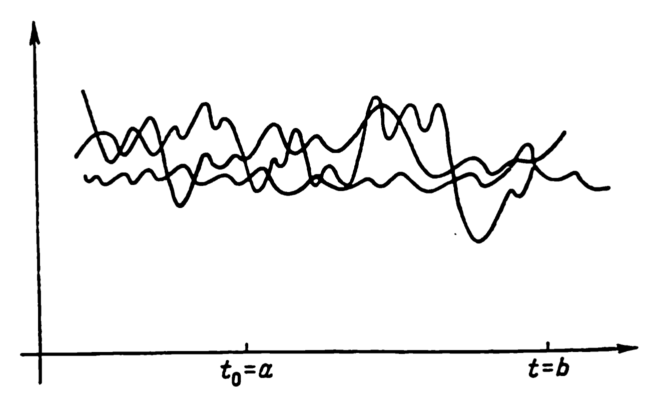


Fig. 1.5.1

La tension sur l'anode d'un tube électronique subit à chaque instant des fluctuations aléatoires, même quand on maintient constante de la façon la plus rigoureuse la valeur de la température ambiante et des autres paramètres contrôlables. La tension est une fonction aléatoire du temps. Si pour plusieurs tubes de caractéristiques initiales identiques on porte sur un graphique la tension réelle de l'anode au cours d'un intervalle déterminé de temps, on obtiendra un faisceau de réalisations, se comportant différemment dans le temps et reflétant les particularités aléatoires de chacun des tubes soumis à l'essai (fig. 1.5.1).

Si l'on étudie, par exemple, l'usure de la surface du cylindre du piston en fonction de la distance parcourue par une automobile, on découvrira encore la même allure aléatoire caractéristique de l'usure.

Considérons en qualité d'un troisième exemple une fonction égale à zéro, tant qu'un élément déterminé d'un dispositif complexe (condensateur, douille) fonctionne normalement, et à l'unité, quand cet élément tombe en panne. L'instant du saut est une variable aléatoire. Nous avons encore affaire à une fonction aléatoire, dont l'argument peut être la durée globale de service de l'élément, la distance parcourue, etc.

Dans tous les exemples cités nous avions affaire à un paramètre variant de façon continue: le temps, la distance parcourue, la durée globale de service. Or, il est fréquemment indispensable d'étudier des situations quand la fonction aléatoire n'est donnée que pour des valeurs discrètes de l'argument. Par exemple, si au cours d'un essai les mesures ne sont effectuées qu'à des heures déterminées de la journée, nous ne connaissons notre fonction qu'aux moments discrets du temps. Dans ce qui suit nous rencontrerons l'une et l'autre de ces situations.

Il va de soi que ce ne sont pas seulement les fonctions aléatoires scalaires qui présentent un intérêt d'ordre théorique et appliqué, mais aussi les fonctions aléatoires vectorielles, quand de l'un des arguments dépendent plusieurs variables aléatoires liées entre elles. En théorie de la fiabilité on a constamment affaire à plusieurs caractéristiques d'un même article et l'on doit étudier la variation de leur influence réciproque dans le temps.

On appelle les fonctions aléatoires d'une variable indépendante *processus aléatoires*, ou *probabilistes*. Si la variable aléatoire dépend de deux ou d'un plus grand nombre d'arguments, de telles fonctions sont alors appelées *champs aléatoires*.

Quand on observe un processus aléatoire $\xi(t)$ on n'observe chaque fois que l'une de ses réalisations déterminées. Lors de plusieurs observations différentes d'un même processus on obtient ses réalisations diverses. Pour les problèmes de physique et d'ingénieur on a habituellement à élucider quelles sont les probabilités qu'ont certaines réalisations de caractère déterminé de se produire (réalisations ne dépassant pas un certain niveau, ne tombant pas dans un certain domaine au cours d'une période donnée de temps).

La considération des premiers problèmes de la théorie des processus aléatoires se rapporte au début de notre siècle. Il faut ici rappeler tout d'abord les travaux de A. Markov consacrés aux processus à temps discret et de L. Bachelier sur les processus de diffusion. Ces deux savants ont élaboré les modèles mathématiques de deux processus d'une grande importance à l'heure actuelle: les chaînes de Markov et les processus de diffusion. Plus tard Fokker et Planck obtinrent lors de l'élaboration de la théorie de la diffusion l'équation différentielle régissant de tels processus. A la base de ces résultats était posé un modèle mathématique simple du mouvement des particules. Les recherches de A. Kolmogorov, A. Khintchine, E. Slutski, P. Lévy et de certains autres savants ont posé le fondement de la théorie mathématique des deux principaux types de processus aléatoires, des processus markoviens et stationnaires. A l'heure actuelle en théorie de la fiabilité les processus markoviens jouent un rôle particulier. Nous devons donner maintenant une définition claire de ces classes de processus et dégager les notions fondamentales qui s'y rapportent.

En mécanique classique l'état d'un système peut être défini de différentes manières. Par exemple, si le système est un point matériel, nous pouvons comprendre par état du système à l'instant t_0 les coordonnées du point de l'espace, qu'il occupe à l'instant donné. Une telle conception de l'état n'est pas très heureuse, car pour la description du développement du système après le temps t_0 il ne nous suffit pas de connaître l'état où il se trouvait à l'instant précis t_0. Il est bien connu que toute l'influence du passé sur le mouvement du point est, d'après les lois de la mécanique classique, concentrée sur sa vitesse à un instant donné. Ainsi, si nous comprenons par état du système à l'instant t_0 les coordonnées de sa position dans l'espace et les composantes de sa vitesse, un état du système ainsi défini permettra de définir univoquement le développement futur du système d'après son état à l'instant t_0. Cet exemple simple nous permet de mieux comprendre la valeur des définitions suivantes.

Dans la physique, la technique et l'économie moderne on a affaire à une situation plus complexe, quand la connaissance de l'état du système non seulement à l'instant donné, mais même durant toute l'histoire précédente de son développement ne détermine pas univoquement son développement futur, mais ne fait que modifier la probabilité pour qu'il passe par tel ou tel ensemble d'états.

Définition d'un processus aléatoire. Désignons par x l'état du système à un instant donné t; comme nous l'avons précisé, x n'est pas nécessairement une grandeur scalaire, mais peut être un vecteur, une fonction ou quelque chose d'autre encore. Toutefois, dans de nombreux cas, on a à considérer le cas où x est un nombre ou un vecteur. Supposons, pour fixer les idées, que x soit une grandeur scalaire. Pour définir le processus aléatoire $\xi(t)$ on suit habituellement la voie suivante. Pour chaque valeur entière de n et chaque ensemble de valeurs possibles $t_1, t_2, \ldots, t_n$ du paramètre t on se donne la fonction de répartition à n dimensions du vecteur $\xi(t_1)$, $\xi(t_2), \ldots, \xi(t_n)$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = \\ = \mathbf{P}\{\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2, \ldots, \xi(t_n) < x_n\}.$$

La fonction $F(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$ doit alors satisfaire aux conditions suivantes:

a) *condition de symétrie*: pour toute permutation $i_1, i_2, \ldots, i_n$ des nombres $1, 2, \ldots, n$ on a l'égalité

$$F(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}; t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_n}) = \\ = F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n);$$

b) *condition de concordance*: pour $m < n$ et pour tous t_{m+1}, $t_{m+2}, \ldots, t_n$ on a l'égalité

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m, +\infty, \ldots, +\infty; t_1, t_2, \ldots, t_m, t_{m+1}, \ldots \\ \ldots, t_n) = F(x_1, \ldots, x_m; t_1, \ldots, t_m).$$

Nous ne développerons pas ici la théorie générale des processus aléatoires, et nous nous bornerons à définir simplement les processus aléatoires markoviens. Désignons par $\mathbf{P}\{s, x; t, \mathfrak{E}\}$ la probabilité pour que le système, qui se trouve à l'instant s à l'état x, se trouve à l'instant $t > s$ à l'un des états de l'ensemble $\mathfrak{E}$. Si une connaissance complémentaire des états du système à l'instant $\tau < s$ ne modifie pas cette probabilité pour tous s, x, t, $\mathfrak{E}$, il est naturel d'appeler cette classe de processus les *processus sans post-action.* Comme une classe particulière importante de processus sans post-action avait été introduite par A. Markov on appelle également les processus sans post-action les *processus markoviens.*

Le fait que le processus soit markovien dépend dans une grande mesure du sens que l'on accorde à la notion d'*état* du système. La situation est ici absolument analogue à celle que nous avons vue sur l'exemple de la mécanique classique: si l'on entend par état du point en mouvement uniquement sa position dans l'espace, son état futur dépendra également du passé; si l'on ajoute à sa position dans l'espace sa vitesse à l'instant donné, nous transformons notre processus en un processus sans post-action. On peut dire ainsi que tous les processus que l'on rencontre en mécanique classique sont markoviens.

Tout processus aléatoire peut, pour une compréhension appropriée de l'état du système, être transformé en un processus markovien: pour cela il suffit d'inclure dans la notion d'état toute l'histoire précédente du système.

Chaînes de Markov. Si l'argument t ne prend que des valeurs discrètes t_s, $s = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$, et si le processus $\xi(t)$ est markovien, on l'appelle habituellement *chaîne de Markov.* On a souvent en pratique à étudier des chaînes de Markov pour lesquelles l'ensemble des états est fini ou dénombrable. Dans ce cas il est admis de décrire les chaînes de Markov à l'aide des *probabilités de transition* ou *de passage.* Supposons qu'à l'instant t_s le système se trouve à l'état $\mathfrak{E}_i$; la probabilité $p_{ij}(s) = \mathbf{P}\{\mathfrak{E}_i, t_s; \mathfrak{E}_j, t_{s+1}\}$ est appelée probabilité de passage. Si cette probabilité ne dépend pas de l'instant t_s, la chaîne de Markov est dite *homogène.* La chaîne de Markov, pour laquelle existent les limites

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\mathfrak{E}_i, t_s; \mathfrak{E}_j, t_{s+1}\} = p_j,$$

est dite *ergodique.* On peut interpréter la propriété d'ergodicité de la manière suivante: au cours d'un grand intervalle de temps, ou plus exactement au cours d'un grand nombre d'instants t_r, quand le système peut modifier son état, la probabilité pour que le système se trouve à un état donné cesse presque de dépendre de l'état initial. L'un des théorèmes ergodiques les plus simples et les plus anciens fut démontré par le créateur de la théorie des chaînes

A. Markov: *si une chaîne de Markov est homogène et ne comporte qu'un nombre fini d'états, et que pour tous les i et j les probabilités* p_{ij} *sont positives, alors la chaîne est ergodique.*

On a souvent affaire dans les applications courantes, et en particulier dans la théorie de la fiabilité, aux cas où il est nécessaire de considérer un processus aléatoire $\xi(t)$, généralement parlant non markovien, pour lequel on parvient à trouver une suite d'instants tels que les grandeurs $\xi(t_i)$ forment une suite de variables aléatoires, liées suivant une chaîne de Markov. De telles chaînes sont appelées *chaînes de Markov induites.*

Flux simple. Les processus pour lesquels les changements d'état se produisent à des moments aléatoires ont une grande importance. Par exemple, supposons qu'à des moments aléatoires du temps apparaît un certain événement (appel téléphonique, pannes d'un dispositif, désintégration d'un atome). Nous sommes intéressés par le nombre de réalisations de cet événement au cours de l'intervalle de temps compris entre 0 et t. Désignons ce nombre par $\xi(t)$. Il est clair qu'aux instants où il modifie sa grandeur $\xi(t)$ ne peut que croître, et uniquement d'une valeur entière.

Un rôle particulier appartient aux processus pour lesquels sont vérifiées les trois conditions suivantes: *stationnarité*, *absence de post-action*, *ordinariété*. Les processus $\xi(t)$ pour lesquels sont vérifiées les trois conditions précitées ont été appelés d'après la proposition de A. Khintchine *flux simples.* On les appelle également *processus homogènes de Poisson.*

Les trois conditions citées possèdent le sens suivant.

La *stationnarité* signifie que pour tout groupe d'un nombre fini d'intervalles disjoints de temps la probabilité de réalisation d'un nombre déterminé d'événements au cours de chacun d'eux dépend de ces nombres et de la longueur de ces intervalles de temps, mais n'est pas modifiée par une translation simultanée de tous les intervalles de temps d'une seule et même grandeur. En particulier, la probabilité de l'apparition de k événements au cours de l'intervalle de temps compris entre T et $T + t$ ne dépend pas de t et est fonction seulement de k et t.

L'*absence de post-action* signifie que la probabilité de la réalisation de k événements au cours de l'intervalle de temps $(T, T + t)$ ne dépend pas du fait combien de fois ils se sont produits auparavant. Cette supposition signifie que la probabilité conditionnelle de la réalisation de k événements au cours de l'intervalle de temps $(T, T + t)$, quelle que soit la supposition sur la réalisation des événements avant l'instant T, coïncide avec la probabilité inconditionnelle. L'absence de post-action signifie l'indépendance mutuelle de réalisations de tel ou tel nombre d'événements au cours des intervalles disjoints de temps.

L'*ordinariété* exprime l'exigence de l'impossibilité pratique de réalisation de deux ou d'un plus grand nombre d'événements au cours d'un petit intervalle de temps h. Plus exactement, cela signifie ce qui suit: désignons par $P_{>1}(h)$ la probabilité de la réalisation de plus d'un événement au cours d'un intervalle de temps h. La condition d'ordinariété réside en ce qui suit:

$$P_{>1}(h) = o(h).$$

On démontre que si dans un flux simple les événements peuvent être réalisés avec une probabilité positive au cours d'un intervalle de temps de longueur unité et que la probabilité de réalisation d'une quantité infinie d'événements au cours de cet intervalle de temps soit nulle, alors il existe une constante positive λ, telle que l'on a la formule

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

où l'on a désigné par $P_k(t)$ la probabilité de réalisations exactement de k événements du flux au cours du temps t.

On peut interpréter la probabilité $P_0(t)$ comme la *probabilité du fait que la durée de l'intervalle de temps compris entre deux réalisations consécutives de l'événement sera supérieure à t*. Cette interprétation nous sera fort utile pour la suite.

Les exigences auxquelles satisfait le flux simple sont vérifiées avec une grande exactitude dans de nombreux processus naturels et techniques. Indiquons, par exemple, le nombre d'atomes d'une substance radio-active se désintégrant spontanément, le nombre de particules cosmiques traversant une plaque au cours d'un intervalle de temps t. S'il s'agit d'un système radiotechnique complexe, composé d'un grand nombre d'éléments dont chacun a une faible probabilité de tomber en panne indépendamment de l'état des autres éléments, alors le nombre d'éléments tombés en panne au cours d'un temps d'exploitation t représente un processus aléatoire. Dans de nombreux cas ce processus est proche d'un processus de Poisson.

Le flux simple possède diverses propriétés remarquables. Nous citerons deux d'entre elles.

Si l'on sait qu'au cours de l'intervalle de temps de durée donnée n événements du flux ont été réalisés, alors il s'avérera que dans cette condition les instants d'apparition de tous ces événements sont indépendants entre eux et uniformément distribués dans cet intervalle.

Supposons que l'on ait deux flux simples indépendants entre eux $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ d'intensités λ_1 et λ_2. Le flux $\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t)$ est aussi un flux simple d'intensité $\lambda_1 + \lambda_2$

Il s'avère souvent très difficile de vérifier les conditions de stationnarité, d'absence de post-action et d'ordinariété pour établir si le processus aléatoire considéré est ou non un processus de Poisson. Par ailleurs, le processus qui nous intéresse peut présenter certaines particularités, qui faciliteront notablement notre tâche. Parmi les diverses propositions qui sont connues à l'heure actuelle dans cette voie, nous aurons particulièrement besoin de celle dont le mérite de la formulation et de la démonstration revient en premier lieu à A. Khintchine. Nous formulerons un résultat quelque peu plus général, obtenu par la suite par B. Grighélionis. Pour le formuler nous devons introduire quelques notions et notations.

Nous dirons que le processus aléatoire $\xi(t)$ est un processus *discontinu* (*en escalier*) si les accroissements $\xi(t) - \xi(s)$ pour $t > s$ ne peuvent prendre que des valeurs non négatives entières. Tout processus homogène de Poisson est un processus discontinu. Toutefois, la classe des processus discontinus n'est pas épuisée par les processus de Poisson homogènes dans le temps. Nous ne noterons maintenant que deux types de processus de ce genre que nous rencontrerons par la suite.

Processus de renouvellement. Supposons que les intervalles de temps compris entre les réalisations successives des événements du flux sont des variables aléatoires indépendantes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ suivant une même loi de probabilité de fonction de répartition $F(x)$. Le processus $\xi(t)$, égal au nombre de réalisations des événements au cours de l'intervalle de temps compris entre 0 et t, est un processus de renouvellement. En particulier, si $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, où $\lambda > 0$ est une constante, le processus de renouvellement est un processus homogène de Poisson.

Si l'on désigne par N_t le plus grand nombre entier tel que $\sum\limits_{i=1}^{N_t} z_i < t$, on a l'*identité de Wald*

$$\mathbf{M} \sum_{i=1}^{N_t+1} z_i = \mathbf{M} z_1 (\mathbf{M} N_t + 1).$$

Processus non homogène de Poisson. Nous dirons que le processus $\xi(t)$ est un *processus non homogène de Poisson*, à fonction conductrice $\Lambda(t)$, si pour n'importe quels $t > s$ et k entiers non négatifs on a l'égalité

$$\mathbf{P}\{\xi(t) - \xi(s) = k\} = \frac{[\Lambda(t) - \Lambda(s)]^k}{k!} e^{-[\Lambda(t) - \Lambda(s)]},$$

où $\Lambda(t)$ est une fonction non décroissante continue à gauche, $\Lambda(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$ et les accroissements $\xi(t) - \xi(s)$ sont indépendants pour les intervalles disjoints (s, t).

Si $\Lambda(t) = \lambda t$, nous obtenons en tant que cas particulier le processus homogène de Poisson (flux simple).

Théorème limite. Supposons que $\xi_n(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}(t)$, où $\xi_{nk}(t)$ sont des processus discontinus indépendants. On rencontre très souvent des processus de ce genre dans la pratique courante. Par exemple, le flux des bateaux faisant escale dans un port est la somme des flux des bateaux partis des ports $A_1, A_2, \ldots, A_n$ en direction du port d'arrivée. Désignons par $\xi_n(t)$ le flux de détériorations d'une certaine pièce. Si le mécanisme comporte k_n pièces et si elles sont mises hors d'usage indépendamment les unes des autres, alors $\xi_n(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}(t)$ représente le flux des détériorations de ce mécanisme. Pour simplifier les choses nous estimerons que le remplacement d'une pièce hors d'usage par une pièce neuve ne demande aucune dépense de temps et est effectué instantanément.

Introduisons les notations

$$p_{nr}(k;\ t,\ s) = \mathbf{P}\{\xi_{nr}(t) - \xi_{nr}(s) = k\},\quad s < t,\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$\Lambda_n(t,\ s) = \sum_{k=1}^{k_n} p_{nr}\quad (1;\ t,\ s),$$

$$B_n(t,\ s) = \sum_{r=1}^{k_n} [1 - p_{nr}(0;\ t,\ s) - p_{nr}(1;\ t,\ s)].$$

Les processus $\xi_{nr}(t)$ seront dits *infiniment petits* si pour tout t fixé on a

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq r\leq k_n} (1 - p_{nr}(0;\ t,\ 0)) = 0.$$

On dit alors que la suite des processus aléatoires $\xi_n(t)$ *converge*, quand $n \to \infty$, vers le processus $\xi(t)$, si toute distribution finie arbitraire des processus $\xi_n(t)$ converge vers la distribution correspondante du processus $\xi(t)$.

Théorème de B. Grighélionis. *La condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la somme de processus discontinus indépendants infiniment petits $\xi_n(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}(t)$ vers un processus de Poisson de fonction conductrice $\Lambda(t)$ consiste en ce que pour tous s et t fixés on ait*

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n(t,\ s) = \Lambda(t) - \Lambda(s)$$

et

$$\lim_{n\to\infty} B_n(t,\ 0) = 0.$$

Quand $\Lambda(t) = \lambda t$, nous obtenons la condition de convergence des sommes de processus discontinus infiniment petits indépendants vers un processus homogène de Poisson (flux simple).

La signification qualitative du théorème que nous venons de formuler est très simple. L'exigence que les composantes du processus soient des infiniment petits signifie que pour chacune d'entre elles la probabilité de réalisation d'un événement au moins (d'un saut) au cours d'un laps de temps t est petite, la somme des probabilités d'un seul saut exactement est une grandeur finie $\lambda(t)$; la somme des probabilités de plus d'un saut est un infiniment petit.

Ainsi, si le mécanisme se compose d'un grand nombre de pièces dont chacune ne peut être mise hors d'usage qu'avec une faible probabilité, et si pour différentes pièces ces détériorations sont indépendantes les unes des autres, alors le flux global de ces détériorations peut être assimilé à un processus de Poisson.

§ 1.6. Eléments de statistique mathématique

Problèmes de statistique. Jusqu'ici nous avons parlé des principales caractéristiques des variables aléatoires comme de quelque chose que nous connaissons dès le début. En fait, un tel état de choses se présente fort rarement, et toutes les caractéristiques indispensables d'un événement aléatoire, d'une variable aléatoire ou d'un processus aléatoire doivent être estimées à partir d'une expérience spécialement élaborée ou encore à partir des observations faites au cours du déroulement du phénomène. Comment estimer la probabilité inconnue de l'événement aléatoire à l'appui des observations dont on dispose ? Comment estimer la fonction de répartition d'une variable aléatoire d'après ses valeurs tirées de l'expérience ? Comment estimer les paramètres a et σ^2 d'une distribution normale, si nous observons une variable aléatoire distribuée suivant une loi normale dont les paramètres nous sont inconnus ? Comment déterminer les caractéristiques du processus aléatoire que nous observons ?

Les problèmes cités sont très importants pour la pratique, en particulier, pour la théorie de la fiabilité. Ils forment un très large objet d'études de la statistique mathématique. Toutefois, ils n'incluent pas toutes les questions. Outre celles que nous avons posées, dans la pratique courante d'autres questions se posent continuellement ; à la base de telles ou telles considérations certaines hypothèses générales ont été avancées : l'événement aléatoire possède dans les conditions données une probabilité déterminée ; deux variables aléatoires ont une distribution identique ; le processus aléatoire est poissonien et d'intensité constante, etc. Comment vérifier le bien-fondé des hypothèses avancées ? Notons encore une autre position

du problème qui ne s'est manifestée pleinement que ces dernières années. On observe un processus aléatoire, sur lequel à un instant donné peut agir une certaine cause, variable dans le temps (par exemple, ses paramètres). On demande de déterminer avec le plus d'exactitude possible, d'après les observations du déroulement du processus, l'instant où cette cause entre en action. Cette position du problème se manifeste dans les problèmes de contrôle du réglage d'une machine-outil et dans de nombreuses situations importantes de la pratique courante.

On peut grossièrement diviser les problèmes qui se posent en statistique en plusieurs types, dont les plus importants sont:

a) l'estimation des paramètres inconnus;

b) la vérification des hypothèses statistiques;

c) la prise de décision.

Le dernier des problèmes cités appartient au troisième type; la grande majorité des problèmes que nous avons rappelés dans le premier alinéa appartient au type a) et les problèmes du second alinéa au type b).

Dans ce paragraphe nous n'aborderons que les problèmes des types a) et b).

Le point de départ de toute recherche statistique sur une variable aléatoire quelconque ξ est l'ensemble de n observations, ayant fourni les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de cette variable. Dans ce qui suit nous supposerons que les épreuves sont mutuellement indépendantes et conduites dans des conditions inchangées. Ces suppositions idéalisent, bien entendu, l'état réel des choses, car en fait les conditions changent au cours du temps. Par exemple, si nous étudions les dimensions avec un même instrument de mesure, il ne donnera pas toujours, du fait de l'usure, une même précision pour toutes les mesures. Toutefois, cette usure est à ce point insignifiante que nous pouvons ne pas la prendre en considération.

Echantillon ordonné, fonction empirique de répartition, théorème de Glivenko. Si l'on ordonne l'ensemble des résultats des observations indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ effectuées sur la variable aléatoire ξ, dont la fonction de répartition est $F(x)$, dans l'ordre croissant $x_1^* \leqslant x_2^* \leqslant \ldots \leqslant x_n^*$ on obtient un *échantillon ordonné*. En certains cas les observations nous donnent directement l'échantillon ordonné. Supposons, par exemple, que nous soumettons à l'essai des éprouvettes pour estimer leur durée de vie pour une contrainte déterminée. Nous noterons par les lettres $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les instants successifs de mort des éprouvettes. L'éprouvette mise hors d'usage à l'instant t_1 avait la durée de vie la plus courte, et l'éprouvette mise hors d'usage à l'instant t_n la durée de vie la plus longue. Il est évident que la suite $t_1, t_2, \ldots, t_n$ constitue un échantillon ordonné pour les observations effectuées sur la variable aléatoire représentant la durée de vie de l'éprouvette.

Appelons fonction empirique de répartition la fonction définie par les égalités

$$F_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{pour } x\leqslant x_1^*, \\ \frac{k}{n} & \text{pour } x_k^*< x\leqslant x_{k+1}^*, \\ 1 & \text{pour } x> x_n^*. \end{cases}$$

La fonction empirique de répartition est ainsi, pour chaque valeur de x, égale au nombre de valeurs de la variable aléatoire inférieure à x, divisé par le nombre total d'observations.

En 1933, fut démontré l'important théorème de statistique mathématique sur la concordance entre les fonctions de répartition empirique et théorique d'une variable aléatoire.

Théorème de V. Glivenko. *Quand $n\to\infty$ on a la relation*

$$\mathrm{P}\{\lim_{n\to\infty}\sup_{x}|F(x)-F_n(x)|=0\}=1.$$

Estimations ponctuelles des paramètres. Le problème se pose souvent d'estimer sur la base des expériences réalisées la valeur d'un ou de plusieurs paramètres inconnus. Cette situation apparaît aussi bien lors de la détermination de la fonction de répartition, quand sa forme analytique est connue, que lors de l'estimation des caractéristiques numériques de la variable aléatoire. L'une des voies les plus courantes de l'estimation des paramètres est la suivante. Supposons que $F(x, \theta)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire ξ; θ est un paramètre inconnu (θ peut être une grandeur vectorielle). Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les résultats des épreuves indépendantes effectuées sur la variable aléatoire ξ. Nous appellerons estimateur ponctuel du paramètre θ une certaine fonction $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dépendant uniquement des résultats des épreuves et des grandeurs connues, mais non du paramètre inconnu. Il est clair que l'estimateur est lui-même une certaine variable aléatoire et par conséquent peut varier d'une série d'épreuves à l'autre.

Un grand nombre de fonctions φ peuvent être choisies en qualité d'estimateur du paramètre θ, de sorte que pour que ce choix ne soit pas entièrement arbitraire il est indispensable d'introduire certaines limitations naturelles. On s'efforce habituellement de faire en sorte que les estimateurs possèdent les propriétés d'*être sans biais* (*corrects*), *consistants et efficaces.*

L'estimateur $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ du paramètre θ est dit sans biais (ou correct) si on a l'égalité

$$\mathrm{M}\varphi=\theta,$$

autrement dit, si l'espérance mathématique de l'estimateur coïncide avec la valeur du paramètre à estimer.

Pour estimer l'espérance mathématique de la variable aléatoire ξ ($a = \mathbf{M}\xi$) nous pouvons choisir en qualité d'estimateur la fonction

$$\varphi = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

On peut aisément vérifier que c'est un estimateur sans biais. Si la fonction de répartition $F(x)$ est symétrique, c'est-à-dire si pour tout x on a l'égalité $F(x) = 1 - F(2a - x)$, alors la grandeur a peut être également estimée à l'aide de la fonction m représentant la médiane empirique, c'est-à-dire une valeur telle qu'à sa gauche et à sa droite se trouve un nombre égal d'observations. On démontre aisément que cet estimateur est aussi sans biais.

Quand on estime le paramètre $\sigma^2 = \mathbf{D}\xi$ à l'aide de la variance empirique

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2,$$

on obtient un biais égal à $\mathbf{M}s^2 - \sigma^2 = -\frac{1}{n}\sigma^2$.

Pour obtenir un estimateur sans biais de σ^2 on doit prendre la fonction

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2.$$

L'estimateur $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ du paramètre θ est dit *consistant* si, quand le nombre d'observations tend vers l'infini, l'estimateur converge en probabilité vers le paramètre à estimer, autrement dit, si pour tout $\varepsilon > 0$ on a la relation

$$\mathbf{P}\{|\varphi - \theta| > \varepsilon\} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

On vérifie aisément que dans tous les exemples que nous venons de rapporter les estimateurs des paramètres a et σ^2 sont consistants. Par exemple, pour le paramètre σ^2 les estimateurs s^2 et s_1^2 sont tous les deux consistants.

Supposons que l'on ait proposé deux estimateurs φ_1 et φ_2 pour le paramètre θ. Nous dirons que l'estimateur φ_1 est plus efficace que l'estimateur φ_2 si

$$\mathbf{M}(\varphi_1 - \theta)^2 < \mathbf{M}(\varphi_2 - \theta)^2.$$

En présence de certaines limitations imposées sur les propriétés analytiques des estimateurs φ on peut indiquer la borne inférieure de tous les estimateurs de la classe considérée:

$$\inf_{\varphi} \mathbf{M}(\varphi - \theta)^2.$$

Si l'estimateur $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est tel que

$$M(\hat{\varphi} - \theta)^2 = \inf_{\varphi} M(\varphi - \theta)^2,$$

il est appelé *efficace*.

L'estimateur

$$\hat{\varphi} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

du paramètre α de la distribution

$$F(x, \alpha) = 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}} \quad (x \geqslant 0)$$

est efficace.

Méthode du maximum de vraisemblance. Il est évident que l'un des principaux problèmes de la théorie de l'estimation des paramètres réside dans l'élaboration des méthodes générales permettant de trouver de bonnes estimations. L'une de ces méthodes la plus célèbre et la plus forte fut proposée en 1912 par le statisticien anglais R. Fisher. Cette méthode avait déjà été utilisée dans certains cas particuliers par Gauss. Nous considérerons cette méthode dans l'hypothèse que la variable aléatoire ξ possède une densité de probabilité $f(x, \alpha)$.

La fonction

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k, \alpha)$$

est alors appelée *fonction de vraisemblance*. Si une variable aléatoire est discrète et prend les valeurs $z_1, z_2, \ldots, z_n$ avec les probabilités respectives $p_1(\alpha), p_2(\alpha), \ldots, \sum_k p_k(\alpha) = 1$, la fonction de vraisemblance est alors définie par l'égalité

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \alpha) = \prod_{k=1}^{n} p_{k_i}(\alpha),$$

où l'indice k_i des probabilités indique que l'on avait observé les valeurs $z_{k_1}, z_{k_2}, \ldots, z_{k_n}$.

La méthode du maximum de vraisemblance consiste à adopter en qualité d'estimation du paramètre α la valeur de α pour laquelle la fonction L admet un maximum. Comme L et $\ln L$ admettent un extrémum pour une même valeur de α, on détermine ces valeurs critiques à partir de l'*équation de vraisemblance*

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = 0.$$

Chaque solution de l'équation de vraisemblance est appelée *estimation par le maximum de vraisemblance*.

On vérifie aisément que pour les distributions binomiale

$$p_k(\alpha) = C_n^k \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} \quad (0 \leqslant k \leqslant n),$$

poissonienne $p_k(\alpha) = \frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}$, normale $f(x; a, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, exponentielle $f(x, \alpha) = \alpha e^{-\alpha x} (x > 0)$, les estimations par le maximum de vraisemblance sont uniques et s'expriment par les formules

$\hat{\alpha} = \frac{m}{n}$ (m est le nombre de réalisations de l'événement)

$$\hat{\alpha} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{2},$$

$$\hat{\alpha} = \bar{x}, \quad \hat{\sigma}^2 = s^2, \quad \hat{\alpha} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

L'importance de la méthode du maximum de vraisemblance est mise en lumière par les deux propositions suivantes:

Si pour le paramètre α il existe un estimateur efficace $\hat{\alpha}$, l'équation de vraisemblance possède alors une solution unique $\hat{\alpha}$.

En présence de certaines limitations générales de caractère analytique (cf. [9]) *imposées à la fonction $f(x; \alpha)$, la solution de l'équation de vraisemblance converge, quand $n \to \infty$, vers la valeur véritable du paramètre α. Cette solution est asymptotiquement distribuée suivant une loi normale et est asymptotiquement efficace.*

Introduisons encore la notion d'*estimateur exhaustif*, qui joue un grand rôle en statistique. La fonction de vraisemblance n'est autre que la densité de probabilité conjointe du vecteur $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supposons que nous disposons d'un estimateur $\bar{\theta}$ du paramètre θ tel que la distribution conditionnelle du vecteur $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour une valeur connue $\bar{\theta}$ ne dépend pas du paramètre θ. Une telle propriété de l'estimateur signifie en un mot qu'il recèle toute l'information relative au paramètre θ, qui est contenue dans les résultats des observations. Les estimateurs possédant cette propriété sont appelés estimateurs *exhaustifs*.

L'estimateur $\bar{\theta}$ est exhaustif si, et seulement si, la fonction de vraisemblance peut être mise sous forme du produit de deux facteurs, dont l'un ne dépend que de $\bar{\theta}$ et θ et l'autre uniquement des résultats des observations $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On appelle parfois cette propriété des estimateurs exhaustifs *critère de factorisation*.

Si la statistique $\bar{\theta}$ est exhaustive, alors pour toute fonction $f(x)$ définissant une application biunivoque la statistique $f(\bar{\theta})$ est également exhaustive.

Notons que *chaque estimateur efficace est simultanément exhaustif.*

Si pour le paramètre θ il existe un estimateur exhaustif $\bar{\theta}$, alors chaque solution de l'équation de vraisemblance est une fonction de $\bar{\theta}$.

Pour les paramètres a et σ de la distribution normale les statistiques exhaustives seront:

$\bar{x}$ dans le cas, où le paramètre σ est connu et où le paramètre a est inconnu;

$\sum_{k=1}^{n}(\bar{x}_k - a)^2$ dans le cas, où le paramètre a est connu et le paramètre σ est inconnu et

le couple $\bar{x}$, $\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2$, quand les deux paramètres sont inconnus.

Méthode des moments. La première méthode générale d'estimation ponctuelle des paramètres inconnus fut la méthode dite *des moments*, proposée par K. Pearson. Cette méthode est aujourd'hui encore largement utilisée en statistique pratique, car elle conduit souvent à une procédure de calcul relativement simple, alors que la méthode du maximum de vraisemblance se heurte malheureusement à des difficultés de calcul.

L'idée de cette méthode consiste en ce que l'on égale les moments de la distribution, dépendant des paramètres inconnus, aux moments empiriques. Prenant un nombre de moments empiriques égal au nombre de paramètres inconnus et composant les équations correspondantes, nous obtenons le nombre indispensable d'équations.

On appelle *moment empirique d'ordre k* la grandeur

$$\hat{\nu}_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k\, dF_n(x);$$

et *moment centré empirique* (ou *d'échantillonnage*) du même ordre la grandeur

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^k.$$

Effectuons à titre d'exemple l'estimation des paramètres α et β de la distribution gamma de Pearson

$$f(x;\ \alpha,\ \beta) = Cx^{\alpha-1}e^{-\beta x} \quad (x \geqslant 0).$$

Nous calculons aisément que

$$\nu_1 = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \nu_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}.$$

Nous en déduisons les équations pour déterminer α et β

$$\frac{\alpha}{\beta}=\bar{x}, \quad \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}=\hat{\nu}_2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2,$$

d'où

$$\beta=\frac{\bar{x}}{s^2}, \quad \alpha=\frac{\bar{x}^2}{s^2}\ (s^2=\hat{\nu}_2-\bar{x}^2).$$

Les estimations obtenues à l'aide de la méthode des moments ne sont pas les meilleures au point de vue de leur efficacité. Elles sont néanmoins fréquemment utilisées en qualité de premières approximations, à partir desquelles on peut trouver les approximations successives avec une plus grande efficacité.

On peut démontrer (cf. par exemple [9]) que la distribution conjointe de deux moments centrés empiriques $\hat{\mu}_i$ et $\hat{\mu}_j$ est asymptotiquement normale (à condition que pour la distribution initiale existent des moments finis d'ordres suffisamment élevés) d'espérance mathématique μ_i et μ_j et de matrice des covariances déterminée par l'égalité

$$\mathrm{M}(\hat{\mu}_i-\mu_i)(\hat{\mu}_j-\mu_j)=$$
$$=\frac{\mu_{i+j}-i\mu_{i-1}\mu_{j+1}-j\mu_{i+1}\mu_{j-1}-\mu_i\mu_j+ij\mu_{i-1}\mu_j}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il arrive souvent que l'on doit obtenir les valeurs même approchées de l'espérance mathématique, de la variance et des autres moments pour une certaine fonction des moments empiriques. Nous nous bornerons à l'exemple simple d'une fonction d'un seul argument $\hat{\mu}_i$: $f=f(\hat{\mu}_i)$. Si cette fonction est continue et possède des dérivées premières continues, alors

$$f(\hat{\mu}_i)=f(\mu_i)+(\hat{\mu}_i-\mu_i)f'(\mu_i)+\ldots$$

et

$$\mathrm{M}f(\hat{\mu}_i)=f(\mu_i)+o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \mathrm{D}f(\hat{\mu}_i)=$$
$$=\mathrm{D}\hat{\mu}_i\,[f'(\mu_i)]^2+o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

En particulier, si $f=\sqrt{\hat{\mu}_2}$, alors on a

$$\mathrm{M}\sqrt{\hat{\mu}_2}=\sqrt{\mu_2}+o\left(\frac{1}{n}\right), \quad \mathrm{D}\sqrt{\hat{\mu}_2}=\frac{\mu_4-\mu_2^2}{4n\mu_2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si la variable aléatoire ξ_n est normalement distribuée et si pour elle $\mathrm{M}\xi_n=a$, $\mathrm{D}\xi_n=\sigma_n^2\to 0$ quand $n\to\infty$, alors pour une fonction

suffisamment régulière $f(x)$ on peut écrire l'égalité

$$f(\xi_n) = f(a) + f'(a)(\xi_n - a) + o(\xi_n - a).$$

La variable aléatoire $f(\xi_n)$ a une distribution asymptotiquement normale d'espérance mathématique $f(a)$ et de variance $[f'(a)]^2 \sigma_n^2$.

Méthode des quantiles. Un autre artifice purement empirique, de même que la méthode des moments, est la méthode des quantiles. Elle consiste en ce que le quantile de la distribution théorique est égalé au quantile empirique. Si l'on doit estimer plusieurs paramètres, les égalités correspondantes sont écrites pour plusieurs quantiles.

Soulignons une propriété des quantiles empiriques. Considérons une distribution unidimensionnelle $F(x)$ de densité de probabilité $f(x) = F'(x)$. Soit $\zeta = \zeta_p$ le quantile d'ordre p, c'est-à-dire l'unique racine de l'équation $F(\zeta) = p$, où $0 < p < 1$. Supposons que dans un certain voisinage du point $x = \zeta_p$ la fonction $f(x)$ est continue, a une dérivée continue et est différente de 0. Le quantile empirique d'ordre p, autrement dit la grandeur z_p, pour laquelle $F_n(z_p) = p$, est alors asymptotiquement normal d'espérance mathématique ζ_p et de variance $\frac{pq}{nf^2(\zeta_p)}$.

En particulier, la médiane de l'échantillon est asymptotiquement normale, son espérance mathématique est égale à la médiane théorique et sa variance à $\frac{1}{4nf^2(\zeta_p)}$.

Pour la distribution normale de paramètres a et σ la médiane est le paramètre a. La médiane empirique d'une distribution normale est distribuée asymptotiquement suivant une loi normale, d'espérance mathématique a et de variance $\frac{\pi\sigma^2}{2n}$.

Nous en déduisons une conséquence utile. *Si le paramètre a de la distribution normale est estimé à l'aide de deux fonctions $a_1 = \bar{x}$ et $a_2 = m$, la variance de la première estimation est égale à $\frac{\sigma^2}{n}$, et la variance de la seconde sera asymptotiquement* $\frac{\pi\sigma^2}{2n}$. Ainsi, asymptotiquement on a $\mathrm{M}(a_1 - a)^2/\mathrm{M}(a_2 - a)^2 = \frac{2}{\pi}$, la seconde estimation est environ 1,6 fois plus mauvaise que la première, si on les compare d'après la valeur de leur variance.

Supposons que la distribution $F(x)$ possède une densité de probabilité dérivable $f(x)$, $0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_k < 1$ et que les nombres x_i sont déterminés par les égalités $f(x_i) = p_i$ et $f_i = f(x_i) \neq 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$. La distribution conjointe des quantiles empiriques $z_{p_1}, z_{p_2}, \ldots, z_{p_k}$ est asymptotiquement normale de moyennes $\zeta_{p_1}, \zeta_{p_2}, \ldots, \zeta_{p_k}$ et de matrice des covarian-

ces

$$\left\| \frac{p_i(1-p_j)}{f_if_j} \right\| = \left| \begin{matrix} \frac{p_1(1-p_1)}{f_1^2}, & \frac{p_1(1-p_2)}{f_1f_2}, & \ldots, & \frac{p_1(1-p_k)}{f_1f_k} \\ \frac{p_1(1-p_2)}{f_1f_2}, & \frac{p_2(1-p_2)}{f_2^2}, & \ldots, & \frac{p_2(1-p_k)}{f_2f_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{p_1(1-p_k)}{f_1f_k}, & \frac{p_2(1-p_k)}{f_2f_k}, & \ldots, & \frac{p_k(1-p_k)}{f_k^2} \end{matrix} \right| .$$

Méthode des intervalles de confiance. Les estimations ponctuelles que nous avons étudiées jusqu'ici sont des variables aléatoires. Nous n'avons pas donné d'estimations des probabilités qu'ont les estimations obtenues du paramètre de s'écarter de sa vraie valeur, car cela nécessite une étude complémentaire. R. Fisher proposa une autre approche de ce problème des estimations. En fait, au lieu de rechercher des fonctions $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ des résultats des épreuves, que l'on adopte en qualité de valeur approchée du paramètre inconnu, il proposa d'indiquer deux fonctions θ_1 et θ_2 des résultats d'observations (et non du paramètre à estimer) telles que la probabilité pour que l'intervalle (θ_1, θ_2) recouvre la vraie valeur du paramètre inconnu ne soit pas inférieure à une valeur donnée. Les fonctions θ_1 et θ_2 sont appelées *limites de confiance* et l'intervalle (θ_1, θ_2) *intervalle de confiance* pour le paramètre θ.

Si l'on estime le paramètre a de la distribution normale pour une valeur connue de σ, la probabilité de l'estimation

$$\bar{x} + \frac{z_1\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant a < \bar{x} + \frac{z_2\sigma}{\sqrt{n}}$$

est égale à

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Pour la distribution

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}} \quad (x > 0)$$

on peut choisir en qualité de limites de confiance pour α les fonctions

$$\alpha_1 = \frac{\bar{x}}{z_2} \text{ et } \alpha_2 = \frac{\bar{x}}{z_1} \quad (z_1 < z_2).$$

Pour ces limites on a l'égalité

$$\mathbf{P}\left\{ \frac{\bar{x}}{z_2} \leqslant \alpha < \frac{\bar{x}}{z_1} \right\} = \int_{z_1}^{z_2} x^{n-1} e^{-x}\, dx = \omega.$$

La grandeur $\beta = 1 - \omega$ est appelée *niveau* (ou *seuil*) *de confiance* de l'estimation proposée, elle indique la probabilité qu'a le paramètre de sortir de ces limites, et ω, coefficient de confiance.

Intervalles de confiance pour la probabilité inconnue. Le problème le plus simple, qui se pose dans la pratique courante, réside dans l'estimation de la probabilité inconnue p de l'événement d'après la fréquence $h = \frac{m}{n}$ de sa réalisation. Notre problème consiste à trouver des fonctions $\underline{p} = \underline{p}(h)$ et $\overline{p} = \overline{p}(h)$ telles que la probabilité, pour que la probabilité inconnue tombe dans l'intervalle $(\underline{p}, \overline{p})$, ne soit pas inférieure à $1-2\beta$. En d'autres termes, nous voulons indiquer une règle telle qu'en l'appliquant de nombreuses fois nous ne parviendrons à une conclusion erronée que dans une proportion 2β de tous les cas.

Les statisticiens anglais Clopper et E. Pearson ont indiqué une règle [22], garantissant que la probabilité de tomber hors de l'intervalle de confiance en dehors de chaque limite ne dépasse pas β. La règle qu'ils ont proposée consiste en ce qui suit : supposons qu'au cours de n épreuves indépendantes on ait observé m réalisations d'un événement A, dont la probabilité est constante et égale à p. On peut alors prendre en qualité de limite supérieure de confiance de l'intervalle de confiance la solution unique de l'équation

$$\sum_{k=0}^{m} C_n^k \overline{p}^k (1-\overline{p})^{n-k} = \beta,$$

et en qualité de limite inférieure de confiance la solution unique de l'équation

$$\sum_{k=m}^{n} C_n^k \underline{p}^k (1-\underline{p})^{n-k} = \beta.$$

On a donné dans la table 8 de l'annexe les valeurs de $\ln \frac{1}{1-\underline{p}}$ et de $\ln \frac{1}{1-\overline{p}}$ pour un diapason suffisamment large des valeurs de n et $\beta = 0{,}025$.

Considérons un exemple numérique. Soit $n = 20$ et $m = 4$. Nous trouvons d'après la table 8 de l'annexe les limites de confiance pour p au niveau $\beta = 0{,}025$: $\underline{p} = 0{,}057$, $\overline{p} = 0{,}437$.

Sur la vérification des hypothèses statistiques. Pour que l'on accepte ou que l'on rejette telle ou telle hypothèse statistique, on a recours aux observations. Supposons que le nombre d'observations soit n et que leurs résultats soient donnés par la suite de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous avons besoin d'une règle qui nous permette, d'après les résultats des observations, d'accepter ou de rejeter l'hypothèse formulée. L'idée de l'élaboration de telles règles repose sur le fait que l'espace des échantillons, c'est-à-dire l'ensemble de

tous les résultats possibles des observations $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, est divisé en deux sous-ensembles disjoints R_{n1} et R_{n2}. On accepte l'hypothèse à vérifier, si le résultat des observations $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tombe dans le domaine R_{n1}, et l'on rejette cette hypothèse s'il tombe dans le domaine R_{n2}. Le domaine R_{n2} est dit *domaine critique*. Il est évident que le choix du domaine R_{n2} détermine univoquement le domaine R_{n1}.

A la réception d'un certain lot de pièces comportant des pièces bonnes et défectueuses, nous sommes intéressés à ce que dans le lot accepté le nombre de pièces défectueuses soit très petit. Désignons par p_0 une grandeur comprise entre 0 et 1 et telle que l'on estime possible d'accepter un lot dans lequel la proportion des pièces défectueuses ne dépasse pas p_0 et que l'on rejette le lot si la proportion de pièces défectueuses est supérieure à p_0. Soumettant à l'essai chaque pièce, nous l'affecterons de l'indice 0 ou 1 suivant qu'elle s'est avérée conforme ou défectueuse. L'espace d'échantillonnage se compose alors de tous les groupes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n nombres x_i, dont chacun ne peut prendre que l'une des deux valeurs, 0 ou 1. Le domaine critique qui est habituellement choisi pour ce genre de problèmes est déterminé par l'inégalité $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) > p_0$.

Supposons que nous réceptionnons certains articles au sujet desquels nous savons que le paramètre déterminant leur qualité est distribué suivant une loi normale dont la variance est connue et égale à σ^2. On exige en outre que l'autre paramètre soit égal à a. L'hypothèse suivant laquelle l'espérance mathématique du paramètre déterminant est égale à a doit être vérifiée sur la base de l'échantillon $x_1, x_2, \ldots, x_n$ constitué par n articles. Le domaine critique, que l'on utilise habituellement lors de la résolution de ce problème, est construit d'après la règle suivante: on rejette l'hypothèse si et seulement si

$$|\bar{x} - a| \geqslant c\sigma,$$

où c est une constante choisie de manière adéquate.

En acceptant ou en rejetant l'hypothèse H qui nous intéresse nous pouvons commettre deux sortes d'erreurs: rejeter l'hypothèse H alors qu'elle est vraie; adopter l'hypothèse H alors qu'elle est fausse. Le premier type d'erreur est appelé *erreur de première espèce*; le second type d'erreur, *erreur de seconde espèce*. Les probabilités des erreurs de première et de seconde espèces sont déterminées par le choix du domaine critique. Pour tout domaine critique R_{n2} nous désignerons par α la probabilité de l'erreur de première espèce, c'est-à-dire la probabilité de rejeter l'hypothèse H alors qu'elle est vraie; nous désignerons par β la probabilité de l'erreur de seconde

espèce, c'est-à-dire la probabilité d'accepter l'hypothèse H alors qu'elle est fausse. Nous pouvons écrire les notations symboliques, que nous avons adoptées, sous forme d'égalités

$$\alpha = \mathbf{P}\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_{n2} \mid H\}$$

et

$$\beta = \mathbf{P}\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_{n1} \mid \overline{H}\}.$$

Il va de soi que notre problème consiste à trouver le domaine critique le plus avantageux, c'est-à-dire le domaine critique R_{n2} pour lequel les grandeurs α et β prennent les plus petites valeurs. Il s'avère que pour une taille donnée de l'échantillon, il n'est pas possible de rendre α et β simultanément aussi petits que l'on veut; c'est pourquoi on doit modifier la position du problème: après avoir choisi α à l'appui de telles ou telles considérations trouver le domaine R_{n2}, qui minimise la valeur de β.

Chaque fois que l'on doit vérifier une hypothèse H on est, en fait, mis en présence au moins de deux hypothèses: H et non H. Suivant le nombre de possibilités que comportent l'hypothèse H et l'hypothèse contraire, on distingue les hypothèses *simples* et *composés* (ou *composites*). Ainsi, si l'hypothèse H consiste en ce que le paramètre a de la distribution normale prenne la valeur a_0 et l'hypothèse contraire veut qu'il soit égal à a_1 (pour une valeur connue de σ), nous vérifions une hypothèse *simple*. De même, si nous vérifions l'hypothèse H suivant laquelle la distribution $F(x)$ est uniforme dans le segment (0, 1) et l'hypothèse contraire suivant laquelle c'est une distribution normale de paramètres (0,5 ; 2), il s'agit encore d'une hypothèse *simple*. Si, par contre, l'hypothèse H consiste en ce que la distribution $F(x)$ est uniforme sur le segment (0, 1) et l'hypothèse contraire en ce que $F(x)$ se compose de toutes les autres distributions excepté la distribution uniforme, nous avons affaire à une hypothèse *composée*. Exactement de la même façon, si l'hypothèse H consiste en ce que la variable aléatoire étudiée est distribuée suivant une loi de Poisson avec un paramètre λ quelconque, c'est une hypothèse composée.

Un théorème important qui porte le nom de ses auteurs Neumann et Pearson, a été démontré sur les hypothèses simples.

Théorème de Neumann-Pearson. *Supposons que l'on vérifie une hypothèse simple H, consistant à tester que l'on est en présence d'une distribution P_0 de densité de probabilité $p_0(x)$, contre l'hypothèse concurrente suivant laquelle on est en présence d'une distribution P_1 de densité de probabilité $p_1(x)$. Le domaine critique R_{n2} a pour une valeur donnée de l'erreur de première espèce α une valeur minimale de l'erreur de seconde espèce, s'il est défini d'après la règle: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ appartient à R_{n2} si et seulement si*

$$p_1(x) > cp_0(x).$$

La constante c est déterminée de la condition que l'erreur de première espèce est égale à α.

La proposition inverse est également vraie: *si l'on a un domaine critique dont l'erreur de première espèce est α et l'erreur de seconde espèce est minimale, alors ce domaine critique est défini d'après la règle citée.* Le seul cas où la proposition inverse n'est pas vraie est celui où l'on a un domaine critique avec une erreur de première espèce inférieure à α et $\beta = 0$.

Notons que l'erreur de première espèce α est également appelée *niveau de signification* du critère de vérification de l'hypothèse. La grandeur $1 - \beta$, c'est-à-dire la probabilité de rejeter l'hypothèse H, alors qu'elle est fausse, est appelée *puissance du test.*

Nous n'aborderons pas ici les questions subtiles liées au choix du niveau de signification donné, les indications correspondantes peuvent être trouvées dans [7] (p. 95) ou dans [5] (p. 365).

Critère d'adéquation du χ^2. On utilise souvent pour vérifier les hypothèses statistiques le critère (test) du χ^2, qui est d'une application commode. Supposons que l'on doive vérifier l'hypothèse H selon laquelle nos observations forment un échantillon de n valeurs x_i d'une variable aléatoire dont la distribution est $\mathbf{P}(S)$ (la probabilité qu'a la variable aléatoire de prendre une valeur appartenant au domaine S est $\mathbf{P}(S)$). Cette notation est commode, car elle permet de raisonner sur une distribution d'un nombre de dimensions arbitraire. Partageons tout l'espace des valeurs de la variable observée en domaines disjoints $S_1, S_2, \ldots, S_r$. Désignons par p_i les probabilités de tomber dans le domaine S_i ($p_i = \mathbf{P}(S_i)$) et par ν_i le nombre d'observations appartenant à ce domaine. Considérons l'expression

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{r} \frac{\nu_i^2}{np_i} - n.$$

On calcule aisément que

$$\mathbf{M}\chi^2 = r - 1$$

et que

$$\mathbf{D}\chi^2 = 2(r-1) + \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{p_i} - r^2 + 2 - 2r\right).$$

La valeur $r-1$ est appelée le *nombre de degrés de liberté.* On démontre que, quand $n \to \infty$, la densité de probabilité de la grandeur χ^2 converge vers l'expression

$$k_{r-1}(x) = \frac{1}{2^{\frac{r-1}{2}}\Gamma\left(\frac{r-1}{2}\right)} x^{\frac{r-3}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \quad (x > 0).$$

Supposons que n est suffisamment grand. Dans la pratique courante l'application du test du χ^2 est réalisée de la manière suivante: on partage l'espace des échantillons en domaines disjoints de telle sorte que le nombre d'observations tombant dans chaque domaine ne soit pas inférieur à 10. On calcule ensuite la grandeur χ^2. Supposons que sa valeur soit χ_0^2. On dispose pour la distribution $k_{r-1}(x)$ des tables des probabilités $p = \mathbf{P}\{\chi^2 < \chi_0^2\}$. Si p est proche de 1, la probabilité de l'inégalité $\chi^2 > \chi_0^2$ est petite, de sorte que l'on estime que, si elle est vérifiée, l'hypothèse H doit être rejetée.

Si la distribution $\mathbf{P}(S)$ dépend de s paramètres inconnus α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$, que l'on détermine à partir des résultats d'observations, alors pour une certaine classe d'estimateurs on a la *règle simple de Fisher: dans ce cas la distribution du* χ^2 *tend, quand* $n \to \infty$, *vers la distribution* $k_{r-s-1}(x)$. Le nombre de degrés de liberté est diminué du nombre de paramètres à estimer. Les paramètres α_i sont les racines des équations

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \alpha_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

et, par conséquent, minimisent la valeur du χ^2.

On trouvera un exposé détaillé de la théorie du test du χ^2 et des exemples d'application dans les ouvrages [8] et [9].

§ 1.7. Transformation de Laplace

En théorie de la fiabilité on étudie presque exclusivement des variables aléatoires *positives*. Pour de telles grandeurs il est plus commode d'utiliser, au lieu de la transformation de Fourier que l'on considère habituellement dans les cours de la théorie des probabilités, la transformation de Laplace.

Supposons que la fonction $f(t)$ est définie pour $t \geqslant 0$, continue par tranches et ne croît pas plus vite qu'une fonction exponentielle, autrement dit il existe $C > 0$ et $a > 0$ pour lesquels

$$|f(t)| < Ce^{at}$$

pour tous les $t \geqslant 0$.

On appelle *transformée de Laplace* de cette fonction l'intégrale

$$\tilde{f}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt\,^*. \qquad (1.7.1)$$

* Dans ce paragraphe nous désignerons pour des raisons de commodité la transformée de Laplace par la même lettre que la fonction elle-même, mais prise avec le signe tilde placé sur cette lettre. Cette notation n'est pas universellemet adoptée.

Cette intégrale converge quand $\operatorname{Re} z > a$. C'est pourquoi la fonction $\tilde{f}(z)$ est déterminée dans le demi-plan complexe $\operatorname{Re} z > a$ et représente dans ce demi-plan une fonction analytique.

Connaissant la transformée de Laplace on peut rétablir la fonction elle-même. On a alors la formule suivante d'inversion:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(z)\, e^{zt}\, dt, \qquad (1.7.2)$$

où l'intégrale est étendue à la droite verticale $\operatorname{Re} z = c$, $c > a$.

Considérons quelques *propriétés* de la transformation de Laplace.

1°. La transformation de Laplace est une *transformation linéaire*, autrement dit la transformée de la somme est égale à la somme des transformées, et si la fonction est multipliée par un nombre, la transformée de Laplace est aussi multipliée par ce nombre

$$\int_0^\infty [c_1 f(t) + c_2 g(t)]\, e^{-zt}\, dt = c_1 \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt + c_2 \int_0^\infty g(t)\, e^{-zt}\, dt.$$

2°. Considérons la transformée de Laplace de la dérivée et de l'intégrale de la fonction $f(t)$:

$$\int_0^\infty f'(t)\, e^{-zt}\, dt = \int_0^\infty e^{-zt}\, df(t) = f(t)\, e^{-zt} \Big|_0^\infty + z \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt =$$

$$= z\tilde{f}(z) - f(0), \qquad (1.7.3)$$

$$\int_0^\infty \left(\int_0^t f(x)\, dx \right) e^{-zt}\, dt = -\frac{e^{-zt}}{z} \int_0^t f(x)\, dx \Big|_0^\infty + \frac{1}{z} \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt} dt = \frac{1}{z} \tilde{f}(z). \qquad (1.7.4)$$

Ainsi, quand on dérive la fonction $f(t)$, sa transformée de Laplace s'obtient en multipliant $\tilde{f}(t)$ par l'argument z et en retranchant de ce produit la valeur initiale $f(0)$ de la fonction. Quand on intègre la fonction $f(t)$ de zéro à t, la transformée de Laplace est divisée par z. Appliquant plusieurs fois la formule (1.7.3) on peut obtenir la transformée de Laplace pour la dérivée d'ordre n

$$\int_0^\infty f^{(n)}(t)\, e^{-zt}\, dt = z^n \tilde{f}(z) - z^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Il est fréquent d'utiliser cette propriété de la transformation de Laplace pour la résolution des équations différentielles linéaires, car en passant des fonctions inconnues à leurs transformées de Laplace nous obtenons pour ces dernières des équations algébriques linéaires.

3°. **Théorème du retard.** Soit

$$f_1(t)=\begin{cases}0, & t<\tau,\\ f(t-\tau), & t\geqslant\tau;\end{cases}$$

alors

$$\int_0^\infty f_1(t)\,e^{-zt}\,dt=\int_\tau^\infty f(t-\tau)\,e^{-zt}\,dt=e^{-z\tau}\int_0^\infty f(x)\,e^{-zx}\,dx=e^{-z\tau}\tilde{f}(z). \tag{1.7.5}$$

Nous avons obtenu que *lors d'une translation du graphique de la fonction $f(t)$ vers la droite d'une grandeur τ sa transformée de Laplace est multipliée par $e^{-z\tau}$.*

4°. **Théorème du déplacement.** Supposons que la fonction $f(t)$ est multipliée par $e^{-\lambda t}$. Alors

$$\int_0^\infty f(t)\,e^{-\lambda t}e^{-zt}\,dt=\int_0^\infty f(t)\,e^{-(\lambda+z)\,t}\,dt=\tilde{f}(\lambda+z), \tag{1.7.6}$$

autrement dit, *quand on multiplie la fonction par l'exponentielle $e^{-\lambda t}$ l'argument de sa transformée de Laplace augmente de λ.*

5°. **Transformée de Laplace pour les convolutions.** L'intégrale

$$\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau=f*g$$

est appelée *convolution* des fonctions $f(t)$ et $g(t)$. Trouvons la transformée de Laplace de la convolution:

$$\int_0^\infty e^{-zt}\,dt\int_0^t f(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau=\int_0^\infty g(\tau)\,e^{-z\tau}\times$$

$$\times\,d\tau\int_\tau^\infty f(t-\tau)\,e^{-z\,(t-\tau)}\,dt=\int_0^\infty \tilde{f}(z)\,g(\tau)\,e^{-z\tau}\,d\tau=\tilde{f}\tilde{g}. \tag{1.7.7}$$

Ainsi, la transformée de Laplace de la convolution de deux fonctions est égale au produit de leurs transformées. Cette propriété peut servir lors de la résolution des équations intégrales contenant une intégrale du type de convolution. Considérons à titre d'exemple l'équation

$$y'(t)=\lambda y(t)-\lambda\int_0^t f(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau,$$

où $f(t)$ est une fonction donnée.

Multiplions les deux membres de l'égalité par e^{-zt} et intégrons en t de zéro à l'infini. Nous obtenons

$$z\tilde{y}(z)-y(0)=\lambda\tilde{y}(z)-\lambda\tilde{y}(z)\tilde{f}(z),$$

d'où

$$\tilde{y}(z)=\frac{y(0)}{z-\lambda+\lambda\tilde{f}(z)}.$$

Comme $\tilde{f}(z)\to 0$, quand $\operatorname{Re} z\to\infty$, le dénominateur ne s'annule pas dans un certain demi-plan $\operatorname{Re} z>a$, et en appliquant la formule d'inversion nous trouvons

$$y(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{y(0)e^{zt}}{z-\lambda+\lambda\tilde{f}(z)}\,dz,\quad c>a.$$

Cette formule permet d'étudier le comportement asymptotique de la solution $y(t)$ quand $t\to\infty$.

6°. On a parfois besoin d'utiliser les relations limites suivantes pour la fonction et sa transformée de Laplace:

a) $$\lim_{z\to\infty} z\tilde{f}(z)=f(0). \tag{1.7.8}$$

b) Si $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=f(\infty)$ existe, alors

$$f(\infty)=\lim_{z\to 0} z\tilde{f}(z). \tag{1.7.9}$$

On peut dire ainsi que le comportement de la fonction $f(t)$ dans le voisinage de zéro est déterminé par le comportement de la transformée de Laplace à l'infini et, inversement, le comportement de la fonction $f(t)$ à l'infini est déterminé par le comportement de la fonction $\tilde{f}(z)$ dans le voisinage de zéro.

7°. Il arrive souvent lors de la résolution des équations différentielles linéaires que la transformée de Laplace de la fonction donnée est une fonction rationnelle. Dans ce cas la fonction elle-même peut être exprimée sous une forme finie.

Trouvons préalablement la transformée de Laplace pour la fonction $t^n e^{-\lambda t}$

$$\int\limits_0^\infty t^n e^{-\lambda t}e^{-zt}dt=\frac{1}{(\lambda+z)^{n+1}}\int\limits_0^\infty x^n e^{-x}\,dx=\frac{n!}{(z+\lambda)^{n+1}}. \tag{1.7.10}$$

On peut démontrer que cette égalité est valable également pour les valeurs complexes de λ. Supposons maintenant que la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ soit de la forme

$$\tilde{f}(z)=R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}.$$

$P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes tels que le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, car $\tilde{f}(z)$ doit nécessairement tendre vers zéro avec la croissance de z. Il est bien connu que toute fraction régulière peut être décomposée en une somme de fractions élémentaires:

$$R(z)=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{A_{k1}}{z-z_k}+\frac{A_{k2}}{(z-z_k)^2}+\ldots+\frac{A_{ks_k}}{(z-z_k)^{s_k}}\right), \quad (1.7.11)$$

où z_k sont les racines du dénominateur et s_k les ordres de multiplicité de ces racines. Dans le cas particulier, où toutes les racines sont simples, on a

$$R(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{z-z_k}, \quad (1.7.12)$$

où

$$A_k=\frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}.$$

Portant la somme (1.7.11) dans la formule d'inversion (1.7.2) et utilisant (1.7.10), nous trouvons

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}R(z)\,dz=\sum_{k=1}^{m}(A_{k1}e^{z_kt}+$$

$$+A_{k2}te^{z_kt}+\ldots+A_{ks_k}\frac{t^{s_k-1}}{(s_k-1)!}e^{z_kt}=\sum_{k=1}^{m}p_k(t)\,e^{z_kt}, \quad (1.7.13)$$

où $p_k(t)$ sont des polynômes de degré inférieur d'une unité à l'ordre de multiplicité des racines z_k.

En particulier, quand toutes les racines sont simples, on a

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}e^{z_kt}. \quad (1.7.14)$$

Notons encore que si certaines racines sont complexes

$$z_k=\alpha_k+i\beta_k,$$

alors, en vertu de la formule d'Euler, les termes correspondants dans la somme (1.7.13) s'exprimeront à l'aide des fonctions trigonométriques

$$e^{z_kt}=e^{\alpha_kt}(\cos\beta_kt+i\sin\beta_kt).$$

Supposons maintenant que ξ est une variable aléatoire positive dont la fonction de répartition est

$$F(t) = \mathbf{P}\{\xi < t\}$$

et la densité de probabilité est $f(t) = F'(t)$.

On appelle transformée de Laplace de cette variable aléatoire la transformée de Laplace de la densité $f(t)$

$$\varphi_\xi(z) = \tilde{f}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, dt.$$

Notons que cette intégrale représente l'espérance mathématique de $e^{-z\xi}$, autrement dit $\varphi_\xi(z) = \mathbf{M}e^{-z\xi}$. La fonction $\varphi_\xi(z)$ possède les propriétés suivantes:

1. $\varphi_\xi(0) = \int_0^\infty f(t)\, dt = 1,$

$$\varphi'_\xi(0) = -\int_0^\infty t f(t)\, dt = -\mathbf{M}\xi, \qquad \varphi''_\xi(0) = \int_0^\infty t^2 f(t)\, dt = \mathbf{M}\xi^2;$$

en général

$$\varphi_\xi^{(n)}(0) = (-1)^n \mathbf{M}\xi^n; \tag{1.7.15}$$

par conséquent, d'après la transformée de Laplace connue nous pouvons trouver tous les moments de la variable aléatoire, en particulier, la valeur moyenne et la variance.

2. Si les variables ξ et η sont indépendantes, la transformée de Laplace de leur somme est:

$$\varphi_\zeta(z) = \mathbf{M}e^{-z\zeta} = \mathbf{M}e^{-z\xi}e^{-z\eta} = \mathbf{M}e^{-z\xi}\mathbf{M}e^{-z\eta} = \varphi_\xi(z)\, \varphi_\eta(z). \tag{1.7.16}$$

Par conséquent, si des variables aléatoires indépendantes s'ajoutent, leurs transformées de Laplace se multiplient. Notons que cette propriété est équivalente à la propriété (1.7.7).

8°. La transformée de Laplace de la fonction linéaire $\eta = a\xi + b$ est égale à

$$\varphi_\eta(z) = \mathbf{M}e^{-(a\xi+b)z} = e^{-bz}\mathbf{M}e^{-az\xi} = e^{-bz}\varphi_\xi(az).$$

Le schéma habituel d'application de la transformation de Laplace en théorie des probabilités est le suivant: les probabilités cherchées vérifient souvent certaines équations linéaires (différentielles, intégrales ou mixtes). Appliquant aux deux membres de ces équations la transformation de Laplace, nous obtenons de nouvelles équations, d'où nous trouvons les transformées de Laplace des probabilités

cherchées. Connaissant ces transformées nous pouvons en certains cas trouver l'expression explicite pour les probabilités. Mais même si ces probabilités ne peuvent être exprimées à l'aide de fonctions connues, nous pouvons, connaissant les transformées de Laplace, obtenir une information substantielle au sujet des probabilités cherchées. Nous pouvons trouver les moments, étudier le comportement asymptotique des probabilités, trouver pour elles des formules approchées.

En conclusion, calculons la transformée de Laplace de certaines *lois de probabilités* que l'on utilise en théorie de la fiabilité.

1°. *Loi exponentielle.* Densité $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$,

$$\varphi_\xi(z) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} e^{-zt}\, dt = \frac{\lambda}{\lambda + z}.$$

2°. *Loi normale*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(t-T_0)^2}{2\sigma^2}}.$$

Supposons que $\sigma \ll T_0$, alors la probabilité pour que la variable aléatoire prenne une valeur négative est faible, et nous pouvons estimer que notre variable est positive

$$\varphi_\xi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_0^\infty e^{-\frac{(t-T_0)^2}{2\sigma^2} - zt}\, dt.$$

Comme en vertu de nos hypothèses la densité $f(t)$ est très petite pour les valeurs négatives de t, nous pouvons étendre l'intégration à toute la droite infinie. Effectuons en outre la transformation $\frac{t - T_0}{\sigma} = x$. Nous obtenons

$$\varphi_\xi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-T_0 z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - x\sigma z}\, dz =$$

$$= e^{-T_0 z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\sigma z)^2}{2}}\, dx =$$

$$= e^{-T_0 z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = e^{-T_0 z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}}.$$

3°. *Distribution gamma*

$$f(t) = \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t}.$$

La transformée de Laplace est

$$\varphi_\xi(z) = \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t - zt}\, dt = \frac{\beta^\alpha}{(z+\beta)^\alpha}.$$

Chapitre 2

CARACTÉRISTIQUES DE FIABILITÉ

§ 2.1. Notions principales de la théorie de la fiabilité

Nous aborderons l'exposé systématique de divers problèmes de la théorie de la fiabilité par la définition des notions principales telles que *fiabilité*, *panne*, *durée de vie*, etc. Les questions de terminologie ne sont pas déterminantes en fiabilité. Il faut néanmoins, pour éviter toute confusion, leur donner une définition claire. Tout dernièrement encore ces questions de terminologie inquiétaient de nombreux chercheurs, tant dans notre pays ([1], [2]) qu'à l'étranger ([3]). Une commission spécialement désignée à cet effet publia la brochure [4] consacrée à la terminologie de la fiabilité dans le domaine de la radioélectronique. Les définitions des principales notions sont données également dans l'article « Fiabilité » [5].

De même que dans les autres domaines de la science, les notions principales de la théorie de la fiabilité sont interprétées par la description des relations existant entre elles. Par *article* (*pièce*) nous entendrons un élément, un système ou l'une de ses parties. L'*exploitation* d'un article signifie l'ensemble de toutes les phases de son existence : transport, stockage, préparation à son utilisation, service et réparation. La notion de fiabilité de l'article est intimement liée à la notion de qualité. On appelle *qualité* de l'article l'ensemble de ses propriétés déterminant le degré d'aptitude de l'article à être utilisé suivant sa destination. La notion de qualité de l'article dépend ainsi profondément de son mode d'utilisation. Par exemple, si une pièce de radioélectronique est utilisée dans des conditions stationnaires, quand on maintient une température et un taux d'humidité donnés, la propriété de résistance à l'humidité ne joue pas un rôle déterminant pour la notion de qualité de l'article. La situation est tout à fait différente dans les cas où l'appareillage est utilisé dans les conditions de campagne sans hermétisation. Ici la propriété de résistance à l'humidité est une partie intégrante des autres propriétés déterminant la qualité. En règle générale, la qualité des articles composites, particulièrement des systèmes de gestion, est déterminée par un grand nombre de propriétés. Au cours du temps les propriétés, constituant la qualité de la pièce, varient et le plus souvent dans un sens non désirable. La qualité change alors en fonction de ces variations. Par *fiabilité de l'article* nous entendrons la faculté de l'article de conserver la qualité dans des

conditions déterminées d'exploitation. En d'autres termes, la fiabilité c'est la *qualité développée dans le temps*. La fiabilité est déterminée par la qualité et les conditions d'exploitation. Nous soulignons le fait que la notion de fiabilité est liée aux propriétés que l'article possédait ou bien aurait dû posséder au moment de sa fabrication ou du contrôle avant l'exploitation. Il est absolument dénué de sens, par exemple, de parler de la non-fiabilité d'un dispositif radioélectrique par rapport à un type déterminé de bruit, si l'immunité de bruit n'a pas été prise en considération lors de l'élaboration de ce dispositif. Il en est autrement si l'on a prévu des parties du schéma servant à assurer l'antibruitage. Dans de tels systèmes il faut alors inclure l'antibruitage dans l'ensemble des propriétés déterminant la qualité et la fiabilité.

Le problème de l'élévation de la qualité et de la fiabilité devient de plus en plus important et actuel du fait de la mécanisation et de l'automatisation complexe des processus de production dans de nombreux domaines de l'industrie, du transport, de la technique des communications. L'importance de ce problème est déterminée par le fait que la fiabilité insuffisante des articles entraîne de grandes dépenses pour leur entretien, de fréquents arrêts de travail de l'équipement ; il peut se produire des pannes liées à de graves pertes matérielles et en vies humaines. En certains cas les dispositifs automatiques s'avèrent moins rentables que les dispositifs non automatiques du fait de leur fiabilité insuffisante. La sous-estimation des facteurs liés à la fiabilité conduit à ce qu'au cours des premières années d'exploitation les dépenses dépassent notablement le coût initial des articles. A l'heure actuelle, les machines pénètrent dans toutes les sphères de l'activité de l'homme et, en particulier, dans la sphère de la gestion de la production et dans les autres processus de gestion. Les problèmes que résolvent les machines et, en particulier, les machines de gestion deviennent de plus en plus compliqués. La complexité croissante des problèmes à résoudre conduit à ce que les machines utilisées pour la résolution de ces tâches sont de plus en plus compliquées. On découvre alors l'une des principales contradictions dans le développement de la technique moderne : d'une part, la complexité croissante des systèmes entraîne une diminution de leur fiabilité, d'autre part, les exigences envers le fonctionnement sûr de ces systèmes deviennent de plus en plus strictes. La théorie de la fiabilité sert précisément à rechercher les voies de résolution de cette contradiction. Deux voies différentes de principe sont alors possibles. La *première* consiste à élever la qualité et la fiabilité des éléments séparés, constituant le système complexe. La *seconde* voie consiste à élaborer des méthodes spéciales de construction des systèmes complexes fiables à partir d'éléments non fiables, ainsi qu'à élaborer les méthodes d'entretien de ces systèmes en cours d'exploitation. On donne dans l'article « Fiabilité » [5] la définition

suivante de la théorie de la fiabilité: « La théorie de la fiabilité est une nouvelle discipline scientifique étudiant les lois générales que l'on doit observer lors de l'établissement de projets, des essais, de la fabrication, de la réception et de l'exploitation des articles pour assurer l'efficacité maximale de leur utilisation. »

L'une des principales notions de la théorie de la fiabilité est celle de panne (avarie, défaillance) et de non-défaillance. On entend par *non-défaillance* la faculté de l'article de conserver sa capacité de travail (c'est-à-dire ne pas tomber en panne) au cours d'un intervalle de temps donné dans des conditions d'exploitation déterminées. La *panne* c'est une perte partielle ou totale, ou une modification des propriétés de l'article, qui abaisse notablement ou qui entraîne une perte complète de la faculté de travail. En certains cas la notion de panne est clairement définissable. Un exemple typique d'articles de ce genre est fourni par les ampoules électriques. En règle générale deux états sont caractéristiques de leur fonctionnement: ou bien un éclairage normal, ou bien un éclairage nul. Toutefois la notion de panne appliquée aux articles de radioélectronique est très relative, car elle dépend notablement des conditions concrètes d'utilisation des articles. Considérons l'exemple des résistances pour lesquelles le paramètre principal déterminant la qualité est la valeur de la résistance exprimée en ohms. On entend souvent par panne d'une résistance le fait que sa valeur s'écarte de la valeur nominale R_0 en dehors des limites admissibles $R_0 \pm \Delta R_0$. On estimera ainsi qu'à l'instant t sont en panne les résistances dont les valeurs sont en dehors de l'intervalle $(R_0 - \Delta R_0, R_0 + \Delta R_0)$. La valeur ΔR_0 n'est pas liée et d'ailleurs ne saurait être liée aux conditions concrètes d'utilisation de ces résistances, car dans divers schémas les valeurs de la tolérance ΔR_0 diffèrent notablement. Si le schéma a été élaboré de manière optimale, un écart des limites de ΔR_0 peut ne pas provoquer de panne. Par ailleurs, il peut y avoir de tels cas de fonctionnement instable des schémas, quand des variations mêmes insignifiantes de la valeur de la résistance, inférieures à ΔR_0, provoquent la panne du fonctionnement du schéma. Indépendamment de son caractère relatif, la notion de panne est une caractéristique utile et riche de la fiabilité, car elle permet d'introduire diverses caractéristiques numériques de la fiabilité. On peut comparer à l'aide de ces indices numériques la fiabilité de différents types d'articles ou d'articles du même type fabriqués à différentes époques, etc.

De par leur caractère on peut diviser en première approximation les pannes en pannes subites et graduelles. Les *pannes graduelles* sont dues à la variation successive des paramètres déterminant la qualité de l'article (principalement, par suite du vieillissement ou de l'usure), quand ces paramètres sortent des limites de tolérance établies. L'un des principaux problèmes de la théorie de la fiabilité réside dans l'étude des possibilités de prévision des pannes graduelles.

Les *pannes subites* sont déterminées par une variation brusque des paramètres déterminant la qualité de l'article. Il est rationnel de considérer également d'autres types de pannes. Les calculatrices électroniques, par exemple, sont caractérisées par des *déréglages*, c'est-à-dire par des *pannes qui s'éliminent automatiquement*. On peut trouver une classification plus complète des pannes dans la brochure consacrée aux questions de terminologie dont nous avons déjà parlé.

Une autre notion essentielle de la théorie de la fiabilité est celle de *durée de vie*. On entend par durée de vie d'un article sa faculté d'être utilisé au cours d'une longue période de temps en présence d'un service d'entretien technique indispensable dans lequel peuvent entrer divers genres de réparations. A l'expiration de la durée de vie, dans l'article se manifestent des phénomènes liés à l'usure ou au vieillissement qu'il est impossible ou bien économiquement non rationnel d'éliminer. La durée de vie est caractérisée soit par le temps, soit par le nombre de cycles, soit par le volume de travail fourni. Pour certains articles les notions de durée de vie et de non-défaillance peuvent coïncider, mais dans le cas général ce sont deux caractéristiques distinctes de la fiabilité.

Pour les articles, dont la capacité de travail est maintenue à l'aide des procédures de renouvellement appelées *réparations*, un indice important de la fiabilité est la capacité de réparation. On appelle *capacité de réparation* de l'article la capacité de prévention, de détection et d'élimination des pannes. Elle est caractérisée par la dépense de travail, de temps et de moyens qu'entraînent les travaux de réparation.

La notion de fiabilité est mise en lumière plus en détail par l'ensemble de trois notions: la non-défaillance, la durée de vie et la capacité de réparation.

Les caractéristiques de qualité et de fiabilité des articles sont intimement liées aux indices économiques (prix de revient) des articles. L'élévation de la fiabilité des articles s'accompagne, en règle générale, de l'élévation du prix de revient au moment où se termine la fabrication, ou au moment de la réception par l'usager. Dans ce sens des articles chers plus fiables ne se distinguent pas en mieux des articles moins fiables, mais bien meilleur marché. Toutefois, pour formuler une conclusion définitive pour juger quels sont les meilleurs articles, on ne doit pas tenir compte uniquement de la valeur du prix de revient de fabrication. L'efficacité économique d'utilisation, la rentabilité des articles plus fiables peuvent compenser l'élévation de leur prix de revient. L'élaboration des méthodes prenant en considération les facteurs de fiabilité et de prix de revient devrait, nous semble-t-il, constituer l'un des problèmes les plus actuels et les plus importants de la science économique.

On peut formuler plus concrètement l'objet de la théorie de la fiabilité. La théorie de la fiabilité établit et étudie les caractéristi-

ques numériques (les tests) de fiabilité, la liaison entre les indices du degré d'économie, d'efficacité et les indices de fiabilité ;

— elle élabore les méthodes de réalisation des expériences de fiabilité et les méthodes de dépouillement des données de ces expériences ;

— elle élabore les méthodes de contrôle de la fiabilité, les méthodes d'établissement des régimes optimaux des travaux de révision (réglementaires) lors de l'exploitation des articles, les méthodes d'argumentation des normes de pièces de rechange (éléments, pièces).

En théorie de la fiabilité on élabore les méthodes d'établissement des régimes et de choix des caractéristiques assurant une fiabilité optimale, les méthodes de choix des constructions et des schémas optimaux assurant une fiabilité donnée, les méthodes optimales de recherche des pannes dans un appareillage complexe, etc.

Lors de la résolution des problèmes de la théorie de la fiabilité on utilise les résultats des études des processus physiques et chimiques se trouvant à la base des phénomènes liés à la perte de la qualité.

Dans certaines branches de la théorie de la fiabilité les méthodes mathématiques telles que la théorie des probabilités et la statistique mathématique, la théorie de l'information, la théorie des files d'attente, la programmation linéaire et non linéaire, la logique mathématique, les méthodes de simulation statistique sur ordinateurs, etc., trouvent une large application.

De nos jours la théorie de la fiabilité devient, grâce au caractère actuel des problèmes qu'elle résout, une science à la mode. Le nombre d'articles concernant d'une façon ou d'une autre les problèmes de fiabilité de la production ne cesse de croître. Il nous semble qu'un décalage injustifiable se manifeste entre les études théoriques et expérimentales dans ce domaine. Il existe, d'une part, des travaux d'ordre purement expérimental, sans aucune tentative de généralisation et d'élaboration d'une théorie décrivant le phénomène étudié, et d'autre part, de nombreux travaux que l'on peut considérer comme une jonglerie mathématique avec les indices, primitive du point de vue du spécialiste connaissant bien les mathématiques. A cet égard attirons l'attention du lecteur sur l'article « Bandwagon » publié en langue russe dans le recueil des travaux de C. Shannon [6], consacré à une question analogue sur la vogue que connaît la théorie de l'information.

Considérons la relation entre les notions de fiabilité et d'efficacité. Certains ingénieurs chargés de l'établissement de projet des systèmes complexes pensent que les notions de la théorie de la fiabilité sont inapplicables à des systèmes complexes. On affirme même que la notion de fiabilité d'un système complexe est dénuée de sens et que l'on ne doit s'occuper que de l'efficacité de ces systèmes. Par cela même on critique indirectement la notion de panne d'un système complexe. Il est vrai que la notion de qualité d'un système complexe créé pour fonctionner dans un milieu extérieur variable inclut en soi-même un ensemble de plusieurs dizaines et parfois de plusieurs centaines de propriétés déterminant sa qualité. Beaucoup

de ces propriétés ne jouent un rôle déterminant qu'en présence de conditions extérieures déterminées. C'est pourquoi la notion de panne liée à la perte totale ou notable de capacité de travail du système peut sembler passablement artificielle. Il est plus acceptable d'introduire un indice général de la qualité, l'*efficacité*, qui est la mesure de la productivité du système, compte tenu des conditions extérieures et du mode d'utilisation. La notion d'efficacité est, généralement parlant, indépendante de celle de fiabilité. On peut parler de l'efficacité des systèmes d'un fonctionnement absolument sûr et comparer des systèmes d'après leurs indices quantitatifs d'efficacité. Toutefois, si les parties composantes du système ne sont pas d'un fonctionnement absolument sûr, leur qualité influe notablement sur l'efficacité. Dans de tels cas on doit entendre par fiabilité du système la stabilité de son efficacité, compte tenu de la fiabilité des parties composantes du système.

Nous avons jusqu'ici parlé des notions de fiabilité dans le plan le plus général. Si toutefois nous essayons d'introduire des indices quantitatifs pour les notions formulées plus haut, nous parviendrons immanquablement à la nécessité de recourir à une interprétation probabiliste de ces indices. Dans la plupart des articles parus à ce jour on entend par fiabilité la probabilité de fonctionnement sans défaillance au cours d'un intervalle déterminé de temps. On rencontre également d'autres interprétations de ce terme. Il n'y a ici rien d'extraordinaire, puisque la diversité des problèmes pratiques entraîne la nécessité d'utiliser telle ou telle caractéristique de fiabilité de fonctionnement du dispositif donné. Ainsi, en certains cas il est important que la durée moyenne de fonctionnement sans défaillance au cours d'un intervalle de temps donné T soit maximale; la nécessité d'introduction d'autres indices quantitatifs peut également se faire sentir. Plus encore, dans divers cas il peut s'avérer indispensable que l'on atteigne le niveau maximal de fiabilité simultanément suivant plusieurs indices. Ces exigences peuvent même parfois s'avérer contradictoires. En pareils cas, on peut chercher à déterminer la solution optimale par rapport aux exigences formulées. Il convient ici de souligner que l'optimalité ne peut être déterminée en dehors du système concret et de sa destination.

Par exemple, il est très important de faire en sorte que les machines agricoles se prêtent bien aux réparations et que leur durée de vie soit la plus longue possible. Toutefois, du point de vue des intérêts des diverses exploitations et de celui de l'état en général, la fiabilité de ces machines acquiert une importance particulière du point de vue d'une probabilité élevée du fonctionnement sans défaillance au cours de la période des travaux des champs.

Les pertes subies par une exploitation seront élevées si le tracteur ou la moissonneuse-batteuse, possédant une grande durée de vie, se trouvent fréquemment en panne durant la période des semailles

ou de la moisson et s'ils doivent subir des réparations au cours de la période la plus importante. Exactement de la même façon il est indispensable pour un avion d'assurer la probabilité maximale de fonctionnement sans défaillance au cours de toute la durée du vol. La durée de vie, c'est-à-dire la durée d'exploitation de l'avion (sans compter les heures dépensées pour les réparations) jusqu'à son usure complète, tout en étant une caractéristique importante de sa qualité, reste ici au second plan.

Ainsi, les caractéristiques quantitatives de fiabilité sont nombreuses, et dans chaque cas concret le rôle déterminant peut appartenir à caractéristiques différentes de fiabilité.

Dans cette partie du livre nous nous limiterons à l'étude des modèles mathématiques liés à l'utilisation des méthodes de la théorie des probabilités et de la statistique mathématique. On peut exposer l'approche générale de l'élaboration des modèles de ce genre de la manière suivante.

Parmi tous les états dans lesquels peut se trouver le système nous dégageons l'ensemble $\mathfrak{C} = \{x\}$ de tous les états x qui se distinguent entre eux du point de vue de la fiabilité. Nous appellerons l'ensemble $\mathfrak{C}$ l'espace de phase du système. Par exemple, si le système se compose de n blocs de différents types, dont chacun peut se trouver soit en état de service, soit en panne, l'espace de phase du système est constitué des points de la forme $x = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, où $\varepsilon_i = 0$, si le i-ième bloc est en bon état, et $\varepsilon_i = 1$, si le i-ième bloc est en panne. Si les blocs en panne peuvent être réparés, et si le temps de la réparation est une variable aléatoire dont la fonction de répartition $F_{rép}(x)$ est, généralement parlant, différente de la loi exponentielle, alors il est naturel d'estimer que les états du système diffèrent si les temps déjà dépensés pour la réparation des blocs sont différents. Nous sommes alors conduits à considérer un espace de phase plus complexe $\mathfrak{C}$, formé des groupes de points $x = (\varepsilon_1, t_1, \varepsilon_2, t_2, \ldots, \varepsilon_n, t_n)$, où $\varepsilon_i = 0$ ou 1 suivant que le i-ième bloc est en bon état ou non, et $t_i = 0$ quand $\varepsilon_i = 0$. Quand $\varepsilon_i = 1$, t_i est égal au temps déjà dépensé pour la réparation du i-ième bloc. Il peut y avoir des cas, où la valeur de x a un sens physique. Supposons que les indices les plus importants de la qualité d'un transistor soient son gain en courant β et le niveau du bruit F. Dans ce cas l'espace de phase $\mathfrak{C}$ se compose de l'ensemble des points du plan $x = (x_1, x_2)$, où $x_1 = \beta$, $x_2 = F$. Dans l'ensemble $\mathfrak{C}$ sont inclus les points x du premier quadrant du plan $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$. On pourrait rapporter des exemples de systèmes dont l'espace de phase est plus complexe. Le premier pas de l'élaboration d'un modèle mathématique commence ainsi par le choix de l'espace de phase correspondant $\mathfrak{C} = \{x\}$.

Avec le temps, dans les parties composantes du système se produisent diverses modifications liées, par exemple, au vieillissement

des éléments constituant le système. C'est pourquoi, si à l'instant t l'état du système est décrit par le point x_1, à l'instant $t_2 > t_1$ à l'état du système correspondra le point x_2. Il peut alors se faire que $x_1 \neq x_2$. Si l'on désigne par $x(t) \in \mathfrak{C}$ l'état du système à l'instant t, on peut considérer la suite des états $x(t)$, $t \geqslant 0$ comme un processus se déroulant dans le temps. Comme la modification de l'état présente un caractère aléatoire, on peut considérer les valeurs de $x(t)$ comme la trajectoire d'un processus aléatoire se déroulant dans l'espace de phase des états du système $\mathfrak{C}$.

Le second pas de l'élaboration du modèle mathématique réside dans la définition de ce processus aléatoire en fonction des conditions concrètes de la position du problème. Considérons un exemple. Supposons que le système se compose de n blocs identiques, dont l'un est le bloc principal et les autres sont en réserve. Chacun des blocs peut être soit en état de service, soit en panne. Les pannes se produisent indépendamment les unes des autres. Les blocs tombés en panne ne sont pas réparés, et la fiabilité de chacun des blocs est caractérisée par la probabilité de fonctionnement sans défaillance au cours du temps t, égale à $p(t) = e^{-\lambda t}$. Quand le bloc principal tombe en panne, il est remplacé par un bloc de réserve. Nous pouvons choisir ici en qualité d'espace de phase l'ensemble $\mathfrak{C} = \{0, 1, \ldots, n\}$. Nous estimons que $x(t) = k$, si à l'instant t justement k blocs sont en état de service. Aux cas de réserve « froide », quand les blocs de réserve ne tombent pas en panne, et de réserve « chaude », quand la probabilité pour qu'un bloc de réserve tombe en panne est aussi égale à $p(t) = e^{-\lambda t}$, correspondent divers processus aléatoires $x_{fr}(t)$ et $x_{ch}(t)$. Sous les hypothèses adoptées, ce sont des processus de Markov homogènes dans le temps comportant un nombre fini d'états. Dans le premier cas la matrice des intensités des passages est égale à A_1 et dans le second cas à A_2:

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 1-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{Vmatrix};$$

$$A_2 = \begin{Vmatrix} 1-n\lambda & n\lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1-(n-1)\lambda & (n-1)\lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

La position des problèmes relatifs aux systèmes avec réservation considérés dans le présent ouvrage (cf. chapitres 5 et 6) nous conduit

aux processus de Markov homogènes dans le temps avec un nombre fini d'états. Il existe toutefois un grand nombre de problèmes, dont la solution présente un intérêt pratique immédiat et qui nécessitent l'étude des processus markoviens d'une nature plus complexe. Un cas particulier important est constitué par les processus markoviens comportant une ingérence discrète du hasard. Un exposé systématique des méthodes de résolution des problèmes de la théorie de la fiabilité à l'aide des processus markoviens comportant une ingérence discrète du hasard sera donné dans l'un de nos ouvrages futurs. Notons à ce sujet parmi les travaux déjà publiés [8], [9], [10].

Il convient de noter que de nombreux problèmes de la théorie des files d'attente conduisent à des modèles identiques aux modèles de la théorie de la fiabilité. Etant donné que la théorie des files d'attente s'est développée bien avant la théorie de la fiabilité, l'utilisation de ses artifices et de ses méthodes, et parfois même de ses modèles, présente un grand intérêt pratique pour la solution des problèmes de la fiabilité. Il suffit parfois, pour utiliser les résultats de la théorie des files d'attente en théorie de la fiabilité, de remplacer les mots « appel » ou « client » par le mot « panne », et la durée de la « conversation » ou du « service » par le temps de « réparation ».

Quand l'espace de phase $\mathfrak{E} = \{x\}$ est défini, et que l'on a donné le processus aléatoire $x(t)$ décrivant l'évolution du système dans le temps, l'étape suivante consiste à choisir diverses caractéristiques numériques de fiabilité du système. Comme nous l'avons déjà noté, un tel choix dépend des conditions concrètes et de la destination du système. Plus encore, il est parfois rationnel de calculer simultanément plusieurs indices numériques de fiabilité. Dans le plan le plus général on peut considérer les caractéristiques de fiabilité comme l'espérance mathématique d'une certaine fonctionnelle Φ déterminée sur les trajectoires du processus $x(t)$. On dit que la fonctionnelle Φ est déterminée sur le processus $x(t)$, si à chaque trajectoire $x(t)$ on fait correspondre un certain nombre $\Phi[x(t)]$. L'indice de fiabilité φ est déterminé comme l'espérance mathématique de cette fonctionnelle, autrement dit

$$\varphi = \mathbf{M}\Phi[x(t)]. \qquad (2.1.1)$$

Une telle approche consiste, en fait, à attribuer à chaque trajectoire du processus $x(t)$ un certain poids et à adopter en tant qu'indice de fiabilité la valeur moyenne de ce poids. Par exemple, on peut obtenir la probabilité $P(t)$ de fonctionnement sans défaillance de la manière suivante. On détermine d'abord dans l'espace de phase $\mathfrak{E}$ un sous-ensemble $\mathfrak{E}_{\text{panne}} \subset \mathfrak{E}$ (fig. 2.1.1,*a*) tel qu'on estime que le système est en panne, quand son état $x(t) \in \mathfrak{E}_{\text{panne}}$. Pour un transistor dans le cas où l'on ne tient compte que du gain et du niveau du bruit lors des essais à la fiabilité, la forme du domaine

$\mathfrak{E}_{\text{panne}}$ est montrée sur la figure 2.1.1,*b*. Déterminons la fonctionnelle Φ_1 de la manière suivante. Nous posons $\Phi_1 [x(t)] = 0$, si pour une au moins des valeurs $s \leqslant t$ la trajectoire $x(s)$ passe par les points du sous-ensemble $\mathfrak{E}_{\text{panne}}$; dans le cas contraire nous posons $\Phi_1 [x(t)] = 1$. Il est évident que $M\Phi_1 [x(t)] = p(t)$, autrement dit, est égale à la probabilité de fonctionnement sans défaillance dans l'intervalle $[0, t]$. La fonctionnelle $\Phi_2 [x, (t)]$ est égale

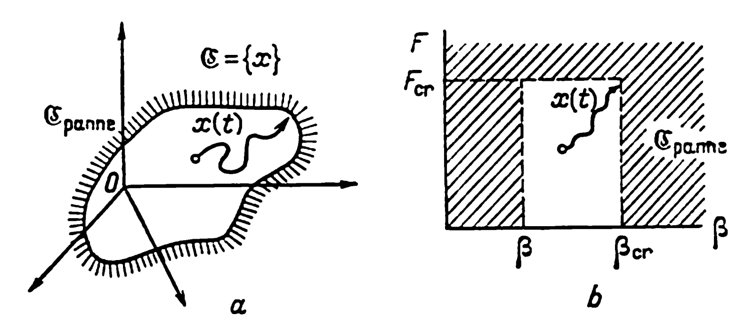


Fig. 2.1.1

à la durée de l'intervalle de temps compris entre le début du fonctionnement du système jusqu'à ce que la trajectoire tombe dans l'ensemble $\mathfrak{E}_{\text{panne}}$. La constante $T = M\Phi_2 [x(t)]$ est une caractéristique numérique importante de la fiabilité du système que l'on appelle *durée moyenne de fonctionnement sans défaillance du système.*

D'autres approches sont possibles pour la définition de la fiabilité optimale du système du point de vue de son efficacité. Nous sommes alors conduits à la nécessité de comparer les indices de fiabilité de divers systèmes comportant des espaces de phase des états différents et de choisir le meilleur d'entre eux. Une position type des problèmes de ce genre apparaît dans les problèmes de réservation optimale en présence d'une ou de plusieurs limitations [7].

L'une des interprétations économiques possibles des problèmes de la théorie de la fiabilité est la suivante : supposons que la fiabilité du système soit caractérisée par la fonctionnelle $\Phi [x(t), T]$, où T est le temps désigné pour son utilisation, et $w \{\Phi [x(t), T]\}$ la perte au cours du temps T. Si le coût de la réparation de chaque panne est égal à c et si le nombre de pannes au cours du temps T est égal à $N(T)$, les dépenses globales liées à l'exploitation du système au cours du temps T sont en moyenne égales à

$$Mw \{\Phi [x(t), T]\} + cMN(T). \qquad (2.1.2)$$

Lors de l'établissement de projet et de l'exploitation on peut en certains cas partir de l'exigence que la somme des dépenses (2.1.2) prenne une valeur minimale.

D'autres positions du problème de détermination de l'efficacité économique optimale sont également possibles. Il est indéniable que la combinaison rationnelle d'une fiabilité élevée et d'une grande efficacité économique présente un intérêt économique certain et que les questions qui s'y rapportent méritent un développement multiforme.

§ 2.2. Fiabilité d'un élément fonctionnant jusqu'à la première panne

Principales caractéristiques de fiabilité. Nous allons considérer dans ce paragraphe un élément fonctionnant jusqu'à la première panne et étudier les diverses caractéristiques de fiabilité des éléments de ce genre.

Par « *élément* » nous allons comprendre non seulement la partie non décomposable du système, mais aussi *tout dispositif, dont on étudie la fiabilité indépendamment de la fiabilité de ses parties composantes.*

Supposons que le fonctionnement de l'élément débute à l'instant $t = 0$ et qu'à l'instant $t = \tau$ ait lieu une panne. Nous dirons alors que τ est la durée de vie de l'élément *. Supposons que τ est une variable aléatoire dont la loi de distribution est

$$Q(t) = \mathrm{P}\{\tau < t\}. \tag{2.2.1}$$

La fonction $Q(t)$ est la probabilité pour qu'un élément tombe en panne avant l'instant t. Nous supposerons que la fonction $Q(t)$ est continue et que la densité de probabilité de la panne

$$q(t) = Q'(t)$$

existe et est continue. Ces conditions sont commodes pour la suite de notre exposé, et en outre, elles sont naturelles pour la théorie de la fiabilité.

Ainsi, par exemple, la discontinuité de la fonction $Q(t)$ signifie qu'à un certain moment du temps, fixé à l'avance, l'élément peut tomber en panne avec une probabilité finie, ce qui est peu vraisemblable en pratique. La seule exception est précisément l'instant initial $t = 0$, car certains éléments tombent en panne à l'instant de mise en service. Des pannes de ce genre sont dues à des défauts cachés mais sérieux de l'élément ou des mauvaises conditions de stockage et de transport de cet élément. Toutefois la panne se produisant à l'instant de branchement est decelée immédiatement et

* Si l'élément fonctionne par intermittence et si au cours de ces arrêts de travail ses paramètres ne varient pas de sorte qu'il ne peut pas tomber en panne dans cette période, toute la suite de notre exposé sera valable également pour de tels éléments, à condition d'entendre par τ non pas le temps au sens du calendrier, mais le temps propre de fonctionnement.

l'élément défectueux est remplacé par un élément neuf. C'est pourquoi nous pouvons ne pas prendre en considération des pannes de ce genre, et alors la fonction $Q(t)$ sera continue pour $t = 0$ également.

Notons encore que l'hypothèse initiale suivant laquelle τ est une variable aléatoire est une supposition sérieuse, qui en pratique n'est pas toujours valable. L'élément considéré est un représentant d'un grand groupe d'éléments du même type. Ce groupe doit, dans un certain sens, être homogène. D'autre part, les conditions d'exploitation doivent aussi être homogènes tant par rapport aux éléments que par rapport au temps. Par exemple, des éléments identiques réalisant des fonctions différentes peuvent avoir une fiabilité différente.

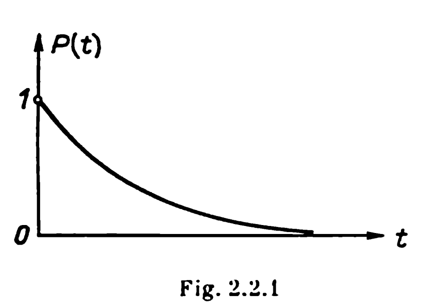


Fig. 2.2.1

Nous avons ainsi supposé que la durée de vie de l'élément τ est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est $Q(t)$. Cette fonction détermine entièrement la fiabilité de notre élément.

On utilise également et même aussi fréquemment une autre fonction

$$P(t) = 1 - Q(t) = \mathbf{P}\{\tau > t\}. \tag{2.2.2}$$

c'est-à-dire la probabilité du fonctionnement sans défaillance de l'élément au cours du temps t. Nous donnerons à cette fonction l'appellation la plus courante de *fonction de fiabilité*.

L'allure approximative de la fonction de fiabilité est montrée sur la figure 2.2.1. Cette fonction est monotone décroissante: $\mathbf{P}(0) = 1$ et $P(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.

On peut trouver la forme approchée de la fonction $P(t)$ de l'expérience. Supposons tout d'abord que nous devons trouver la valeur de cette fonction pour $t = t_0$, c'est-à-dire la probabilité du fonctionnement sans défaillance pendant le temps t_0. Nous soumettons à l'essai N éléments identiques dans les mêmes conditions au cours du temps t_0. Supposons qu'à l'instant où les essais se terminent n éléments fonctionnent encore. Notre expérience peut être considérée comme une série de N épreuves indépendantes, au cours de chacune desquelles a lieu l'un des deux événements: ou bien l'élément tombe en panne, ou bien il ne tombe pas en panne. Dans ce cas $\frac{n}{N}$ désigne la fréquence du premier de ces événements, et d'après le théorème de Borel [11] nous pouvons affirmer avec une probabilité égale à l'unité (convergence presque sûre) que

$$\frac{n}{N} \to P(t_0) \text{ quand } N \to \infty.$$

Cela signifie pratiquement que, quand N est grand, on a avec une probabilité proche de l'unité l'égalité approchée

$$\frac{n}{N} \approx P(t_0). \tag{2.2.3}$$

Si nous voulons trouver la fonction $P(t)$ pour toutes les valeurs de $t \leqslant t_0$, nous devons effectuer les essais durant le temps t_0 et noter les instants d'apparition des pannes. Connaissant ces instants on détermine aisément la fonction $n(t)$, égale au nombre d'éléments qui ne sont pas encore tombés en panne vers l'instant t. A l'instant initial cette fonction est égale à $n(0) = N$ et à l'instant où se produit une panne elle diminue d'une unité. Le rapport $P_N(t) = \frac{n(t)}{N}$ est appelé *fonction empirique de fiabilité* (fig. 2.2.2). Avec la croissance de N cette fonction s'approche uniformément de la fonction $P(t)$, et pour les grandes valeurs de N on a l'égalité approchée

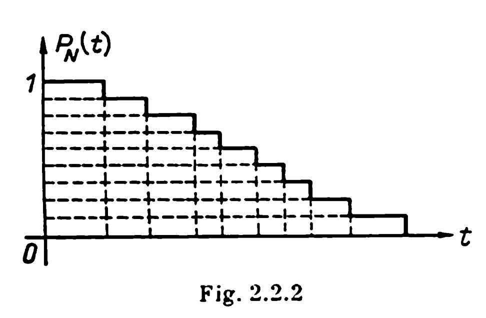


Fig. 2.2.2

$$P_N(t) = \frac{n(t)}{N} \approx P(t). \tag{2.2.4}$$

Il convient de noter que, si les essais ont été conduits au cours d'un certain intervalle de temps, nous ne pouvons rien dire au sujet de cette fonction en dehors de cet intervalle de temps. En d'autres termes, on ne peut dans le cas général extrapoler la fonction $P(t)$. Il est vrai que très souvent nous connaissons, à partir de considérations physiques ou de l'expérience antérieure, la forme analytique de la fonction $P(t)$, elle est exprimée par une certaine formule contenant un ou plusieurs paramètres inconnus. On peut alors, en réalisant des essais, déterminer ces paramètres, et à partir d'eux, la fonction elle-même sur un intervalle infini du temps.

Nous dirons plus loin comment cela peut être réalisé. Notons encore que, pour un même degré d'exactitude, pour estimer la fonction $P(t)$ il faut un nombre beaucoup plus grand d'épreuves que pour estimer la probabilité $P(t_0)$. C'est pourquoi dans de nombreux cas la fiabilité est caractérisée non pas par la fonction $P(t)$, mais par quelques caractéristiques numériques. La plus importante d'entre elles est la valeur moyenne du temps de fonctionnement sans défaillance que l'on définit comme l'espérance mathématique

de la variable aléatoire τ

$$T_0 = \mathbf{M}\tau = \int_0^\infty tq(t)\,dt.$$

Il est utile de transformer cette intégrale en intégrant par parties

$$T_0 = \int_0^\infty tq(t)\,dt = -tP(t)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty P(t)\,dt$$

ou

$$T_0 = \int_0^\infty P(t)\,dt. \tag{2.2.5}$$

(Nous supposons que les intégrales écrites convergent, et dans ce qui suit nous ne le rappellerons plus.) On voit de la dernière formule que le temps moyen T_0 s'exprime géométriquement par l'aire limitée par les axes des coordonnées et la courbe $P(t)$.

Le temps moyen peut être trouvé d'après les résultats des essais. Pour cela il faut que les essais des éléments durent jusqu'à ce que le dernier d'entre eux tombe en panne. Soient $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ les durées de vie de ces éléments. Considérons la durée moyenne empirique de vie

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_1 + \ldots + \tau_N}{N}.$$

En vertu de la loi forte des grands nombres [11], on a avec une probabilité égale à l'unité (convergence presque sûre)

$$\bar{\tau} \to T_0 \text{ quand } N \to \infty.$$

C'est pourquoi pour une grande valeur de N on a l'égalité approchée

$$\bar{\tau} \approx T_0. \tag{2.2.6}$$

Malheureusement, les derniers essais ne sont pas réalisables pratiquement, car la durée des essais est limitée et nous ne pouvons attendre que tous les éléments tombent en panne. Supposons, par exemple, qu'au cours du temps t lors des essais de N éléments n sont tombés en panne aux instants $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$. La seule chose que l'on puisse alors réaliser dans ce cas, c'est minorer le temps moyen. En effet

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_1 + \ldots + \tau_n + \tau_{n+1} + \ldots + \tau_N}{N} > \frac{\tau_1 + \ldots + \tau_n + (N-n)\,t}{N}$$

et par conséquent pour un grand N

$$T_0 > \frac{\tau_1 + \ldots + \tau_n + (N-n)\,t}{N}. \tag{2.2.7}$$

Bien entendu, utiliser cette estimation n'a de sens que si n est proche de N.

Une autre caractéristique de la fiabilité est la variance de la durée de vie

$$\mathrm{D}\tau = \mathrm{M}(\tau - T_0)^2 = \mathrm{M}\tau^2 - (\mathrm{M}\tau)^2 = \int_0^\infty t^2 q(t)\,dt - T_0^2 =$$
$$= 2\int_0^\infty tP(t)\,dt - T_0^2. \qquad (2.2.8)$$

La variance peut être trouvée expérimentalement. Si l'on soumet

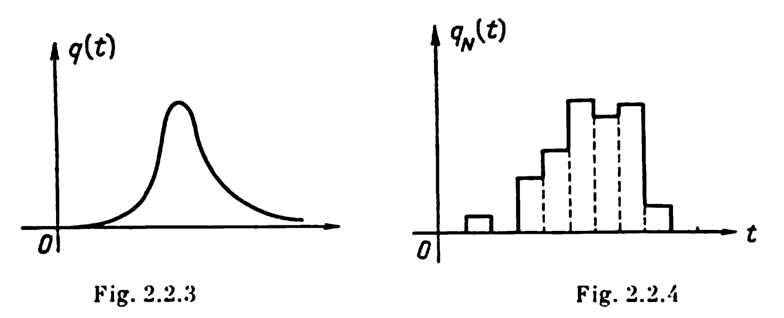


Fig. 2.2.3 Fig. 2.2.4

à l'essai N éléments dont les durées de vie sont $\tau_1, \ldots, \tau_N$, alors pour une grande valeur de N

$$\mathrm{D}\tau \approx S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (\tau_i - \bar{\tau})^2}{N-1}, \qquad (2.2.9)$$

où

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \tau_i}{N}.$$

La grandeur $\sigma_\sigma = \sqrt{\mathrm{D}\tau}$ nous donne l'écart quadratique moyen du temps aléatoire τ du temps moyen T_0. Il semble qu'il est rationnel d'utiliser la variance en tant que caractéristique de fiabilité quand $\sigma < T_0$, c'est-à-dire quand le temps τ possède une dispersion relativement faible. Dans ce cas, le graphique de la densité $q(t)$, qui en règle générale est unimodal, donne une représentation très claire de la fiabilité (fig. 2.2.3). La fonction $q(t)$ peut également être trouvée expérimentalement. Pour cela nous divisons tout l'intervalle du temps (fig. 2.2.4) en intervalles de longueur h et nous enregistrons le nombre de pannes tombant dans chaque intervalle. Soit N le nombre d'éléments soumis à l'essai et n_k le nombre de pannes

s'étant produites dans l'intervalle $[(k-1)h, kh]$, $k = 1, 2, \ldots$ La fonction empirique de densité, ou l'histogramme (voir pour plus de détails le chapitre 3), s'exprime alors par la formule

$$q_N(t) = \frac{n_k}{Nh}, \tag{2.2.10}$$

si $(k-1)h \leqslant t < kh$. Si le nombre d'essais N est très élevé et si h est suffisamment petit, on a alors

$$q_N(t) \approx q(t).$$

Passons maintenant à l'étude de la caractéristique de fiabilité la plus populaire que l'on appelle le plus souvent le risque de panne.

Considérons tout d'abord le problème suivant. *Supposons que l'élément ait fonctionné sans défaillance jusqu'à l'instant t. Quelle est la probabilité pour qu'il ne tombe pas en panne dans l'intervalle* (t, t_1) ? Désignons cette probabilité par $P(t, t_1)$. Soit A l'événement signifiant le fonctionnement sans défaillance de l'élément dans l'intervalle de temps $(0, t)$ et B l'événement désignant le fonctionnement sans défaillance dans l'intervalle (t, t_1). La probabilité cherchée est alors la probabilité conditionnelle

$$P(t, t_1) = \mathbf{P}\{A \mid B\} = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)}.$$

L'événement AB signifie le fonctionnement sans défaillance de l'élément dans l'intervalle $(0, t_1)$. C'est pourquoi

$$P(t, t_1) = \frac{P(t_1)}{P(t)}. \tag{2.2.11}$$

La probabilité de panne dans l'intervalle (t, t_1) s'exprimera évidemment ainsi :

$$Q(t, t_1) = 1 - P(t, t_1) = \frac{P(t) - P(t_1)}{P(t)}. \tag{2.2.12}$$

Posons maintenant $t_1 = t + \Delta t$ et faisons tendre Δt vers zéro. Alors

$$Q(t, t+\Delta t) = \frac{P(t) - P(t+\Delta t)}{P(t)} = -\frac{P'(t)}{P(t)}\Delta t + o(\Delta t).$$

Introduisons la notation

$$\lambda(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)}. \tag{2.2.13}$$

Quand Δt est petit on a

$$Q(t, t+\Delta t) \approx \lambda(t)\,\Delta t. \tag{2.2.14}$$

On voit de cette formule que la grandeur $\lambda(t)$ est une caractéristique locale de fiabilité déterminant la fiabilité de l'élément à chaque instant de temps. En utilisant le « langage d'ingénieur », on peut

dire que $\lambda(t)$ est la probabilité pour que l'élément ayant fonctionné sans défaillance jusqu'à l'instant t tombe en panne au cours de l'unité suivante de temps (si, bien entendu, cette unité est petite). Dans le langage de la théorie des probabilités $\lambda(t)$ est la densité de probabilité conditionnelle de panne à l'instant t, sachant que jusqu'à cet instant l'élément a fonctionné sans défaillance.

La fonction $\lambda(t)$ définie par la formule (2.2.13) est appelée *risque de panne.*

On peut aisément résoudre l'équation (2.2.13) par rapport à la fonction de fiabilité $P(t)$. Nous obtenons alors

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)\,dt}. \tag{2.2.15}$$

Il découle de cette importante formule que la probabilité de fonctionnement sans défaillance durant l'intervalle de temps (t_1, t_2) s'exprime ainsi

$$P(t_1, t_2) = e^{-\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)\,dt}. \tag{2.2.16}$$

La fonction $\lambda(t)$ peut être déterminée d'après les résultats des essais. Nous soumettons encore à l'essai N éléments et nous observons leurs pannes. Soit $n(t)$ le nombre d'éléments fonctionnant encore sans défaillance vers l'instant t.

On a alors pour un Δt suffisamment petit et un N suffisamment grand

$$\lambda(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)} \approx \frac{P(t)-P(t+\Delta t)}{\Delta t\, P(t)} \approx \frac{\dfrac{n(t)-n(t+\Delta t)}{N}}{\Delta t\,\dfrac{n(t)}{N}} = \frac{\Delta n}{\Delta t\, n(t)},$$

où Δn est le nombre de pannes durant l'intervalle $(t, t+\Delta t)$.

Ainsi, si Δt est suffisamment petit et Δn grand, on a

$$\lambda(t) \approx \frac{\Delta n}{\Delta t\, n(t)}. \tag{2.2.17}$$

Cela signifie que statistiquement le risque de panne est égal au nombre de pannes se produisant au cours d'une unité de temps rapporté au nombre d'éléments fonctionnant encore sans défaillance. A l'aide de cette interprétation statistique nous montrerons sur un exemple que $\lambda(t)$ est véritablement une caractéristique locale de fiabilité. Supposons que l'on soumette à l'essai 1000 éléments identiques et qu'au cours de la première heure 50 éléments tombent en panne, qu'après 30 heures 60 éléments fonctionnent encore, et qu'au cours de l'heure suivante 20 autres éléments tombent en panne. On peut se demander quand l'élément est plus sûr, au début ou

après 30 heures de fonctionnement ? Il est clair que les chiffres absolus 50 et 20 ne peuvent pas servir pour comparer la fiabilité. En effet, au cours de la première heure 50 éléments sur mille tombent en panne, autrement dit un élément sur vingt, et après 30 heures de fonctionnement au cours d'une heure 20 éléments sur 60 tombent en panne, autrement dit un sur trois. Nous voyons ainsi que la fiabilité de l'élément est caractérisée à chaque instant par le rapport du nombre de pannes au cours d'une unité de temps au nombre global d'éléments fonctionnant sans défaillance à l'instant donné. Mais c'est précisément le risque de panne.

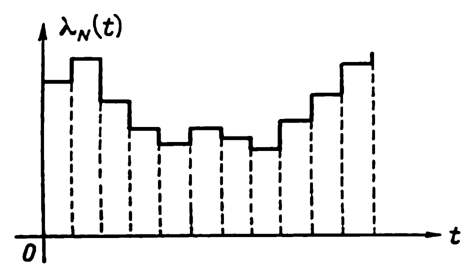


Fig. 2.2.5

En pratique, lors de la détermination du risque de panne il est commode de procéder de la même façon que pour la construction de l'histogramme de $q(t)$. Nous partageons ici tout l'intervalle de temps en intervalles de durée h et nous trouvons le nombre de pannes tombant dans l'intervalle $[(k-1)h, kh]$, $k = 1, 2, \ldots$ Le risque empirique de panne est alors

$$\lambda_N(t) = \frac{n_k}{(N - n_1 - \ldots - n_{k-1})h}$$

quand $(k-1)h \leqslant t < kh$.

Nous obtenons une courbe en escalier représentant approximativement le graphique de risque de panne (fig. 2.2.5).

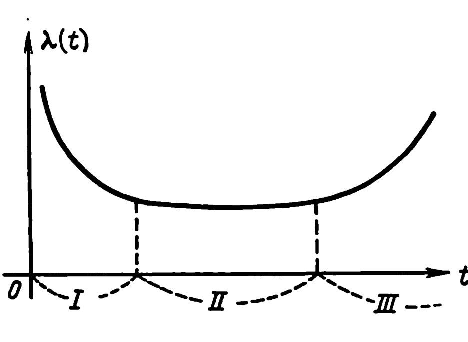


Fig. 2.2.6

Loi exponentielle. De nombreuses données expérimentales montrent que pour de nombreux éléments la fonction $\lambda(t)$ présente l'allure caractéristique de la courbe de la figure 2.2.6. On voit de ce graphique que tout l'intervalle de temps peut être divisé en trois segments. Sur le premier d'entre eux la fonction $\lambda(t)$ possède des valeurs élevées. Cela est dû au fait que dans un grand lot d'éléments il y a toujours des éléments possédant des défauts cachés, qui tombent rapidement en panne après la mise en marche. C'est pourquoi la première période est souvent appelée période *de rodage* ou période « *de brûlage* » des éléments défectueux.

La seconde période est appelée période *de fonctionnement normal.* Elle est caractérisée par une valeur constante (ou approximativement constante) du risque de panne.

La dernière période est la période *de vieillissement*. Les phénomènes physico-chimiques irréversibles provoquent la dégradation de la qualité de l'élément, l'élément « vieillit ». Dans cette période le risque de panne augmente.

Ce tableau de la variation du risque de panne n'est, naturellement, pas universel. Il existe des éléments pour lesquels la période de rodage est nulle (par exemple, si un contrôle d'acceptation rigoureux élimine tous les éléments défectueux), et d'autres, qui ne vieillissent pratiquement pas. Toutefois, pour la grande majorité des éléments il existe, en règle générale, une longue période pour laquelle le risque de panne $\lambda(t)$ est pratiquement constant. On peut négliger la période de rodage (si elle existe), en estimant que le fonctionnement de l'élément débute quand cette période se termine. En effet, l'élément et le système auquel il appartient sont soumis habituellement à un entraînement préliminaire, subissent des essais de vérification et ce n'est qu'après cela que commence leur exploitation. Par ailleurs, la durée de service de nombreux éléments se termine avant que ne commence le vieillissement notable de ces éléments.

Les considérations que nous avons rapportées montrent que pour une large classe d'éléments nous pouvons adopter que

$$\lambda(t) = \lambda = \text{const.}$$

Arrêtons-nous sur un cas important. Il découle de la formule (2.2.15) que pour un risque constant de panne la fonction de fiabilité est de la forme

$$P(t) = e^{-\lambda t}. \tag{2.2.18}$$

Cette loi de fiabilité est appelée *exponentielle*. La probabilité de panne au cours du temps t est alors

$$Q(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

et la densité de probabilité de panne

$$q(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

La durée moyenne de vie de l'élément pour ce cas est

$$T_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}. \tag{2.2.19}$$

Ainsi, pour la loi exponentielle le risque de panne est inversement proportionnel à la durée de vie moyenne. C'est pourquoi la fonction de fiabilité peut s'écrire ainsi

$$P(t) = e^{-\frac{t}{T_0}}.$$

Il faut noter que T_0 peut en fait ne pas être la durée de vie moyenne. En effet, le risque de panne, qui est constant sur l'intervalle considéré de temps, peut ne pas être constant en dehors de cet intervalle, car, en définitive, tout élément commence à « vieillir ». C'est pourquoi il est plus juste de dire que T_0 est la durée de vie moyenne d'un élément dont le risque de panne est constant dans tout l'intervalle infini de temps, et qui, sur l'intervalle de temps considéré, coïncide avec le risque de panne de notre élément.

Souvent le temps t qui nous intéresse est sensiblement inférieur au temps moyen

$$t \ll T_0 \text{ ou } \frac{t}{T_0} \ll 1.$$

On peut alors utiliser des formules approchées simples

$$P(t) \approx 1 - \frac{t}{T_0}, \quad Q(t) \approx \frac{t}{T_0}. \tag{2.2.20}$$

L'erreur commise dans ces dernières n'excède pas $\frac{1}{2}\left(\frac{t}{T_0}\right)^2$. Notons encore que ces formules approchées donnent pour nos probabilités une majoration dans le sens, qui nous intéresse, car pour tout t on a les inégalités $P(t) \geqslant 1 - \frac{t}{T_0}$ et $Q(t) \leqslant \frac{t}{T_0}$. Elles découlent de la convexité de la fonction e^{-x} dont la tangente $y_1 = 1 - x$ est située sous le graphique lui-même $y_2 = e^{-x}$, autrement dit $y_1 \leqslant y_2$ ou $1 - x \leqslant e^{-x}$.

La loi exponentielle est très répandue en théorie de fiabilité. Cela s'explique par le fait que la loi exponentielle, fort naturelle du point de vue physique, est simple et d'une application commode. Presque tous les problèmes qui se posent en théorie de la fiabilité sont beaucoup plus simples pour la loi exponentielle que pour des lois arbitraires. Presque toutes les formules de la théorie de la fiabilité se simplifient notablement dans le cas d'une loi exponentielle.

La raison principale en est que la loi exponentielle de fiabilité possède l'importante propriété suivante: *pour la loi exponentielle la probabilité de fonctionnement sans défaillance dans l'intervalle* $(t, t + \tau)$ *ne dépend pas du temps antérieur de fonctionnement* t, *mais dépend uniquement de la longueur de l'intervalle* τ. En d'autres termes, si l'on sait qu'à l'instant donné t l'élément est en bon état, son comportement futur ne dépend pas du passé.

En effet, la probabilité de fonctionnement sans défaillance dans l'intervalle $(t, t + \tau)$ est, en vertu de la formule (2.2.11), égale à

$$P(t, t + \tau) = \frac{P(t + \tau)}{P(t)} = \frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \tau}.$$

Montrons que cette propriété est caractéristique, c'est-à-dire que si elle est vérifiée pour une certaine loi $P(t)$, cette loi sera nécessairement une loi exponentielle.

Supposons que le rapport $\frac{P(t+\tau)}{P(t)}$ ne dépend pas de t. Alors $\frac{P(t+\tau)}{P(t)} = \varphi(\tau)$, mais $P(0) = 1$ quand $t = 0$, c'est pourquoi

$$P(t+\tau) = P(t)\,P(\tau) \tag{2.2.21}$$

pour tous $t \geqslant 0$ et $\tau \geqslant 0$.

Nous obtenons alors par récurrence

$$P(t_1+t_2+\ldots+t_n) = P(t_1)\,P(t_2)\ldots P(t_n).$$

Soit

$$P(1) = q, \qquad 0 \leqslant q \leqslant 1.$$

Posant $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = \frac{1}{n}$, nous obtenons

$$P(1) = q = \left[P\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \text{ ou } P\left(\frac{1}{n}\right) = q^{1/n}.$$

Posant maintenant $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = \frac{1}{m}$, nous parvenons à la formule

$$P\left(\frac{n}{m}\right) = q^{n/m}.$$

Supposons que $t \geqslant 0$ soit un nombre quelconque. Alors pour tout entier $m > 0$ il existe un seul $n > 0$ tel que $\frac{n-1}{m} \leqslant t \leqslant \frac{n}{m}$. Comme la fonction $P(t)$ est monotone non croissante, on a

$$P\left(\frac{n}{m}\right) \leqslant P(t) \leqslant P\left(\frac{n-1}{m}\right)$$

ou

$$q^{n/m} \leqslant P(t) \leqslant q^{\frac{n-1}{m}}.$$

Quand $m \to \infty$, les fractions $\frac{n}{m}$ et $\frac{n-1}{m} \to t$ et, passant à la limite, nous obtenons

$$P(t) = q^t.$$

Si $q = 0$, alors $P(t) = 0$ pour tout $t > 0$, autrement dit l'élément tombe en panne à l'instant de mise en marche; si $q = 1$, alors $P(t) \equiv 1$, autrement dit l'élément est absolument sûr. Rejetant ces cas extrêmes peu importants, nous pouvons écrire la constante q sous la forme

$$q = e^{-\lambda}, \text{ où } \lambda > 0,$$

et alors en définitive

$$P(t) = e^{-\lambda t}.$$

En certains cas, connaissant la nature des pannes et le caractère du fonctionnement de l'élément, nous pouvons montrer directement que la propriété considérée plus haut est vérifiée, d'où il découle que la loi de fiabilité est exponentielle.

Considérons deux exemples.

1. Supposons que dans un vaisseau cosmique une panne ne puisse se produire qu'en cas de heurt avec une grosse météorite. Si l'on suppose que la distribution des météorites dans l'espace et dans le temps est uniforme, il sera clair que la probabilité pour qu'une météorite heurte le vaisseau au cours d'un intervalle donné de temps ne dépend pas du nombre de heurts dans le passé. Par conséquent, dans ce cas la loi de fiabilité est exponentielle.

2. Supposons qu'un élément appartenant à un certain système ne puisse tomber en panne que par suite de la rupture d'une soudure. Supposons encore qu'au cours de son fonctionnement le système vibre et que les forces d'induction qui s'y manifestent alors constituent l'unique cause de la rupture éventuelle de la soudure. Soit F_0 la force minimale pour laquelle a lieu la rupture.

La variation dans le temps des forces d'inertie agissant sur la soudure est un processus aléatoire stationnaire variant rapidement avec le temps. La dépendance entre deux amplitudes voisines de ce processus disparaît rapidement avec l'augmentation de la distance. C'est pourquoi la probabilité pour que dans l'intervalle donné $(t, t + \tau)$ l'amplitude du processus F soit inférieure à la valeur critique F_0 ne dépend pratiquement pas du déroulement de ce processus avant l'instant t. Par conséquent, dans ce cas également la loi de fiabilité est exponentielle.

Autres lois de fiabilité. Ces derniers temps on critique de plus en plus la loi exponentielle. Il est vrai que cette loi est fréquemment utilisée sans une analyse critique préalable, et que le seul argument plaidant en faveur de l'adoption de cette loi consiste en ce que le problème posé se résout plus facilement pour cette loi, et que sans cette hypothèse le problème « n'est pas résoluble ». Il semble que l'applicabilité de la loi exponentielle dépend principalement du caractère des pannes de l'élément. Les pannes subites, présentant un caractère aléatoire, sont habituellement assez bien décrites par la loi exponentielle ; au contraire, les pannes résultant de l'usure, provenant des modifications physico-chimiques irréversibles des paramètres physiques de l'élément n'obéissent pas à la loi exponentielle. Ces pannes, dites *graduelles*, sont souvent assez bien décrites par la loi normale.

Considérons un modèle général qui conduit à une loi normale de fiabilité.

Supposons que la fiabilité de l'élément soit déterminée par un paramètre physique α. Supposons encore que la valeur initiale α_0 de ce paramètre soit une variable aléatoire normale de faible variance, c'est la dispersion d'exécution qui a été conférée à l'élément au cours de sa fabrication. Supposons aussi qu'au cours du fonctionnement de l'élément le paramètre varie suivant une loi déterminée $\alpha = f(t, \alpha_0)$ et, pour plus de simplicité, que la fonction $f(t, \alpha_0)$ soit monotone, etc. Par hypothèse, une panne se produit quand la valeur du paramètre dépasse un certain seuil critique α_1. Cela signifie que l'instant de la panne $t = \tau$ est déterminé de l'équation

$$f(\tau, \alpha_0) \equiv \alpha_1,$$

ou

$$\tau = \varphi(\alpha_0, \alpha_1),$$

φ étant la fonction inverse de f d'après le premier argument. Comme α_0 possède une faible variance, nous pouvons, en développant la fonction φ d'après la formule de Taylor au point $a = \mathrm{M}\alpha_0$ et en négligeant les termes du second ordre, obtenir

$$\tau \approx \varphi(a, \alpha_1) + \varphi_a'(a, \alpha_1)(\alpha_0 - a).$$

Mais si α_0 est une variable aléatoire normale, l'instant τ en tant que fonction linéaire de α_0 est aussi distribué suivant une loi normale (fig. 2.2.7).

Pour la loi normale de fiabilité la fonction de fiabilité est de la forme

$$P(t) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\frac{t-T_0}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\frac{T_0}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx},$$

et comme habituellement $\sigma \ll T_0$, on peut écrire cette formule plus simplement :

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{t-T_0}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx. \qquad (2.2.22)$$

T_0 désigne ici la durée moyenne de vie et $\sigma^2 = \mathrm{D}\tau$.

On peut montrer que le risque de panne $\lambda(t)$ a la forme suivante pour la loi normale (fig. 2.2.8) : elle est monotone croissante et après T_0 s'approche de l'asymptote $y = \frac{t-T_0}{\sigma}$.

Par ailleurs, pour des grandes valeurs de y le risque de panne n'est plus une caractéristique essentielle.

Dans un élément réel il peut souvent se manifester les deux types de pannes. Il peut être sujet, d'une part, à une panne subite, mais aussi parallèlement il « vieillit », ce qui conduit graduellement à une panne, si jusque-là une panne subite n'a pas eu lieu. On peut

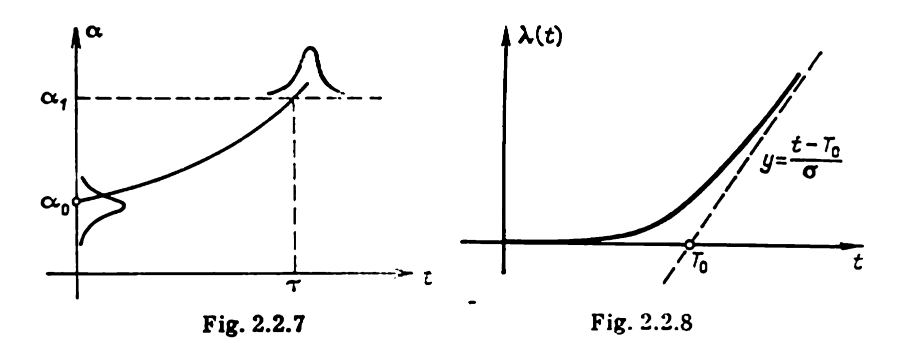


Fig. 2.2.7 Fig. 2.2.8

donc considérer l'élément comme formé de deux parties, dont l'une n'est sujette qu'aux pannes subites et l'autre qu'aux pannes graduelles. L'élément fonctionne jusqu'à la première panne. Si $P_1(t)$ est la probabilité pour qu'une panne subite n'ait pas lieu au cours du temps t et $P_2(t)$ la probabilité pour qu'au cours de ce même temps une panne graduelle ne se produise, nous obtenons, en supposant que ces deux genres de pannes se manifestent indépendamment l'un de l'autre, que la fonction de fiabilité $P(t)$ de l'élément est égale à

$$P(t)=P_1(t)\,P_2(t)=e^{-\lambda t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{t-T_0}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx. \qquad (2.2.23)$$

Calculons pour ce cas la durée moyenne de vie de l'élément. en supposant que $\sigma \ll T_0$ et que T_0 et $\frac{1}{\lambda}$ sont d'un même ordre de grandeur. Nous avons

$$T_{\text{moy}}=\int\limits_0^{\infty} P(t)\,dt=\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{dt}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{t-T_0}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

Effectuons le changement de variables $\frac{t-T_0}{\sigma}=z$ et intégrons par

parties. Nous obtenons

$$T_{\text{moy}} = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda T_0}}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T_0}{\sigma}}^{\infty} e^{-\lambda\sigma z - \frac{z^2}{2}} dz \approx$$

$$\approx \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda T_0}}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda\sigma z - \frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\lambda} \left(1 - e^{-\lambda T_0 + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}\right);$$

et en définitive

$$T_{\text{moy}} = \frac{1}{\lambda} \left(1 - e^{-\lambda T_0 + \frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}\right). \tag{2.2.24}$$

On peut, bien entendu, trouver également la valeur exacte de T_{moy} en utilisant la table de la loi normale.

Considérons brièvement quelques autres lois de distribution, utilisées en théorie de la fiabilité.

Loi de Weibull. La fonction de probabilité est de la forme

$$P(t) = e^{-\lambda t^{\alpha}}. \tag{2.2.25}$$

La durée de moyenne vie de l'élément est

$$T_0 = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t^{\alpha}} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{2.2.26}$$

La variance de la durée de vie est

$$\mathbf{D}\tau = \sigma^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\lambda^{\frac{2}{\alpha}}}.$$

Le risque de panne est

$$\lambda(t) = \alpha\lambda t^{\alpha-1}.$$

Quand $\alpha > 1$, le risque de panne croît de façon monotone à partir de zéro ; quand $\alpha < 1$, le risque de panne décroît de façon monotone et n'est pas borné pour $t = 0$. La loi exponentielle est un cas particulier de la loi de Weibull pour $\alpha = 1$ (fig. 2.2.9).

Si $\lambda t^{\alpha} \ll 1$ on peut utiliser la formule approchée

$$P(t) \approx 1 - \lambda t^{\alpha}. \tag{2.2.27}$$

La raison principale pour laquelle la loi de Weibull est si largement utilisée en théorie de la fiabilité est qu'en généralisant la loi exponentielle elle contient un paramètre complémentaire α. En choisissant de façon adéquate λ et α, nous pouvons obtenir une meilleure con-

cordance avec les données expérimentales par rapport à la loi exponentielle, qui ne dépend que d'un paramètre unique λ. Ainsi, pour l'élément chez lequel on décèle souvent des défauts cachés, mais qui ne « vieillit » pas, le risque de panne est très élevé au début, puis décroît rapidement. La fonction de fiabilité d'un tel élément doit être bien approchée à l'aide de la loi de Weibull pour $\alpha < 1$. Au contraire, si on ne rencontre presque pas de défauts cachés chez cet élément, mais si par contre il « vieillit » vite, le risque de panne croît de façon monotone et la fonction de fiabilité doit être bien approchée par une loi de Weibull pour laquelle $\alpha > 1$ (cf. fig. 1.2.6).

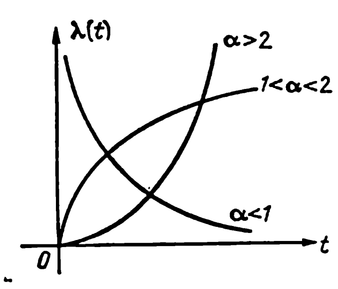


Fig. 2.2.9

La loi de Weibull apparaît du reste en certains cas de façon naturelle. Considérons un exemple caractéristique. Supposons que le dispositif dont nous étudions la fiabilité se compose de n éléments couplés, branchés en série. Dans chaque couple les deux éléments fonctionnent, et la panne du couple se produit quand les deux éléments tombent en panne. La panne du dispositif se produit quand un couple au moins tombe en panne. La fiabilité de chaque élément suit une loi exponentielle, le risque de panne de chaque élément du k-ième couple est égal à λ_k. On peut alors montrer que si la grandeur $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2} = \lambda$ est fixée (ce que l'on peut toujours réaliser par un choix adéquat de l'unité de temps) et

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^3 = 0,$$

alors la fonction de fiabilité du système tend vers la limite

$$\lim_{n\to\infty} P(t) = e^{-\lambda^2 t^2}.$$

Nous avons obtenu la distribution de Weibull avec $\alpha = 2$.

Distribution gamma. La fonction de fiabilité est de la forme

$$P(t) = \int_{\lambda t}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-x}\, dx. \tag{2.2.28}$$

La densité de probabilité des pannes est

$$q(t) = -P'(t) = \frac{\lambda^{\alpha} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t}.$$

La durée moyenne de vie est

$$T_0=\int_0^\infty \frac{\lambda^\alpha t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t}\, dt=\frac{\alpha}{\lambda},$$

la variance est

$$D\tau=\sigma^2=\frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

Quand $\alpha = \frac{n}{2}$ et $\lambda = \frac{1}{2}$ nous obtenons la distribution du χ^2, pour $\alpha = 1$ la loi exponentielle.

La distribution gamma peut avantageusement être utilisée pour approcher les lois de fiabilité dont la densité $q(t)$ a une forme non symétrique unimodale.

Distribution lognormale. Pour elle la fonction de fiabilité est

$$P(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln \frac{t}{T_0}}{\sigma}}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx, \tag{2.2.29}$$

et la durée moyenne de vie

$$T_{\text{moy}}=T_0 e^{\frac{\sigma^2}{2}}.$$

Distribution de puissance. La fonction de fiabilité est

$$P(t)=\frac{1}{\left(1+\frac{t}{T_0}\right)^\alpha}. \tag{2.2.30}$$

La durée moyenne de vie pour $\alpha > 1$ est finie et égale à

$$T_{\text{moy}}=\frac{T_0}{\alpha-1}.$$

Ces deux distributions donnent dans certains cas une approximation assez bonne de la loi de fiabilité.

Nous allons considérer en conclusion deux approches générales de l'étude de la fiabilité de l'élément, qui permettent d'obtenir des estimations de la fiabilité et de formuler quelques conclusions qualitatives sur la fiabilité.

Eléments vieillissants. Nous dirons qu'un élément est vieillissant si son risque de panne n'est pas une fonction monotone décroissante, c'est-à-dire si pour tous $0 < t_1 < t_2$ on a

$$\lambda(t_1) \leqslant \lambda(t_2).$$

Cela signifie qu'avec le temps la fiabilité de l'élément ne peut qu-diminuer. Introduisons la notation

$$\Lambda(t)=\int_0^t \lambda(t)\,dt.$$

Il découle de nos suppositions que $\Lambda(t)$ a sa convexité dirigée vers le bas. La fonction de fiabilité s'exprime ainsi :

$$P(t)=e^{-\Lambda(t)}.$$

Considérons la durée moyenne de vie T_0 et cherchons sa majora tion

$$T_0=\int_0^\infty e^{-\Lambda(t)}\,dt=\int_0^\infty e^{-x}d\varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inverse de $\lambda(t)$. Intégrant par parties la dernière intégrale nous obtenons

$$T_0=\int_0^\infty \varphi(x)\,e^{-x}\,dx.$$

La fonction $\varphi(x)$ a sa convexité orientée vers le haut, de sorte que son graphique se trouve plus bas que la tangente. En particulier, pour tout x on a

$$\varphi(x)\leqslant\varphi(1)+\varphi'(1)(x-1).$$

Nous en tirons la majoration suivante pour la durée moyenne de vie

$$T_0<\varphi(1)\int_0^\infty e^{-x}\,dx+\varphi'(1)\int_0^\infty (x-1)\,e^{-x}\,dx=\varphi\ (1)$$

ou

$$T_0<\varphi(1),$$

ce qui est équivalent à l'inégalité

$$\lambda(T_0)<1.$$

La fonction $\lambda(t)$ a sa convexité orientée vers le bas, de sorte que son graphique est dans l'intervalle $(0,\ T_0)$ situé plus bas que la corde, autrement dit,

$$\lambda(t)<\frac{\lambda(T_0)}{T_0}t<\frac{t}{T_0}\qquad \text{pour}\ t<T_0.$$

Il découle de cette inégalité que la fonction de fiabilité est

$$P(t)>e^{-\frac{t}{T_0}}\ \text{pour}\ t<T_0. \tag{2.2.31}$$

Nous pouvons en tirer la conclusion suivante: *si nous utilisons pour estimer la fiabilité d'un élément vieillissant la loi exponentielle, en y portant le temps moyen réel, alors par cela même nous sous-estimons la fonction de fiabilité pour tous les instants t non supérieurs au temps moyen.* Notons qu'une minoration de la probabilité de fonctionnement sans défaillance est préférable à une majoration, car les prévisions de fiabilité réalisées d'après les probabilités sous-estimées auront une forte probabilité d'être réalisées. Nous verrons plus bas que pour les éléments vieillissants on peut écrire une série d'inégalités, semblables à l'inégalité (2.2.31). Notons encore que pour les éléments vieillissants on a

$$\mathbf{D}\tau < (\mathbf{M}\tau)^2 = T_0^2,$$

alors que pour la loi exponentielle la variance est égale au carré du temps moyen.

Fiabilité d'un lot non homogène. Représentons-nous tout d'abord que deux usines fabriquent des éléments d'un même type et que la première fournit à un client éventuel 100 p_1 % de son approvisionnement et la seconde 100 p_2 %, $(p_1 + p_2 = 1)$. Supposons que la fiabilité de chaque élément suive une loi exponentielle et que le risque de panne soit λ_1 pour les éléments fabriqués par la première usine et λ_2 pour ceux fabriqués par la seconde usine. Supposons enfin que la production des deux usines soit mélangée au hasard. On voit aisément que la fiabilité d'un élément pris au hasard est égale à

$$P(t) = p_1 e^{-\lambda_1 t} + p_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Si au lieu de deux usines on en prend un nombre arbitraire n, toutes autres conditions restant égales, on aura la fonction de fiabilité

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} p_k e^{-\lambda_k t}.$$

Nous pouvons enfin supposer que le risque de panne λ est une variable aléatoire, donnée sur un ensemble d'éléments. Soit $F(\lambda)$ la loi de distribution de la grandeur λ. Alors comme plus haut la fonction de fiabilité sera

$$P(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dF(\lambda). \qquad (2.2.32)$$

Pour comprendre quand un tel modèle peut être réalisé, revenons à l'exemple de la page 103, où nous avons parlé de la rupture d'une soudure. Le risque de panne λ dépend dans cet exemple de la force critique F_0, $\lambda = \lambda(F_0)$. Or, cette force est déterminée par la qualité de la soudure et varie d'un élément à l'autre, étant une variable aléatoire.

Démontrons maintenant que les éléments dont la fonction de fiabilité est déterminée par la formule (2.2.32) possèdent la propriété suivante: *le risque de panne de ces éléments décroît de façon monotone.* En vertu de (2.2.32) le risque de panne est

$$\lambda(t)=\frac{\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\,dF(\lambda)}{\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dF(\lambda)}.$$

Pour que la fonction $\lambda(t)$ soit monotone décroissante il suffit que

$$\lambda'(t)=\frac{\left[\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\,dF(\lambda)\right]^2-\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dF(\lambda)\int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda t}\,dF(\lambda)}{\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dF(\lambda)\right]^2}\leqslant 0.$$

Comme le dénominateur est positif, il suffit de démontrer que le numérateur est négatif. Considérons pour cela l'intégrale

$$0\leqslant\int_0^\infty (z-\lambda)^2 e^{-\lambda t}\,dF(\lambda)=Az^2-2Bz+C,$$

où

$$A=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dF(\lambda),\qquad B=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\,dF(\lambda),$$

$$C=\int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda t}\,dF(\lambda).$$

Le trinôme carré est non négatif pour tout z, c'est pourquoi son discriminant

$$B^2-AC\leqslant 0,$$

mais c'est précisément le numérateur de notre fraction. Notre affirmation est démontrée. On peut démontrer également que

$$\lim_{t\to\infty}\lambda(t)=\lambda_0,$$

où λ_0 est le plus petit point de croissance de la fonction $F(\lambda)$. (On appelle *point de croissance* de la fonction $F(\lambda)$ un point λ tel que $F(\lambda+\varepsilon)-F(\lambda-\varepsilon)>0$ pour tout $\varepsilon>0$.) Le modèle que nous avons considéré explique remarquablement le fait bien connu dans la pratique que de nombreux éléments deviennent au cours du temps

de plus en plus fiables. En effet, si l'élément a fonctionné sans défaillance jusqu'à l'instant t_0, sa fonction de fiabilité est

$$P(t_0, t_0+t)=\frac{P(t_0+t)}{P(t_0)}=e^{-\int\limits_{t_0}^{t_0+t}\lambda(x)\,dx}.$$

Mais alors il découle de la décroissance monotone de la fonction $\lambda(\tau)$ que pour tout t cette fonction croît avec la croissance de t_0, autrement dit la fiabilité de l'élément croît avec le temps.

§ 2.3. Fiabilité de l'élément renouvelé

Définition du processus de renouvellement. Dans le précédent paragraphe nous avons étudié le fonctionnement de l'élément jusqu'à la première panne. Nous supposerons maintenant qu'après la panne l'élément est renouvelé. Ce renouvellement peut présenter un caractère différent: l'élément peut soit être remplacé par un élément neuf identique au précédent, soit subir une réparation qui régénère entièrement ses propriétés initiales. Pour nous le procédé concret de renouvellement n'est pas important, et par la suite pour plus de simplicité nous estimerons qu'à l'instant de la panne l'élément est remplacé par un élément neuf. Supposons encore que le temps de renouvellement est négligeable devant la durée de vie de l'élément, de sorte que l'on peut estimer que le renouvellement a lieu instantanément. Supposons que l'élément commence à fonctionner à l'instant $t = 0$ et tombe en panne après avoir fonctionné un temps aléatoire τ_1. Il est alors immédiatement remplacé par un nouvel élément, qui, après avoir fonctionné pendant un temps τ_2, tombe en panne et est remplacé par un troisième élément. Ce processus se poursuit indéfiniment. Il est naturel de supposer que les durées de vie des éléments $\tau_1, \tau_2, \ldots$ sont indépendantes. Les temps aléatoires $\tau_1, \tau_2, \ldots$ possèdent une même fonction de répartition que nous désignerons $F(t)$:

$$F(t)=\mathbf{P}\{\tau_n<t\}.$$

Les instants des pannes (fig. 2.3.1) ou des renouvellements $t_1 = \tau_1$, $t_2 = \tau_1 + \tau_2, \ldots, t_n = \tau_1 + \ldots + \tau_n$ forment un flux aléatoire que nous appellerons *processus de renouvellement* [12].

Supposons encore que la durée moyenne de vie de l'élément et sa variance soient finies:

$$T_0=\mathbf{M}\tau_n=\int\limits_0^\infty [1-F(t)]\,dt,$$

$$\sigma^2=\mathbf{D}\tau_n=2\int\limits_0^\infty t\,[1-F(t)]\,dt-T_0^2. \qquad (2.3.1)$$

Supposons, enfin, que la densité de probabilité $f(x) = F'(x)$ existe et soit continue.

Principales caractéristiques du processus de renouvellement. Lors de l'étude d'un processus de renouvellement le rôle principal appartient à la variable aléatoire $\nu(\tau)$, égale au nombre de pannes s'étant produites au cours du temps t.

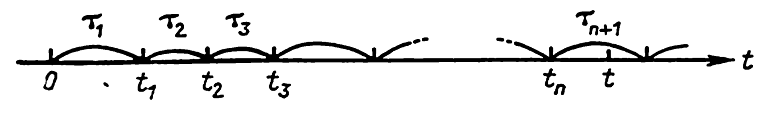


Fig. 2.3.1

La grandeur $\nu(t)$ est déterminée par la condition

$$t_{\nu(t)} < t \leqslant t_{\nu(t)+1}. \tag{2.3.2}$$

La grandeur $\nu(t)$ ne peut prendre que des valeurs entières non négatives. Trouvons la distribution de $\nu(t)$. Remarquons pour cela que

$$\mathbf{P}\{\nu(t) \geqslant n\} = \mathbf{P}\{t_n < t\} = \mathbf{P}\{\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n < t\} = F_n(t), \tag{2.3.3}$$

où les fonctions $F_n(t)$, les lois de distribution de t_n, sont déterminées par l'égalité

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-\tau)\,dF(\tau), \quad F_1(t) = F(t).$$

Il découle de l'égalité (2.3.3) évidente, mais très importante, que

$$P_n(t) = \mathbf{P}\{\nu(t) = n\} = F_n(t) - F_{n+1}(t). \tag{2.3.4}$$

En particulier,

$$P_0(t) = 1 - F(t).$$

Ces formules donnent la distribution cherchée de $\nu(t)$. Pour l'étude du processus de renouvellement, un rôle fondamental appartient à la fonction dite de renouvellement $H(t)$, qui est égale au nombre moyen de pannes s'étant produites avant l'instant t. Utilisant la formule (2.3.4) nous pouvons trouver aisément cette fonction:

$$H(t) = \mathbf{M}\nu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n[F_n(t) - F_{n+1}(t)] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nF_n(t) - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)F_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t),$$

ou

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \tag{2.3.5}$$

On peut montrer que la fonction $H(t)$ est toujours finie. La fonction $H(t)$ vérifie l'équation intégrale suivante [12]:

$$H(t)=F(t)+\int_0^t H(t-\tau)\,dF(\tau), \tag{2.3.6}$$

qu'il est commode d'utiliser lors de l'étude de certaines propriétés de $H(t)$. Le rôle important de $H(t)$ s'explique par le fait qu'elle permet d'exprimer toutes les caractéristiques essentielles du processus de renouvellement. Ainsi, la variance du nombre de pannes $\nu(t)$ est égale à

$$\mathrm{D}\nu(t)=2\int_0^t H(t-\tau)\,dH(\tau)H+(t)-H^2(t). \tag{2.3.7}$$

Le nombre moyen de pannes dans l'intervalle (t_1, t_2) est évidemment égal à $H(t_2)-H(t_1)$.

On considère souvent au lieu de la fonction $H(t)$ la caractéristique différentielle

$$h(t)=H'(t).$$

La fonction $h(t)$ est appelée *densité de renouvellement**. Elle est égale au nombre moyen de pannes, se produisant à l'instant t au cours d'une unité de temps à partir de l'instant t (si cette unité de temps est petite). Il découle de (2.3.5) que la densité de renouvellement s'exprime par la série

$$h(t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t), \text{ où } f_n(t)=F'_n(t). \tag{2.3.8}$$

On peut utiliser les grandeurs $P_n(t)$, $H(t)$ et $h(t)$ que nous avons considérées pour la résolution de certains problèmes de fiabilité. Supposons, par exemple, que l'on doive trouver le plus petit nombre d'éléments de réserve n, qui avec une probabilité non inférieure à $1-\alpha$ (α est un nombre petit) suffirait pour un temps t. Pour que n éléments de réserve suffisent pour un temps t, il faut que le nombre de pannes au cours de ce temps t ne dépasse pas n. Nous obtenons ainsi la condition permettant de déterminer n

$$\mathrm{P}\{\nu(t)\leqslant n\}\geqslant 1-\alpha \text{ ou } \mathrm{P}\{\nu(t)>n\}<\alpha.$$

Nous avons alors de la formule (2.3.3)

$$F_{n+1}(t)<\alpha. \tag{2.3.9}$$

Le plus petit n pour lequel cette inégalité est vérifiée nous donne précisément le nombre cherché d'éléments. Notons à ce propos que

* En théorie de la fiabilité la fonction $h(t)$ est appelée également *intensité des pannes*.

la convolution du n-ième ordre des fonctions $F(t)$ $F_n(t)$ ne peut être calculée sous forme finie que dans des cas très rares. Enumérons ces cas pour les distributions que l'on rencontre en théorie de fiabilité.

1. *Loi exponentielle*

$$F(t)=1-e^{-\lambda t}.$$

Dans ce cas le processus de renouvellement constituera un flux poissonien, et nos caractéristiques auront une forme simple

$$P_n(t)=\mathrm{P}\{\nu(t)=n\}=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},$$

$$H(t)=\lambda t, \qquad h(t)=\lambda. \tag{2.3.10}$$

Notons que parmi tous les processus de renouvellement seul le processus de Poisson est un processus stationnaire sans post-action.

2. *Loi normale.* Nous supposerons comme plus haut que $\sigma \ll T_0$. Alors

$$F_n(t)=\Phi\left(\frac{t-nT_0}{\sigma\sqrt{n}}\right), \quad \text{où } \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.$$

La fonction de renouvellement

$$H(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi\left(\frac{t-nT_0}{\sigma\sqrt{n}}\right) \tag{2.3.11}$$

peut être aisément calculée à l'aide des tables. La densité de renouvellement

$$h(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,\sigma}e^{-\frac{(t-nT_0)^2}{2\sigma^2 n}} \tag{2.3.12}$$

a une forme oscillatoire caractéristique (fig. 2.3.2).

3. *Distribution gamma.* La densité de probabilité est

$$f(t,\alpha)=\frac{\lambda^{\alpha}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda t}.$$

On montre aisément que

$$f_n(t,\alpha)=f(t,n\alpha)=\frac{\lambda^{n\alpha}t^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)}e^{-\lambda t}$$

et que, par conséquent, la densité de renouvellement s'exprime par la série

$$h(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^{n\alpha}t^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)}e^{-\lambda t}. \tag{2.3.13}$$

Quand $\alpha = m$ est un nombre entier, cette série est sommable

$$h(t) = \lambda \frac{1 + \varepsilon e^{\lambda t(\varepsilon - 1)} + \varepsilon^2 e^{\lambda t(\varepsilon^2 - 1)} + \ldots + \varepsilon^{m-1} e^{\lambda t(\varepsilon^{m-1} - 1)}}{m},$$

où

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{m} + i \sin \frac{2\pi}{m}.$$

Nous en tirons

$$H(t) = \frac{\lambda t + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} e^{\lambda t(\varepsilon - 1)} + \ldots + \frac{\varepsilon^{m-1}}{\varepsilon^{m-1} - 1} e^{\lambda t(\varepsilon^{m-1} - 1)}}{m}.$$

Pour les autres lois de distribution que l'on utilise en théorie de la fiabilité, la fonction $F_n(t)$ ne s'exprime pas sous une forme finie, ce qui, bien entendu, complique fortement les calculs.

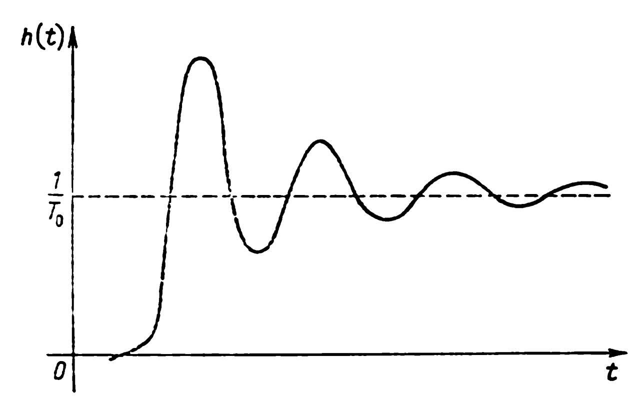


Fig. 2.3.2

Il est utile de disposer, outre les formules exactes, de certaines estimations simples pour la fonction de renouvellement $H(t)$. Citons quelques-unes d'entre elles. Il découle de l'inégalité

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \tau_k < \tau_1 + \ldots + \tau_n = t_n$$

que

$$F_n(t) = \mathbf{P}(t_n < t) \leqslant \mathbf{P}\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \tau_k < t\} = \\ = \mathbf{P}\{\tau_1 < t_1, \ \tau_2 < t, \ \ldots, \tau_n < t\},$$

ou

$$F_n(t) \leqslant F^n(t). \qquad (2.3.14)$$

Nous en tirons

$$H(t)=\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty} F^n(t)=\frac{F(t)}{1-F(t)}.$$

Prenant en considération l'inégalité évidente $H(t)\geqslant F(t)$, nous obtenons l'estimation cherchée

$$F(t)\leqslant H(t)\leqslant\frac{F(t)}{1-F(t)}. \tag{2.3.15}$$

Il en découle que sur l'intervalle initial de temps, où $F(t)\ll 1$, on a l'égalité approchée suivante

$$H(t)\approx F(t). \tag{2.3.16}$$

Prenant ensuite l'espérance mathématique des deux parties de l'inégalité

$$t\leqslant\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_{\nu(t)+1}$$

et appliquant l'identité de Wald [12], nous trouvons

$$t\leqslant T_0[H(t)+1],$$

d'où

$$H(t)\geqslant\frac{t}{T_0}-1.$$

D'autre part, pour les éléments vieillissants, pour lesquels le risque de panne $\lambda(t)=\frac{f(t)}{1-F(t)}$ est une fonction monotone croissante, on peut obtenir l'estimation

$$H(t)\leqslant\frac{t}{T_0}.$$

La fonction de renouvellement des éléments vieillissants vérifie ainsi pour tout instant t l'inégalité

$$\frac{t}{T_0}-1\leqslant H(t)\leqslant\frac{t}{T_0}. \tag{2.3.17}$$

Comportement asymptotique du processus de renouvellement. En pratique, c'est l'étude du processus de renouvellement pour des grandes valeurs du temps t qui présente le principal intérêt; nous sommes intéressés par le comportement du processus sur les intervalles, précédés par un grand nombre de pannes. C'est pourquoi, mathématiquement parlant, nous devons étudier le comportement asymptotique de notre processus et de ses caractéristiques quand $t\to\infty$.

Rapportons maintenant les principaux faits de la théorie du renouvellement, dont l'objet est principalement l'étude des propriétés asymptotiques du processus de renouvellement [12].

1. *Pour toute loi de distribution* $F(t)$ *on a*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{T_0}. \tag{2.3.18}$$

Cette affirmation possède une interprétation très simple: *pour un grand intervalle de temps le taux moyen de pannes est inversement proportionnel à la durée moyenne de vie de l'élément.*

2. **Théorème de Blackwell.** *Si le temps aléatoire* τ_i *suit une distribution continue, alors pour tout* α

$$\lim_{t\to\infty} [H(t+\alpha) - H(t)] = \frac{\alpha}{T_0}.$$

3. Dans de nombreux cas il est utile d'utiliser le *théorème de Smith* nommé par son auteur théorème central de renouvellement. *Si la durée de vie de l'élément* τ_i *suit une distribution continue et si* $Q(t)$ *est une fonction monotone non décroissante, intégrable sur* $(0, \infty)$, *alors*

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t Q(t-\tau)\, dH(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^\infty Q(x)\, dx. \tag{2.3.19}$$

Cette égalité est commode en ce sens qu'en choisissant différentes fonctions $Q(t)$, nous pouvons obtenir diverses propositions limites pour le processus de renouvellement.

4. *Si lẽs* τ_i *ont une variance finie* σ^2, *alors*

$$\lim_{t\to\infty} \left[H(t) - \frac{t}{T_0}\right] = \frac{\sigma^2}{2T_0^2} - \frac{1}{2}. \tag{2.3.20}$$

Il en découle que pour une grande valeur de t on a la formule approchée

$$H(t) \approx \frac{t}{T_0} + \frac{\sigma^2}{2T_0^2} - \frac{1}{2}.$$

5. *Si la densité de probabilité* $f(t)$ *est continue et tend vers zéro quand* $t \to \infty$, *alors*

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{1}{T_0}. \tag{2.3.21}$$

Cette affirmation importante reflète le fait qu'avec le temps le processus de renouvellement devient stationnaire et que ses caractéristiques cessent de dépendre du temps.

Etudions maintenant plus en détail la question du comportement asymptotique de la grandeur $\nu(t)$, le nombre de pannes au cours du temps t, avec la croissance du temps.

Revenons à l'égalité (2.3.3)

$$\mathbf{P}\{\nu(t) \geqslant n\} = \mathbf{P}\{\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n < t\}.$$

Comme les grandeurs τ_i sont identiquement distribuées et possèdent une variance finie σ^2, la fraction

$$\xi_n = \frac{\tau_1 + \ldots + \tau_n - nT_0}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge quand $n \to \infty$ vers une variable aléatoire normale de moyenne zéro et de variance unité. Supposons maintenant que $t \to \infty$ et que

$$n = \frac{t}{T_0} + z_n\sqrt{t},$$

où z_n est choisi de manière que $z_n \to z$ (z est un nombre arbitraire) et que n soit un entier.

Ecrivons l'égalité (2.3.3) sous la forme

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\nu(t) - \frac{t}{T_0}}{\sqrt{t}} \geqslant z_n\right\} = \mathbf{P}\left\{\xi_n < -\frac{T_0 z_n\sqrt{t}}{\sigma\sqrt{\frac{t}{T_0} + z_n\sqrt{t}}}\right\}.$$

Quand $t \to \infty$ nous obtenons

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\nu(t) - \frac{t}{T_0}}{\sqrt{t}} \geqslant z_n\right\} = \mathbf{P}\left\{\xi < -\frac{T_0^{\frac{3}{2}} z}{\sigma}\right\}. \qquad (2.3.22)$$

Effectuons le changement de variables $x = \frac{T_0^{\frac{3}{2}} z}{\sigma}$. Nous avons alors

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\nu(t) - \frac{t}{T_0}}{\frac{\sigma\sqrt{t}}{T_0^{\frac{3}{2}}}} \geqslant x\right\} = \mathbf{P}\{\xi < -x\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt. \qquad (2.3.23)$$

Il en découle que la variable aléatoire $\nu(t)$ est asymptotiquement normale de moyenne $\mathbf{M}\nu(t) \sim \frac{t}{T_0}$ et de variance

$$\mathbf{D}\nu(t) \sim \frac{\sigma^2 t}{T_0^3}. \qquad (2.3.24)$$

Le fait que nous venons d'établir permet d'estimer simplement et d'une manière assez précise le nombre éventuel de pannes sur un grand intervalle de temps. Nous obtenons en effet de l'égalité (2.3.23) que le nombre de pannes se produisant au cours d'un grand intervalle

de temps (0, t) sera, avec une probabilité ($1 - \alpha$), compris dans les limites

$$\frac{t}{T_0} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma \sqrt{t}}{T_0^{\frac{3}{2}}} < \nu(t) < \frac{t}{T_0} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma \sqrt{t}}{T_0^{\frac{3}{2}}}, \qquad (2.3.25)$$

où $u_{\frac{\alpha}{2}}$ est trouvé d'après les tables de la loi normale à partir de la condition

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u_{\frac{\alpha}{2}}}^{u_{\frac{\alpha}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \alpha.$$

Citons un exemple. Supposons que la durée de vie moyenne de l'élément est $T_0 = 100$ heures, la variance de la durée de vie $\sigma^2 = 3600$ h². On demande d'estimer avec un degré de certitude 0,95 le nombre d'éléments de réserve indispensable pour assurer le fonctionnement ininterrompu au cours du temps $t = 8000$ h. Etant donné que dans cet exemple nous n'avons besoin que d'une estimation unilatérale, nous trouvons d'après les tables pour une valeur donnée $\alpha = 0,05$ la valeur de u_α d'après la condition

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_\alpha} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \alpha;$$

$x_\alpha = 1,65$ (cf. la table 3 de l'annexe).

Dans ce cas l'inégalité

$$\nu(t) < \frac{t}{T_0} + x_\alpha \frac{\sigma \sqrt{t}}{T_0^{\frac{3}{2}}} = 80 + 1,65 \cdot 0,6 \sqrt{80} \approx 89$$

est vérifiée avec une probabilité 0,95, d'où il découle que pour assurer le fonctionnement ininterrompu durant 8000 h il faut disposer de 89 éléments de réserve.

Fiabilité de l'élément dans un intervalle donné de temps. Considérons maintenant un autre exemple intéressant et non moins important: quelle est la probabilité pour que l'élément fonctionne sans défaillance dans l'intervalle de temps (t, $t + \tau$). Ce problème se présente pour les dispositifs qui se trouvent constamment à l'état de marche, mais qui n'accomplissent leurs fonctions qu'au cours de certains intervalles de temps.

Désignons la probabilité cherchée par $p_t(\tau)$. Considérons le système d'événements incompatibles

$$A_0 = \{t + \tau < \tau_1\}, \quad A_n = \{t_n < t < t + \tau < t_n + \tau_{n+1}\}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

L'événement A_n signifie que jusqu'à l'instant t il s'est produit exactement n pannes et dans l'intervalle $(t, t+\tau)$ il n'y a pas eu de pannes. Il est évident que l'événement B qui nous intéresse et qui consiste en l'absence de pannes dans l'intervalle $(t, t+\tau)$ est la somme de tous les événements

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Nous obtenons alors, compte tenu de l'incompatibilité des événements A_n,

$$p_t(\tau) = \mathrm{P}\{B\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}\{A_n\}.$$

Trouvons maintenant la probabilité de l'événement A_n. D'après la formule des probabilités totales nous avons

$$\mathrm{P}\{A_n\} = \mathrm{P}\{t_n < t < t+\tau < t_n + \tau_{n+1}\} = \int_0^t \mathrm{P}\{x < t_n < x+dx\} \mathrm{P}\{\tau_{n+1} > t+\tau-x\} = \int_0^t [1-F(t+\tau-x)] f_n(x)\, dx.$$

D'où

$$p_t(\tau) = 1 - F(t+\tau) + \int_0^t [1-F(t+\tau-x)] h(x)\, dx. \quad (2.3.26)$$

Il n'est pas difficile d'obtenir de cette formule, quand $\tau = \Delta t \to 0$, que

$$1 - p_t(\Delta t) = h(t)\Delta t + o(\Delta t). \quad (2.3.27)$$

Il en découle que la densité de renouvellement $h(t)$ est égale à la probabilité de panne au cours de l'unité de temps (si cette unité est petite). C'est la raison pour laquelle on confond souvent deux caractéristiques différentes, le risque de panne $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$ et la densité de renouvellement $h(t)$. Cette confusion est encore accentuée par le fait que dans de nombreux travaux les deux grandeurs $\lambda(t)$ et $h(t)$ ont une même dénomination, l'intensité des pannes. Or, ces deux grandeurs sont absolument différentes: la densité de renouvellement $h(t)$ est approximativement égale à la probabilité marginale de panne au cours d'une unité de temps (qui est suffisamment petite), et $\lambda(t)$ est la probabilité conditionnelle de panne au cours d'une unité de temps, sachant qu'avant l'instant t aucune panne ne s'est produite.

La formule (2.3.26) n'est presque jamais utilisée en pratique, car nous sommes habituellement intéressés par les instants éloignés du temps, pour lesquels le processus de renouvellement devient stationnaire et la probabilité $p_t(\tau)$ cesse de dépendre du temps t. C'est pourquoi dans l'égalité (2.3.26) nous passerons à la limite en faisant tendre t vers l'infini. Le premier terme du second membre

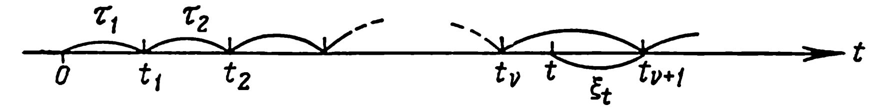


Fig. 2.3.3

$1-F(t+\tau)$ tend vers zéro avec la croissance de t, et pour trouver la limite de l'intégrale

$$\int_0^t [1-F(t+\tau-x)]\, h(x)\, dx$$

nous utiliserons le théorème fondamental du renouvellement en prenant dans l'égalité (2.3.19)

$$Q(x)=1-F(x+\tau).$$

Nous obtenons alors

$$p(\tau)=\lim_{t\to\infty} p_t(\tau)=\frac{1}{T_0}\int_0^\infty [1-F(x+\tau)]\, dx,$$

ou

$$p(\tau)=\frac{1}{T_0}\int_\tau^\infty [1-F(t)]\, dt. \qquad (2.3.28)$$

Le résultat obtenu peut être interprété de la façon suivante. Nous appellerons durée de vie restante de l'élément (temps de survie) le temps s'écoulant à partir de l'instant t jusqu'à la panne suivante et nous le désignerons par ξ_t (fig. 2.3.3). Il est évident que pour la fonction de répartition de ξ_t on a

$$\mathbf{P}\{\xi_t>\tau\}=p_t(\tau).$$

Avec la croissance de t la grandeur ξ_t converge vers une certaine grandeur stationnaire ξ, dont la loi de distribution s'exprime par la formule

$$\mathbf{P}\{\xi>\tau\}=p(\tau)=\frac{1}{T_0}\int_\tau^\infty [1-F(t)]\, dt.$$

Trouvons quelques caractéristiques de cette loi. Le temps moyen est

$$T_1=\int_0^\infty p(\tau)\,d\tau=\frac{1}{T_0}\int_0^\infty d\tau\int_\tau^\infty [1-F(t)]\,dt=$$

$$=\frac{1}{T_0}\int_0^\infty t\,[1-F(t)]\,dt=\frac{1}{T_0}\int_0^\infty \frac{t^2}{2}f(t)\,dt=\frac{\sigma^2+T_0^2}{2T_0},\qquad (2.3.29)$$

ou

$$T_1=\frac{T_0}{2}+\frac{\sigma^2}{2T_0}.$$

Il est intéressant de noter qu'à première vue le temps moyen T_1 devrait être égal à $\frac{T_0}{2}$, puisque l'instant t devrait en moyenne diviser en deux moitiés la durée de vie de l'élément $\tau_{\nu+1}$. En fait, l'expression (2.3.29) montre que le temps moyen est plus grand. Cela s'explique par le fait que l'instant t a une plus grande probabilité de tomber dans un plus grand intervalle τ_i, de sorte que la longueur moyenne de l'intervalle τ_i dans lequel tombe l'instant t sera supérieure à T_0.

Le risque de panne $\lambda_1(t)$ pour la grandeur ξ s'exprime par la formule

$$\lambda_1(t)=\frac{1-F(t)}{\int_t^\infty [1-F(t)]\,dt}.\qquad (2.3.30)$$

Il est intéressant de noter que si l'élément est vieillissant, c'est-à-dire si $\lambda(t)$ croît de façon monotone, $\lambda_1(t)$ est aussi monotone croissante. En effet, nous obtenons de (2.3.30)

$$\frac{\lambda_1'(t)}{\lambda_1(t)}=\lambda_1(t)-\lambda(t).$$

Par ailleurs,

$$1-F(t)=\int_t^\infty f(x)\,dx=$$

$$=\int_t^\infty \lambda(x)[1-F(x)]\,dx\geqslant\lambda(t)\int_t^\infty [1-F(x)]\,dx,$$

d'où nous tirons

$$\lambda_1(t)\geqslant\lambda(t),$$

et, par conséquent, $\lambda_1'(t)\geqslant 0$, autrement dit $\lambda_1(t)$ est monotone croissante.

Il est utile d'avoir des estimations simples pour la fonction $p(t)$. Comme

$$p''(t) = \frac{f(t)}{T_0} \geqslant 0,$$

la fonction $p(t)$ a sa convexité orientée vers le bas et son graphique est situé au-dessus de la tangente. Nous obtenons ainsi l'estimation (fig. 2.3.4)

$$p(t) \geqslant 1 - \frac{t}{T_0}. \tag{2.3.30a}$$

Pour les éléments vieillissants on peut obtenir une estimation dans l'autre sens. Comme nous l'avons montré, de la croissance monotone de $\lambda(t)$ découle la croissance monotone de $\lambda_1(t)$. Mais alors on a

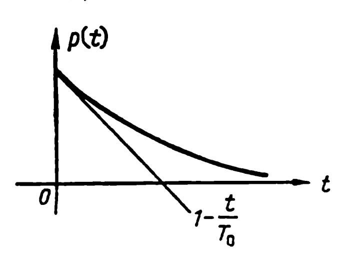


Fig. 2.3.4

$$\lambda_1(t) \geqslant \lambda_1(0) = \frac{1}{T_0},$$

d'où

$$\int_0^T \lambda_1(t)\,dt \geqslant \frac{T}{T_0},$$

et nous obtenons pour la fonction de fiabilité

$$p(t) = e^{-\int_0^t \lambda_1(t)dt} \leqslant e^{-\frac{t}{T_0}}.$$

Confrontant cette estimation avec l'estimation (2.3.30) nous obtenons

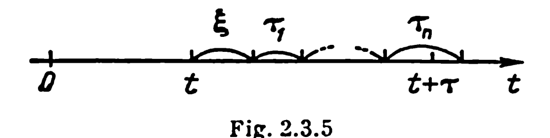


Fig. 2.3.5

une estimation bilatérale (fig. 2.3.5)

$$1 - \frac{t}{T_0} \leqslant p(t) \leqslant e^{-\frac{t}{T_0}}. \tag{2.3.31}$$

Par conséquent, pour les éléments vieillissants on a l'égalité approchée

$$p(t) \approx 1 - \frac{t}{T_0}, \tag{2.3.32}$$

qui est entachée d'une erreur n'excédant pas

$$\frac{1}{2}\left(\frac{t}{T_0}\right)^2.$$

Calculons maintenant pour le cas stationnaire la probabilité pour que n pannes exactement se produisent dans l'intervalle $(t,$

$t+\tau$). Désignons le nombre aléatoire des pannes dans l'intervalle (t, $t+\tau$) par ν_τ. Nous avons alors

$$\mathbf{P}\{\nu_\tau \geqslant n\} = \mathbf{P}\{\xi + \tau_1 + \ldots + \tau_{n-1} < \tau\}$$

et comme les grandeurs ξ et τ_i sont indépendantes nous obtenons

$$\mathbf{P}\{\nu_\tau \geqslant n\} = \frac{1}{T_0}\int_0^\tau [1-F(\tau-x)]\, F_{n-1}(x)\,dx,$$

d'où nous tirons

$$\mathbf{P}\{\nu_\tau = n\} = \frac{1}{T_0}\int_0^\tau [1-F(\tau-x)]\,[F_{n-1}(x)-F_n(x)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_0^\tau [F_{n-1}(x)-2F_n(x)+F_{n+1}(x)]\,dx. \quad (2.3.33)$$

Notons encore que, conformément au théorème de Blackwell, le nombre moyen de pannes dans l'intervalle (t, $t+\tau$) est égal, pour une grande valeur de t, à

$$\mathbf{M}\nu_\tau = \frac{\tau}{T_0}. \quad (2.3.34)$$

La formule (2.3.33) permet de calculer aussi la variance de ν_τ. Elle est égale à

$$\mathbf{D}\nu_\tau = \frac{2}{T_0}\int_0^\tau \left[H(x) - \frac{x}{T_0} + \frac{1}{2}\right] dx. \quad (2.3.35)$$

Notons encore que quand $\tau \to \infty$, on a le théorème limite (2.3.23), autrement dit ν_τ a une distribution asymptotiquement normale de moyenne $\frac{\tau}{T_0}$ et de variance $\frac{\sigma^2\tau}{T_0^3}$.

Processus de renouvellement avec un temps fini de renouvellement. Nous avons supposé jusqu'alors que le remplacement de l'élément tombé en panne avait lieu instantanément. En réalité, ce renouvellement exige un certain temps que l'on ne peut négliger et qui est du même ordre de grandeur que la durée de vie de l'élément. Le temps de renouvellement se compose habituellement du temps qu'il faut pour déceler l'élément tombé en panne ou découvrir qu'il est en panne et du temps qu'il faut pour remplacer l'élément tombé en panne ou le réparer. Nous considérerons plus bas le temps de renouvellement en entier, sans nous intéresser aux parties dont il se compose.

Nous considérerons ainsi le processus suivant (fig. 2.3.6). L'élément, ayant fonctionné un temps aléatoire τ_1', tombe en panne et est renouvelé au cours d'un temps aléatoire τ_1''; l'élément renouvelé

fonctionne pendant un temps τ_2', puis est renouvelé au cours d'un temps τ_2'', etc. Nous appellerons les instants

$$t_n' = \tau_1' + \tau_1'' + \tau_2' + \tau_2'' + \ldots + \tau_{n-1}' + \tau_{n-1}'' + \tau_n', \quad n = 1, 2, \ldots,$$

les *pannes de l'élément*, et les instants

$$t_n'' = \tau_1' + \tau_1'' + \tau_2' + \tau_2'' + \ldots + \tau_{n-1}' + \\ + \tau_{n-1}'' + \tau_n' + \tau_n'', \quad t_0'' = 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

les *renouvellements*.

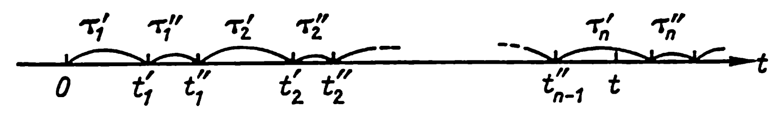


Fig. 2.3.6

Nous supposerons que toutes les grandeurs τ_i' et τ_j'' sont indépendantes. Supposons encore que toutes les périodes de fonctionnement sont identiquement distribuées suivant la loi

$$F(t) = \mathbf{P}\{\tau_n'' < t\}$$

de moyenne $T_1 = \mathbf{M}\tau_n'$ et de variance $\sigma_1^2 = \mathbf{D}\tau_n'$ et que toutes les périodes de renouvellement sont aussi identiquement distribuées suivant la loi

$$G(t) = \mathbf{P}\{\tau_n'' < t\}$$

de moyenne $T_2 = \mathbf{M}\tau_n''$ et de variance $\sigma_2^2 = \mathbf{D}\tau_n''$. Nous supposerons, pour des raisons de commodité, que ces lois possèdent une densité de probabilité continue $f(t) = F'(t)$ et $g(t) = G'(t)$. En outre, pour ne pas avoir à considérer le cas dégénéré, nous estimerons que $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \neq 0$. Le processus ainsi défini est appelé *processus de renouvellement à temps fini de renouvellement.*

Considérons les caractéristiques principales de ce processus.

Le coefficient d'aptitude. La caractéristique principale de la fiabilité de notre élément est le coefficient d'aptitude $k_{\text{apt}}(t)$, qui est égal à la probabilité pour qu'à l'instant t notre élément fonctionne sans défaillance.

Pour déterminer le coefficient d'aptitude considérons l'événement

$$A_n = \{t_n'' < t < t_{n+1}'\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

L'événement A_n signifie que jusqu'à l'instant t il s'est produit exactement n renouvellements et qu'à l'instant t l'élément est en bon état. Il est évident que l'événement B consistant en ce que le fonctionnement de l'élément est satisfaisant jusqu'à l'instant t est égal

à la somme de tous les événements A_n

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Nous en tirons du fait de l'incompatibilité des événements A_n que

$$k_{\text{apt}}(t) = \mathbf{P}\{B\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{A_n\}. \qquad (2.3.36)$$

Pour déterminer les probabilités $\mathbf{P}\{A_n\}$ introduisons certaines notations.

Soit

$$t_{n1} = \tau_1' + \tau_2' + \ldots + \tau_n' \quad \text{et} \quad t_{n2} = \tau_1'' + \tau_2'' + \ldots + \tau_n''.$$

Notons que $t_{n1} + t_{n2} = t_n''$. Introduisons les notations suivantes pour les lois de distribution de t_{n1}, t_{n2} et t_n'' :

$$\mathbf{P}\{t_{n1} < t\} = F_n(t), \qquad \mathbf{P}\{t_{n2} < t\} = G_n(t)$$

et

$$\mathbf{P}\{t_n'' < t\} = \Phi_n(t);$$

et pour leurs densités de probabilité $f_n(t) = F_n'(t)$ et $g_n(t) = G_n'(t)$. On détermine ces lois de distribution en fonction des lois initiales $F(t)$ et $G(t)$ de la manière suivante :

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-x)\, dF(x), \qquad F_1(t) = F(t),$$

$$G_n(t) = \int_0^t G_{n-1}(t-x)\, dG(x), \qquad G_1(t) = G(t)$$

et

$$\Phi_n(t) = \int_0^t F_n(t-x)\, dG_n(x).$$

Revenons maintenant au calcul des probabilités $\mathbf{P}\{A_n\}$. D'après la formule des probabilités totales on a

$$\mathbf{P}\{A_n\} = \mathbf{P}\{t_n'' < t < t_n'' + \tau_{n+1}'\} =$$

$$= \int_0^t \mathbf{P}\{x < t_n < x + dx\}\, \mathbf{P}\{\tau_{n+1}' > t - x\} =$$

$$= \int_0^t [1 - F(t-x)]\, \varphi_n(x)\, dx.$$

Portant les probabilités trouvées dans la formule (2.3.36) nous obtenons

$$k_{apt}(t) = 1 - F(t) + \int_0^t [1 - F(t-x)]\, h_2(x)\, dx, \qquad (2.3.37)$$

où

$$h_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x).$$

Les instants de renouvellement t_n'' forment un processus de renouvellement. La fonction $h_2(t)$ est évidemment la densité de probabilité de ce processus. La distance moyenne entre deux points voisins de ce processus est égale à

$$M(\tau_n' + \tau_n'') = T_1 + T_2.$$

La formule (2.3.37) n'est presque jamais utilisée, car en pratique on entend habituellement par coefficient d'aptitude la valeur stationnaire vers laquelle tend la fonction $k_{apt}(t)$ avec la croissance du temps. Faisons tendre t vers l'infini dans l'égalité (2.3.37). Utilisons encore le théorème fondamental de renouvellement en prenant dans l'égalité (2.3.19)

$$Q(x) = 1 - F(x).$$

Nous avons alors

$$k_{apt} = \lim_{t \to \infty} k_{apt}(t) = \frac{1}{T_1 + T_2} \int_0^{\infty} [1 - F(x)]\, dx,$$

d'où nous tirons en définitive

$$k_{apt} = \frac{T_1}{T_1 + T_2}. \qquad (2.3.38)$$

Rapportons encore une méthode heuristique pour établir la valeur du coefficient d'aptitude.

Prenons un grand intervalle de temps sur lequel s'étalent exactement n périodes de fonctionnement et n périodes de renouvellement et considérons le rapport

$$\frac{t_{n1}}{t_{n1} + t_{n2}} = \frac{\tau_1' + \ldots + \tau_n'}{\tau_1' + \ldots + \tau_n' + \tau_1'' + \ldots + \tau_n''}$$

égal à la fraction du temps au cours duquel l'élément est en état de service. Quand $n \to \infty$, les rapports

$$\frac{\tau_1' + \ldots + \tau_n'}{n} \quad \text{et} \quad \frac{\tau_1'' + \ldots + \tau_n''}{n}$$

convergent, conformément à la loi des grands nombres, avec une probabilité égale à l'unité (presque sûrement) vers les moyennes T_1

et T_2. C'est pourquoi notre rapport converge en probabilité vers

$$\frac{\dfrac{\tau_1'+\ldots+\tau_n'}{n}}{\dfrac{\tau_1'+\ldots+\tau_n'}{n}+\dfrac{\tau_1''+\ldots+\tau_n''}{n}}\to\frac{T_1}{T_1+T_2}.$$

On s'aperçoit donc que le coefficient d'aptitude est la *fraction moyenne du temps au cours duquel le système est en état de service.*

Pour un processus de renouvellement avec un temps fini de renouvellement nous pouvons considérer deux variables aléatoires

$\nu_1(t)$, le nombre de pannes dans l'intervalle $(0, t)$,

$\nu_2(t)$, le nombre de renouvellements dans l'intervalle $(0, t)$

et les moyennes correspondantes

$\mathbf{M}\nu_1(t) = H_1(t)$, le nombre moyen de pannes dans l'intervalle $(0, t)$ et

$\mathbf{M}\nu_2(t) = H_2(t)$, le nombre moyen de renouvellements dans l'intervalle $(0, t)$.

Comme on s'intéresse principalement au comportement de ces grandeurs pour les grandes valeurs de t_1 et que le comportement asymptotique de $\nu_1(t)$ et $\nu_2(t)$ est identique puisqu'elles ne peuvent différer l'une de l'autre que de l'unité, nous ne considérerons que les instants de renouvellement. Les distances entre deux instants voisins sont des variables aléatoires

$$\tau_n=\tau_n'+\tau_n''$$

distribuées suivant la loi

$$\mathbf{P}\{\tau_n<t\}=\Phi(t)=\int_0^t F(t-x)\,dG(x).$$

C'est pourquoi la fonction de renouvellement est

$$H_2(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(t),$$

et la densité de renouvellement

$$h_2(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(t),\qquad \varphi_n(t)=\Phi_n'(t).$$

Avec la croissance du temps la fonction $h_2(t)$ tend vers la limite $\frac{1}{T_1+T_2}$; c'est le nombre moyen de renouvellements au cours d'une unité de temps. La grandeur $\nu_2(t)$ est, quand $t\to\infty$, asymptotiquement normale de moyenne $\frac{t}{T_1+T_2}$ et de variance $\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\,t}{(T_1+T_2)^3}$, ce qui permet comme précédemment d'estimer le nombre de renouvellements au cours du temps t. Notons que le nombre de pannes $\nu_1(t)$ au cours du temps t a une valeur asymptotique identique.

On recherche exactement de la même manière la probabilité de fonctionnement sans défaillance au cours de l'intervalle $(t, t + \tau)$. Elle est égale à

$$p_t(\tau) = 1 - F(t+\tau) + \int_0^t [1 - F(t+\tau-x)]\, h_2(x)\, dx.$$

Utilisant comme précédemment le théorème fondamental de renouvellement, nous obtenons que

$$p(\tau) = \lim_{t\to\infty} p_t(\tau) = \frac{1}{T_1+T_2} \int_\tau^\infty [1 - F(x)]\, dx. \tag{2.3.39}$$

On peut écrire aussi cette formule sous la forme

$$p(\tau) = k_{\text{apt}} \frac{1}{T_1} \int_\tau^\infty [1 - F(x)]\, dx,$$

d'où il découle que la probabilité de fonctionnement sans défaillance au cours du temps τ est égale au produit de la probabilité pour qu'au moment initial le système fonctionne sans défaillance par la probabilité du fonctionnement sans défaillance de l'élément au cours du temps τ pour un processus usuel avec renouvellement instantané (cf. (2.3.28)).

Cas des lois exponentielles. On considère souvent en pratique le cas spécial du processus de renouvellement avec un temps fini de renouvellement, quand la durée de vie et la durée de renouvellement de l'élément suivent la loi exponentielle

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad G(t) = 1 - e^{-\mu t}.$$

Nous aurions pu pour ce cas particulier obtenir toutes les caractéristiques à partir des formules générales, mais il est plus commode et instructif de considérer ce cas séparément. Si nous désignons par $\pi(t)$ la probabilité de l'état de fonctionnement sans défaillance et par $r(t) = 1 - \pi(t)$ la probabilité de l'état défectueux à l'instant t, alors, en comparant notre processus à deux instants infiniment proches du temps t et $t + \Delta t$, nous trouvons d'après la formule des probabilités totales

$$\pi(t+\Delta t) = [1 - (\lambda\Delta t + o(\Delta t))]\, \pi(t) + [\mu\Delta t + o(\Delta t)]\, r(t).$$

Passant à la limite, nous obtenons l'équation différentielle

$$\pi'(t) = -\lambda\pi(t) + \mu r(t),$$

ou

$$\pi'(t) + (\lambda+\mu)\, \pi(t) = \mu.$$

Résolvant cette équation nous trouvons la probabilité cherchée qui, comme on peut s'en convaincre aisément, représente le coefficient d'aptitude

$$k_{\text{apt}}(t) = \pi(t) = \frac{\mu + \lambda e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu}. \tag{2.3.40}$$

La valeur stationnaire de ce coefficient est

$$k_{\text{apt}} = \lim_{t\to\infty} k_{\text{apt}}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{T_1}{T_1+T_2}.$$

La probabilité du fonctionnement sans défaillance au cours du temps $(t, t+\tau)$ s'exprime ainsi pour les grandes valeurs de t:

$$p(\tau) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda\tau}. \tag{2.3.41}$$

On voit de la formule (2.3.40) la vitesse avec laquelle le coeffi-

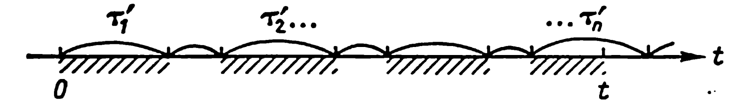


Fig. 2.3.7

cient d'aptitude tend vers sa valeur limite $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$. Cette valeur s'avère exponentielle

$$k_{\text{apt}}(t) - k_{\text{apt}} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} < e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Il est très difficile dans le cas général de lois $F(t)$ et $G(t)$ arbitraires de trouver la vitesse avec laquelle notre processus devient stable. On ne peut que formuler une considération qualitative: pour des valeurs fixées des temps moyens, le processus devient stable d'autant plus lentement que la variance globale $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ est petite. Notons encore que si les densités $f(t)$ et $g(t)$ tendent vers zéro avec une vitesse exponentielle, c'est-à-dire si

$$f(t) < C_1 e^{-\alpha_1 t},$$
$$g(t) < C_2 e^{-\alpha_2 t},$$

alors notre processus devient stable avec une vitesse exponentielle

$$|k_{\text{apt}}(t) - k_{\text{apt}}| < Ce^{-\alpha t}.$$

Distribution du temps global de fonctionnement. Considérons maintenant le problème suivant. Appelons *temps global de fonctionnement* au cours du temps t la somme de toutes les périodes de fonctionnement τ_i' jusqu' à l'instant t, y compris peut-être la période incomplète de fonctionnement contiguë à l'instant t (fig. 2.3.7).

Désignons le temps global de fonctionnement par h_t. Trouvons maintenant la loi de distribution de la variable aléatoire h_t et étudions son comportement asymptotique quand $t \to \infty$.

Considérons une autre variable aléatoire τ_s, correspondant à l'instant aléatoire pour lequel le temps global de fonctionnement atteint la valeur s. On se donne souvent en pratique le temps global de fonctionnement s de l'article tel qu'après l'avoir atteint l'article est remplacé par un article neuf. Alors τ_s sera le temps de calendrier de la durée de vie de l'article, et il sera important pour nous de savoir estimer ce temps. On remarque aisément que les grandeurs h_t et τ_s sont liées par la relation simple

$$\mathbf{P}\{h_t < s\} = \mathbf{P}\{\tau_s > t\}. \qquad (2.3.42)$$

Considérons séparément pour trouver la loi de distribution de h_t (et, par conséquent, de τ_s) deux flux : le flux constitué par les périodes successives de fonctionnement et le flux constitué par les périodes de renouvellement. Soit $\nu_1(t)$ le nombre de pannes jusqu'à l'instant t dans le premier flux et $\nu_2(t)$ le nombre de renouvellements jusqu'à l'instant t dans le second flux. Démontrons que les deux événements suivants sont équivalents et que, par conséquent, leurs probabilités sont égales

$$\{\nu_1(s) \geqslant \nu_2(t-s)\} = \{\tau_s > t\}.$$

Remarquons tout d'abord qu'avec une probabilité égale à l'unité l'instant τ_s tombera à l'intérieur d'une période de fonctionnement. Cela fait que

$$\nu_1(s) = \nu_2(\tau_s - s),$$

puisque le nombre de pannes s étant produites jusqu'à l'instant τ_s est égal au nombre de renouvellements jusqu'à cet instant. Il découle alors de l'événement $\tau_s > t$ que $\nu_1(s) = \nu_2(\tau_s - s) \geqslant \nu_2(t - s)$. Au contraire, si l'événement $\nu_2(t - s) \geqslant \nu_1(s) = \nu_2(\tau_s - s)$ est réalisé, alors $t \leqslant \tau_r$ en vertu de la monotonité de la fonction $\nu_2(x)$, ce qui est équivalent à l'inégalité $t < \tau_s$.

Ainsi, la probabilité est

$$\Phi(s, t) = \mathbf{P}\{h_t < s\} = \mathbf{P}\{\tau_s > t\} = \mathbf{P}\{\nu_1(s) \geqslant \nu_2(t-s)\}. \qquad (2.3.43)$$

Or, on peut aisément calculer cette dernière probabilité, connaissant la distribution de $\nu_1(x)$ et $\nu_2(x)$. Nous obtenons aisément d'après (2.3.4) que

$$\Phi(s, t) = \mathbf{P}\{h_t < s\} = \mathbf{P}\{\tau_s > t\} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} [G_n(t-s) - G_{n+1}(t-s)]\, F_n(s), \qquad (2.3.44)$$

où, comme usuellement,

$$F_0(x) = G_0(x) \equiv 1.$$

La formule obtenue peut être utilisée si le temps t est relativement peu grand par rapport à la durée moyenne de vie et au temps moyen de renouvellement de l'élément, bien que dans ce cas également les calculs sont laborieux. Notons encore que la série (2.3.44) ne se simplifie pas notablement même pour la loi exponentielle quand

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad G(x) = 1 - e^{-\mu x}.$$

Nous obtenons pour ce cas

$$\Phi(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\mu(t-s)]^n}{n!} e^{-\mu(t-s)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s}. \tag{2.3.45}$$

Si le temps t est grand, il faudra, pour calculer les séries (2.3.44) et (2.3.45), prendre un plus grand nombre de termes dans la série, ce qui rend malaisée l'application de ces formules. C'est la raison pour laquelle nous étudions le comportement asymptotique de la probabilité $\Phi(s, t)$ quand s et $t \to \infty$. Comme nous l'avons déjà démontré (cf. p. 119), quand $t \to \infty$, le nombre de renouvellements $\nu(t)$ est distribué asymptotiquement suivant une loi normale de moyenne $\frac{t}{T_0}$ et de variance $\frac{\sigma^2 t}{T_0^3}$. Il en découle que quand $s \to \infty$, la grandeur $\nu_1(s)$ est asymptotiquement normale de moyenne $\frac{s}{T_1}$ et de variance $\frac{\sigma_1^2 s}{T_1^3}$, et quand $t - s \to \infty$, la grandeur $\nu_2(t-s)$ est asymptotiquement normale de moyenne $\frac{t-s}{T_2}$ et de variance $\frac{\sigma_2^2(t-s)}{T_2^3}$.

Comme les grandeurs $\nu_1(s)$ et $\nu_2(t-s)$ sont indépendantes, leur différence $\nu_2(t-s) - \nu_1(s)$ est aussi, quand s et $(t-s) \to \infty$, asymptotiquement normale de moyenne $\frac{t-s}{T_2} - \frac{s}{T_1}$ et de variance $\frac{\sigma_1^2 s}{T_1^3} + \frac{\sigma_2^2(t-s)}{T_2^3}$.

Transformons la probabilité $\Phi(s, t)$:

$$\Phi(s, t) = \mathbf{P}\{\nu_1(s) \geqslant \nu_2(t-s)\} =$$
$$= \mathbf{P}\left\{ \frac{\nu_2(t-s) - \nu_1(s) - \frac{t-s}{T_2} + \frac{s}{T_1}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 s}{T_1^3} + \frac{\sigma_2^2(t-s)}{T_2^3}}} \leqslant \frac{\frac{s}{T_1} - \frac{t-s}{T_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 s}{T_1^3} + \frac{\sigma_2^2(t-s)}{T_2^3}}} \right\}.$$

Supposons que $t \to \infty$ et $s = \frac{T_1}{T_1 + T_2} t + z\sqrt{t}$. Alors s, $(t-s) \to \infty$ et le premier membre de l'inégalité sous le signe de probabilité est asymptotiquement normal de moyenne zéro et de variance unité. Le second membre de cette inégalité possède une limite finie

égale à

$$x=\frac{z\,(\sqrt{T_1+T_2})^3}{T_1T_2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{T_1^2}+\frac{\sigma_2^2}{T_2^2}}}.$$

Il en découle, quand $t\to\infty$ et

$$s=\frac{T_1}{T_1+T_2}t+\frac{T_1T_2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{T_1^2}+\frac{\sigma_2^2}{T_2^2}}}{(\sqrt{T_1+T_2})^3}x\sqrt{t}$$

(x est une valeur fixée), que

$$\lim\Phi(s,\,t)=\lim \mathbf{P}\{h_t<s\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

ou

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{h_t-\frac{T_1}{T_1+T_2}t}{\sqrt{t}\,T_1T_2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{T_1^2}+\frac{\sigma_2^2}{T_2^2}}}(\sqrt{T_1+T_2})^3<x\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{x^2}{2}}dx. \quad (2.3.46)$$

En d'autres termes, la grandeur h_t est asymptotiquement normale de moyenne $\mathbf{M}h_t\sim\frac{T_1}{T_1+T_2}t$ et de variance

$$\mathbf{D}h_t\sim\frac{T_1^2T_2^2\left(\frac{\sigma_1^2}{T_1^2}+\frac{\sigma_2^2}{T_2^2}\right)}{(T_1+T_2)^3}t.$$

On montre d'une manière absolument analogue que quand $s\to\infty$ la grandeur τ_s est asymptotiquement normale de moyenne $\mathbf{M}\tau_s\sim$ $\sim\frac{T_1+T_2}{T_1}s$ et de variance $\mathbf{D}\tau_s\sim\left(\frac{\sigma_1^2}{T_1^2}+\frac{\sigma_2^2}{T_2^2}\right)\frac{T_2^2s}{T_1}$.

Rapportons un exemple. Supposons que $T_1=5$ heures, $T_2=$ $=3$ heures, $\sigma_1=3$ heures, $\sigma_2=2$ heures. On demande d'estimer le temps global de fonctionnement h_t au cours du temps $t=800$ heures. Nous obtenons des formules générales que

$$\mathbf{M}h_t\sim 500 \text{ heures},\quad \sqrt{\mathbf{D}h_t}\sim 13 \text{ heures}.$$

Cela signifie, par exemple, qu'avec une probabilité égale à 0,95 le temps global de fonctionnement sera compris dans les limites

$$474<h_t<526.$$

La distribution trouvée du temps global de fonctionnement permet de résoudre aisément un autre problème.

Fiabilité d'un dispositif à régime variable de fonctionnement. Donnons aux variables aléatoires τ_1', τ_1'', τ_2', τ_2'', ... un autre sens physique. Supposons que l'élément considéré peut se trouver en deux états qui se succèdent périodiquement l'un à l'autre, et soient τ_1', τ_2', τ_3', ... les temps que l'élément passe au premier état et τ_1'', τ_2'', τ_3'', ... les temps que l'élément passe au second état. Supposons que, se trouvant au premier état, l'élément peut tomber en panne au cours du laps de temps Δt avec une probabilité $\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$ indépendamment de son comportement antérieur et que, se trouvant au deuxième état, au cours du laps de temps Δt il peut tomber en panne avec une probabilité $\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)$. On demande de trouver la probabilité de fonctionnement sans défaillance de l'élément dans l'intervalle $(0, t)$.

On voit aisément que cette probabilité est égale à

$$P = \mathrm{M}\left[e^{-\lambda_1 h_t - \lambda_2 (t - h_t)}\right]. \tag{2.3.47}$$

Supposons maintenant que le temps t est grand. Dans ce cas h_t est asymptotiquement normale. Désignons par h_0 sa moyenne et par σ_0^2 sa variance. Nous obtenons de (2.3.47) *

$$P \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 (t-x) - \frac{(x-h_0)^2}{2\sigma_0^2}}\, dx.$$

Après le changement de variable $\frac{x-h_0}{\sigma_0} = z$ nous avons

$$P \approx e^{-\lambda_1 h_0 - \lambda_2 (t-h_0)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2} + (\lambda_2 - \lambda_1)\sigma_0 z}\, dz.$$

Calculant cette dernière intégrale nous obtenons la formule

$$P \approx e^{-\lambda_1 h_0 - \lambda_2 (t-h_0) + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \sigma_0^2}{2}}.$$

Les grandeurs h_0 et σ_0 ont déjà été trouvées; en particulier, $h_0 = \frac{T_1}{T_1 + T_2} t$, et nous parvenons à la formule définitive

$$P \approx e^{-\frac{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}{T_1 + T_2} t + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \sigma_0^2}{2}}. \tag{2.3.48}$$

La probabilité P est souvent calculée à l'aide d'une formule très grossière

$$P \approx e^{-\frac{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}{T_1 + T_2} t}. \tag{2.3.49}$$

---

* L'intégrale est étendue aux limites complètes et non de zéro à t, car dans les limites $(-\infty, 0)$ et (t, ∞) elle est pratiquement égale à zéro.

Notre formule est plus exacte et le second terme de l'exposant détermine l'erreur de cette formule grossière. On considère souvent en pratique les périodes τ_1'', τ_2'', ... comme les périodes d'arrêt de travail de l'élément; dans ce cas $\lambda_2 = 0$ et la formule (2.3.48) a pour expression

$$P \approx e^{-\frac{\lambda_1 T_1}{T_1+T_2} t + \frac{\lambda_1^2 \sigma_0^2}{2}}. \qquad (2.3.50)$$

Le problème que nous avons considéré est un cas particulier d'un problème plus général que l'on pose ainsi: un dispositif peut se trouver en n états. Quand il se trouve à l'état k, il peut tomber en panne au cours du laps de temps Δt avec une probabilité

$$\lambda_k \Delta t + o(\Delta t).$$

Le temps passé à l'état k est une variable aléatoire distribuée suivant une loi $F_k(x)$. La succession des états constitue une chaîne de Markov, autrement dit, la probabilité de passage de l'état k à l'état i ne dépend ni du passé, ni de la durée du temps passé à l'état k et est égale à p_{ki}.

Soit $\tau_k(t)$ le temps global que le dispositif passe à l'état k dans l'intervalle $(0, t)$. La probabilité de fonctionnement sans défaillance au cours de l'intervalle $(0, t)$ est égale à

$$P(t) = \mathrm{M} e^{-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \tau_k(t)}.$$

Si le temps t est très grand, on montre aisément que

$$P(t) \approx e^{-\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_k\right) t}, \qquad (2.3.51)$$

où p_k désigne les probabilités finales de notre chaîne de Markov ou, en d'autres termes, p_k est la probabilité pour qu'à un instant aléatoire le dispositif se trouve à l'état k.

Si l'on démontre que la somme $\tau(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \tau_k(t)$ est, quand $t \to \infty$, asymptotiquement normale et que l'on calcule sa variance $\mathrm{D}\tau(t) = \sigma^2$, alors il est facile de démontrer comme précédemment que

$$P(t) \approx e^{-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k p_k t + \frac{\sigma^2}{2}}. \qquad (2.3.52)$$

§ 2.4. Fiabilité d'un système

Fiabilité d'un système à éléments indépendants fonctionnant jusqu'à la première panne. Par *système* nous allons comprendre tout dispositif formé de parties dont la fiabilité est donnée. Nous appelle-

rons ces parties des *éléments*. Nous devons connaître le système et le caractère de son fonctionnement à un tel point que pour chaque groupe d'éléments du système nous puissions dire si la panne de tous les éléments de ce groupe entraîne ou non la panne de tous les éléments du système. Nous supposerons également que les *pannes des éléments se produisent indépendamment les unes des autres*, autrement dit la panne de n'importe quel groupe d'éléments ne modifie pas la fiabilité des autres éléments.

Considérons tout d'abord le fonctionnement du système jusqu'à la première panne. Dans ce cas la fiabilité du système est entièrement déterminée par la fonction de fiabilité $P(t)$, qui est égale à la probabilité de fonctionnement sans défaillance du système au cours du temps t. Supposons que le système se compose de n éléments, dont nous désignons les fonctions de fiabilité respectivement par $p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)$.

Notre problème consiste à exprimer la fonction de fiabilité $P(t)$ du système au moyen des fonctions de fiabilité des éléments.

Etudions tout d'abord le cas le plus simple et le plus important. Nous dirons que n éléments du système sont reliés *en série au point de vue de la fiabilité*, si la panne de n'importe quel élément provoque la panne de tout le système.

Pour que le système fonctionne sans défaillance au cours du temps t, il faut alors que chaque élément fonctionne sans défaillance au cours de ce même temps. Comme les éléments sont indépendants au sens de la fiabilité, on a

$$P(t) = p_1(t)\, p_2(t) \ldots p_n(t). \tag{2.4.1}$$

Ainsi, lors d'une liaison en série, les fonctions de fiabilité sont multipliées. Exprimons la fonction de fiabilité à l'aide du risque de panne

$$e^{-\int_0^t \lambda(s)\,ds} = e^{-\int_0^t \lambda_1(s)\,ds - \ldots - \int_0^t \lambda_n(s)\,ds},$$

d'où

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + \ldots + \lambda_n(t), \tag{2.4.2}$$

autrement dit, lors d'une liaison en série les risques de panne s'ajoutent. En particulier, pour la loi exponentielle, quand $\lambda_k(t) = \lambda_k = \text{const}$, on a

$$\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$$

et

$$P(t) = e^{-(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)t}, \tag{2.4.3}$$

autrement dit, la *fiabilité du système suit également une loi exponentielle*. Si l'on désigne dans ce cas par T_0 la durée moyenne de vie du

système et par T_k la durée moyenne de vie de l'élément k, on a

$$T_0 = \frac{1}{\frac{1}{T_1} + \ldots + \frac{1}{T_n}}. \qquad (2.4.4)$$

Dans un système complexe il y a toujours des groupes d'éléments identiques. Si ces éléments identiques se trouvent dans des conditions approximativement pareilles ou si la différence de conditions n'influe pas notablement sur leur fiabilité, les fiabilités de ces éléments sont égales. Supposons, par exemple, que le premier groupe comporte n_1 éléments avec une fonction de fiabilité $p_1(t)$, le second groupe en comporte n_2 avec une fonction de fiabilité $p_2(t)$, etc. Les formules (2.4.1) à (2.4.4) s'écrivent alors:

$$P(t) = [p_1(t)]^{n_1} [p_2(t)]^{n_2} \ldots [p_s(t)]^{n_s},$$
$$\lambda(t) = n_1\lambda_1(t) + \ldots + n_s\lambda_s(t),$$

et dans le cas des lois exponentielles

$$\lambda = n_1\lambda_1 + \ldots + n_s\lambda_s,$$
$$T_0 = \frac{1}{\frac{n_1}{T_1} + \ldots + \frac{n_s}{T_s}}.$$

En particulier, quand tous les éléments du système possèdent une même fiabilité $p_k(t) = p(t)$, nous avons

$$P(t) = [p(t)]^n, \quad \lambda(t) = n\lambda_1(t),$$

et pour la loi exponentielle

$$\lambda = n\lambda_1, \quad T_0 = \frac{T_1}{n}.$$

Introduisons maintenant les probabilités de panne

$$Q(t) = 1 - P(t) \quad \text{et} \quad q_k(t) = 1 - p_k(t).$$

Nous avons alors pour une liaison en série

$$Q(t) = 1 - [1 - q_1(t)][1 - q_2(t)] \ldots [1 - q_n(t)]. \qquad (2.4.5)$$

On peut démontrer par récurrence l'inégalité

$$1 - (q_1 + \ldots + q_n) < (1 - q_1) \ldots (1 - q_n) <$$
$$< 1 - (q_1 + \ldots + q_n) + (q_1q_2 + q_1q_3 + \ldots + q_{n-1}q_n) <$$
$$< 1 - (q_1 + \ldots + q_n) + \frac{1}{2}(q_1 + \ldots + q_n)^2,$$

d'où il découle que si

$$q_1(t) + q_2(t) + \ldots + q_n(t) \ll 1,$$

on a la formule approchée

$$Q(t) \approx q_1(t) + \ldots + q_n(t), \tag{2.4.6}$$

dont l'erreur n'excède pas

$$\frac{1}{2}[q_1(t) + \ldots + q_n(t)]^2.$$

Considérons maintenant le second cas simple de liaison des éléments du système. Nous dirons que les *éléments du système sont reliés en parallèle*, si la panne du système ne se produit que quand tous les éléments constituant le système tombent en panne.

Un exemple de système avec une telle liaison des éléments est celui d'un dispositif formé de plusieurs parties dont chacune réalise une seule et même fonction. Cette fonction n'est plus réalisée seulement quand toutes les parties tombent en panne. Comme les éléments sont indépendants au sens de la fiabilité, nous obtenons

$$Q(t) = q_1(t)\, q_2(t) \ldots q_n(t), \tag{2.4.7}$$

autrement dit, lors d'une liaison en parallèle les probabilités de pannes sont multipliées. En particulier, quand tous les éléments sont équifiables, et c'est précisément le cas le plus intéressant, nous obtenons

$$Q(t) = q^n(t). \tag{2.4.8}$$

Si la fiabilité de chaque élément suit une loi exponentielle, la fiabilité du système ne suivra plus cette loi. Par exemple, dans le cas d'éléments identiques

$$Q(t) = (1 - e^{-\lambda t})^n.$$

Dans ce cas on peut trouver la durée moyenne de vie du système

$$T_0 = \int_0^\infty P(t)\, dt = \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\lambda t})^n]\, dt.$$

Effectuons le changement de variables $1 - e^{-\lambda t} = x$,

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{1-x}, \quad dt = \frac{dx}{\lambda(1-x)}$$

d'où

$$T_0 = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\, dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 (1 + x + \ldots + x^{n-1})\, dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right),$$

ou

$$T_0 = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right). \tag{2.4.9}$$

Pour un grand n

$$T_0 \approx \frac{1}{\lambda}[\ln n + C], \quad \text{où } C = 0{,}577 \ldots$$

Considérons maintenant le cas général de la fiabilité du système avec des éléments indépendants [14]. Supposons que le système se compose de n éléments dont les fonctions de fiabilité sont $p_k(t)$ et $q_k(t) = 1 - p_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$. Si nous connaissons la structure du système, pour chaque ensemble d'éléments du système (le nombre de ces ensembles est $2^n - 1$) nous devons savoir si la panne de tous les éléments de cet ensemble entraîne ou non la panne du système. Appelons *groupe de panne* l'ensemble d'éléments dont la panne provoque la panne du système, alors que la panne de tout sous-ensemble de cet ensemble ne provoque pas encore la panne du système.

Soient

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_m$$

tous les groupes de panne.

Soit A_k l'événement consistant en ce que le groupe Γ_k n'est pas tombé en panne au cours du temps t, autrement dit, en ce que l'un de ses éléments au moins n'est pas tombé en panne.

La fiabilité du système est alors

$$P(t) = \mathbf{P}\{A_1 \ldots A_m\} = 1 - \mathbf{P}\{\overline{A}_1 U \ldots U \overline{A}_m\} =$$
$$= 1 - \sum_k \mathbf{P}\{\overline{A}_k\} + \sum_{k<l} \mathbf{P}\{\overline{A}_k \overline{A}_l\} - \sum_{k<l<s} \mathbf{P}\{\overline{A}_k \overline{A}_l \overline{A}_s\} + \ldots, \quad (2.4.10)$$

où $\overline{A}_k$ est l'événement contraire de l'événement A_k. Chaque probabilité est ici de la forme

$$\mathbf{P}\{\overline{A}_{l_1} \overline{A}_{l_2} \ldots \overline{A}_{l_s}\} = q_{s_1}(t)\, q_{s_2}(t) \ldots q_{s_l}(t),$$

où $s_1, s_2, \ldots, s_l$ sont les numéros de tous les éléments faisant partie des groupes $\Gamma_{l_1}, \Gamma_{l_2}, \ldots, \Gamma_{l_k}$ (certains éléments peuvent simultanément appartenir à plusieurs groupes). La formule (2.4.10) permet ainsi de calculer la fiabilité du système dans le cas général, mais quand m est grand, son application est malaisée, vu que le second membre de cette formule comporte 2^m termes.

Pour simplifier les calculs nous procéderons ainsi.

Nous dirons que deux groupes de panne sont *liés*, s'il est possible de les relier par une chaîne de groupes non disjoints. Tous les groupes de panne sont alors partagés en classes de groupes liés. Supposons que les groupes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{s_1}$ constituent la première classe, les groupes $\Gamma_{s_1+1}, \Gamma_{s_1+2}, \ldots, \Gamma_{s_2}$ la seconde classe, etc. Les événements A_k appartenant à diverses classes sont indépendants

et la fiabilité du système s'exprime ainsi:

$$P(t) = \mathbf{P}\{A_1A_2 \ldots A_n\} = \mathbf{P}\{A_1 \ldots A_{s_1}\} \mathbf{P}\{A_{s_1+1} \ldots A_{s_2}\} \ldots \quad (2.4.11)$$

Chaque facteur dans le second membre de cette égalité peut être calculé d'après la formule (2.4.10). Si les classes des groupes liés sont composées d'un petit nombre d'éléments, les calculs sont notablement simplifiés. Il est bon de noter que dans la majorité des cas les liaisons des éléments du système peuvent être ramenées à des combinaisons de liaisons en série et en parallèle, et dans ces cas le calcul de la fiabilité du système peut être réalisé plus simplement. La formule (2.4.10) montre que dans le cas le plus général la fonction de fiabilité du système à éléments indépendants $P(t)$ est un polynôme de la fonction de probabilité des éléments $p_k(t)$; c'est en cela précisément que consiste la signification principale de la proposition que nous avons démontrée.

Sur la fiabilité d'un système à éléments indépendants. Nous avons supposé partout dans ce qui précède que les éléments du système sont indépendants au sens de la fiabilité. C'est là une supposition très forte et dans les systèmes réels souvent elle n'est pas vérifiée. Les pannes de certains éléments peuvent notablement influer sur la fiabilité des autres éléments, en modifiant les paramètres déterminant la fiabilité des éléments. Dans le cas d'une liaison en parallèle les pannes de certains éléments entraînent une surcharge fonctionnelle des éléments « en vie », de sorte que leur fiabilité diminue. Considérons un exemple caractéristique. Le système se compose de n éléments identiques reliés en parallèle. Supposons que le risque de panne de chaque élément ne dépende pas du temps mais dépende du nombre d'éléments fonctionnant encore sans défaillance. Si à un instant donné k éléments fonctionnent, le risque de panne de chacun d'eux est égal à λ_k *. Désignons par $P_k(t)$ la probabilité pour qu'à l'instant t fonctionnent exactement k éléments. Nous dirons dans ce cas que le système se trouve à l'état k. Partant de cet état, il peut au cours d'un intervalle de temps infiniment petit Δt avec une probabilité

$$k\lambda_k\Delta t + o(\Delta t)$$

passer à l'état $(k - 1)$ et avec une probabilité $1 - k\lambda_k\Delta t + o(\Delta t)$ rester à l'état k. Comparant l'état du système pour deux instants infiniment proches du temps t et $t + \Delta t$ nous obtenons, en vertu de la formule des probabilités totales,

$$p_k(t+\Delta t) = [(k+1)\lambda_{k+1}\Delta t + o(\Delta t)]\, p_{k+1}(t) + \\ + [1 - (\lambda_k\Delta t + o(\Delta t))]\, p_k(t) + o(\Delta t).$$

* Pour éviter toute confusion, notons que par *risque* de panne nous comprenons ici la *probabilité de panne au cours d'une petite unité de temps*; plus précisément, la probabilité de panne au cours de l'intervalle $(t, t + \Delta t)$ est $\lambda_k\Delta t + o(\Delta t)$.

Divisant les deux membres de l'égalité par Δt et passant à la limite quand $\Delta t \to 0$, nous obtenons

$$p'_k(t) = (k+1)\lambda_{k+1}p_{k+1}(t) - k\lambda_k p_k(t), \quad k=0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{2.4.12}$$

Pour $k=n$ nous trouvons de façon analogue:

$$p'_n(t) = -n\lambda_n p_n(t).$$

Comme à l'instant initial $t=0$ tous les éléments fonctionnent, nous avons $p_n(0)=1$ et $p_k(0)=0$ quand $k<n$. Utilisons la transformation de Laplace pour résoudre ce système. Posons

$$Q_k(z) = \int_0^\infty p_k(t)e^{-zt}\,dt, \quad k=0, 1, \ldots, n.$$

Multipliant chaque équation par e^{-zt} et intégrant en t nous obtenons

$$-1 + za_n(z) = -n\lambda_n a_n(z),$$

$$za_k(z) = (k+1)\lambda_{k+1}a_{k+1}(z) - k\lambda_k a_k(z),$$

$$k=0, 1, 2, \ldots, (n-1).$$

Résolvant ce système algébrique nous trouvons

$$a_n(z) = \frac{1}{z+n\lambda_n},$$

$$a_k(z) = \frac{(k+1)\lambda_{k+1}a_{k+1}(z)}{z+k\lambda_k} = \frac{(k+1)\lambda_{k+1}\ldots n\lambda_n}{(z+k\lambda_k)\ldots(z+n\lambda_n)}.$$

En particulier

$$a_0(z) = \frac{n!\,\lambda_1\ldots\lambda_n}{z(z+\lambda_1)(z+2\lambda_2)\ldots(z+n\lambda_n)},$$

d'où en vertu de la formule d'inversion nous avons

$$p_0(t) = \frac{n!\,\lambda_1\ldots\lambda_n}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{zt}\,dz}{z(z+\lambda_1)\ldots(z+n\lambda_n)}. \tag{2.4.13}$$

Il est évident que $p_0(t)$ est la probabilité pour qu'à l'instant t tous les éléments soient en panne, autrement dit, pour que le système soit en panne. C'est pourquoi

$$p_0(t) = Q(t) = 1 - P(t).$$

La probabilité de la panne du système s'exprime ainsi par l'intégrale (2.4.13). Cette intégrale peut être exprimée sous forme de la somme

$$Q(t) = 1 - n!\,\lambda_1\ldots\lambda_n\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-k\lambda_k t}}{k\lambda_k\omega(-k\lambda_k)}, \tag{2.4.14}$$

où

$$\omega(x) = (x + \lambda_1)(x + 2\lambda_2) \ldots (x + n\lambda_n).$$

Pour trouver la durée moyenne de vie du système, considérons l'intégrale

$$A(z) = \int_0^\infty P(t)\, e^{-zt}\, dt = \int_0^\infty [1 - p_0(t)]\, e^{-zt}\, dt = \frac{1}{z} - a_0(z).$$

Faisant tendre z vers zéro, nous obtenons

$$A(0) = T_0 = \int_0^\infty P(t)\, dt = \frac{1}{n\lambda_n} + \frac{1}{(n-1)\lambda_{n-1}} + \ldots + \frac{1}{\lambda_1}. \quad (2.4.15)$$

Nous avons considéré l'un des exemples les plus simples du système comportant des éléments liés. Dans le cas général le problème de la détermination de la fiabilité de tels systèmes n'est pas résolu. Il ne s'agit pas ici de l'obtention des formules. Il est toujours possible d'écrire une formule pour exprimer la fiabilité du système avec des éléments liés, si l'on connaît les probabilités conditionnelles de panne de certains éléments sous la condition que les autres sont en panne. Ces formules sont très complexes et contiennent des intégrales du type de convolution. La principale difficulté réside non pas dans la réalisation des calculs d'après ces formules, mais dans le fait que nous ne connaissons pas les probabilités conditionnelles et que leur détermination empirique exige un très grand nombre d'épreuves. Il semble que le problème de l'estimation de la fiabilité des systèmes complexes exige une approche entièrement différente. On peut, par exemple, partager le système en parties, qui sont indépendantes en vertu de considérations physiques, et examiner chacune de ces parties comme un seul élément. Si la fiabilité de ces parties est déterminée de l'expérience, la fiabilité de tout le système peut être alors calculée simplement. D'autres approches sont également possibles pour estimer la fiabilité du système.

Il nous semble que l'approche suivante, très à la mode à l'heure actuelle, offre les meilleures perspectives. Supposons que le fonctionnement de chaque élément soit caractérisé par un paramètre α_k $(k = 1, \ldots, n)$ qui varie d'une manière aléatoire dans le temps. Le fonctionnement du système est caractérisé par le paramètre de sortie u, qui est lié par une relation fonctionnelle avec les paramètres α_k :

$$u = f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Nous estimons que le système fonctionne normalement, si ce paramètre se trouve dans les limites

$$U_1 < u < U_2,$$

et nous disons qu'une panne s'est produite, si le paramètre u sort de ces limites. A l'inégalité

$$U_1 < f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) < U_2 \tag{2.4.16}$$

correspond un certain domaine dans l'espace à n dimensions

$$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Si nous connaissons de l'expérience, à partir de considérations physiques, la nature des processus aléatoires $\alpha_k = \alpha_k(t)$ et si nous connaissons les paramètres de ces processus, il est possible, en principe, de calculer la probabilité pour qu'au cours du temps t le processus aléatoire multidimensionnel $\bar{\alpha}(t)$ ne sorte pas des limites du domaine défini par l'inégalité (2.4.16). En pratique, une solution acceptable de ce problème général n'a été trouvée que pour certains cas concrets. Ainsi, si l'on suppose que le paramètre $u = u(t)$ varie de façon monotone, il suffit alors dans ce cas, pour le fonctionnement sans défaillance du système au cours du temps t, que l'inégalité (2.4.16) ne soit vérifiée qu'à l'instant final du temps t. Or, dans ce cas la probabilité de l'inégalité (2.4.16) peut être trouvée si l'on connaît la distribution unidimensionnelle des fonctions aléatoires $\alpha_k(t)$ à l'instant t. On suppose fréquemment [15] que les fonctions aléatoires $\alpha_k(t)$ sont linéaires

$$\alpha_k(t) = \xi_k t + \eta_k. \tag{2.4.17}$$

La distribution du couple (ξ_k, η_k), qui par hypothèse ne dépend pas du temps, peut être trouvée de la manière suivante. Si sur l'intervalle $(0, T)$ on connaît des réalisations $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$ du processus aléatoire $\alpha_k(t)$, alors pour chacune de ces réalisations nous cherchons une fonction linéaire $x_s t + y_s$ approchant la fonction $\varphi_s(t)$ en moyenne de la meilleure manière. A cette fin nous cherchons le minimum de l'intégrale

$$Y(x_s, y_s) = \int_0^T [\varphi_s(t) - x_s t - y_s]^2 \, dt$$

par rapport à x_s et y_s. Nous obtenons ainsi des couples de nombres $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ que l'on peut considérer comme une série d'observations indépendantes de la variable aléatoire (ξ_k, η_k). Si le nombre d'observations m est suffisamment grand, on peut, avec un degré suffisant d'exactitude, déterminer la loi de distribution du couple (ξ_k, η_k). Si l'on suppose en outre que le domaine à n dimensions défini par l'inégalité (2.4.16) est convexe, alors pour le fonctionnement sans défaillance du système au cours du temps t il faut qu'à un instant final t soit vérifiée l'inégalité (2.4.16). Si nous connaissons la distribution de tous les couples (ξ_k, η_k), nous pou-

vons trouver également la distribution du paramètre de sortie $u(t)$ à l'instant t. La probabilité du fonctionnement sans défaillance du système jusqu'à l'instant t est alors égale à la probabilité de l'inégalité

$$U_1 < u(t) < U_2$$

à cet instant t.

Considérons encore un autre modèle pour lequel la liaison des éléments dans le système est due au fait que la fiabilité de ces éléments est influencée par la variabilité des conditions extérieures.

Supposons que les conditions extérieures dans lesquelles se trouve le système soient données par la grandeur scalaire ou vectorielle $\alpha(t)$, variant en fonction du temps, et que le risque de panne de chaque k-ième élément ne dépende que de la grandeur $\alpha(t)$

$$\lambda_k = \lambda_k(\alpha).$$

Dans ce cas le risque de panne du système ne dépend lui aussi que de $\alpha(t)$

$$\lambda(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(\alpha).$$

La probabilité du fonctionnement sans défaillance du système a évidemment pour expression:

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda[\alpha(\tau)]\,d\tau}. \tag{2.4.18}$$

Si les conditions extérieures varient de façon aléatoire, la fonction de fiabilité est égale à

$$P(t) = \mathrm{M}e^{-\int_0^t \lambda[\alpha(\tau)]\,d\tau}, \tag{2.4.19}$$

où la moyenne est calculée pour toutes les réalisations de $\alpha(t)$. Si l'on suppose que le processus de variation des conditions extérieures soit stationnaire et que le temps t soit grand par rapport au temps de corrélation du processus, on a alors

$$\int_0^t \lambda[\alpha(\tau)]\,d\tau \approx t\mathrm{M}\lambda(\alpha),$$

et alors

$$P(t) \approx e^{-t\mathrm{M}\lambda(\alpha)}, \tag{2.4.20}$$

autrement dit, on peut dans ce cas prendre les valeurs moyennes du risque de panne $\lambda_k = \mathrm{M}\lambda_k(\alpha)$ et estimer que les éléments sont indépendants.

Nous avons considéré quelques approches du problème de l'estimation de la fiabilité du système à éléments indépendants. Naturellement, elles n'épuisent pas toutes les idées ou toutes les approches possibles qui apparaissent dans ce problème difficile et important. Nous avons supposé jusqu'à présent que tous les éléments du système fonctionnent de façon continue sans temps mort. En fait, dans de nombreux systèmes réels, comme, par exemple, dans les calculatrices électroniques, une partie des éléments seulement fonctionne, alors que les autres éléments sont soit débranchés, soit branchés, mais n'accomplissent aucune fonction.

Au cours du temps la durée de l'état de service du système varie, certains éléments passent à l'état de non-fonctionnement, d'autres au contraire entrent en fonctionnement. Supposons que le risque de panne de chaque élément soit constant, mais dépende de l'état de l'élément, s'il fonctionne ou non. Dans ce cas le risque de panne de tout le système est constant sur tous les intervalles, où fonctionne un même groupe d'éléments, et varie par sauts aux instants, où certains éléments passent d'un état à l'autre. Le groupe d'éléments en état de service détermine l'état du système. Soit N le nombre de tous les états possibles du système. A chaque état correspond un risque propre de panne du système

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N.$$

Supposons encore que le processus de succession des états soit *stationnaire* et *ergodique*. Voilà ce que cela signifie: soit $\tau_k(t)$ le temps aléatoire durant lequel le système se trouve à l'état k jusqu'à l'instant t. On a alors avec une probabilité égale à l'unité (convergence presque sûre)

$$\frac{\tau_k(t)}{t} \to p_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

où p_k est la probabilité pour qu'à un instant aléatoire le système se trouve à l'état k.

Si les temps $\tau_1(t), \ldots, \tau_N(t)$ sont connus, alors la probabilité conditionnelle du fonctionnement sans défaillance du système est égale à

$$P(t) = e^{-\lambda_1\tau_1(t) - \ldots - \lambda_N\tau_N(t)}.$$

C'est pourquoi pour les temps aléatoires $\tau_k(t)$ la fonction de fiabilité du système est

$$P(t) = \mathrm{M}e^{-\lambda_1\tau_1(t) - \ldots - \lambda_N\tau_N(t)}.$$

Supposons encore que le temps $t \to \infty$ et que les produits $\lambda_k t$ restent bornés. Alors, avec une probabilité unité, on a

$$P(t) = \mathrm{M}e^{-\sum_{k=1}^{N} \lambda_k t \frac{\tau_k(t)}{t}} \sim e^{-\sum_{k=1}^{N} \lambda_k p_k t}.$$

Cette relation limite signifie que dans les cas où la succession des états se produit avec une vitesse relativement grande, de sorte qu'avant la panne le système a le temps de modifier de nombreuses fois son état, on a la formule approchée

$$P(t) \approx e^{-\sum_{k=1}^{N} \lambda_k p_k t}. \tag{2.4.21}$$

La somme $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k p_k$ peut être considérée comme le risque moyen de panne du système.

Fiabilité d'un système renouvelé. Nous avons considéré jusqu'ici le fonctionnement du système jusqu'à la première panne. Nous sup-

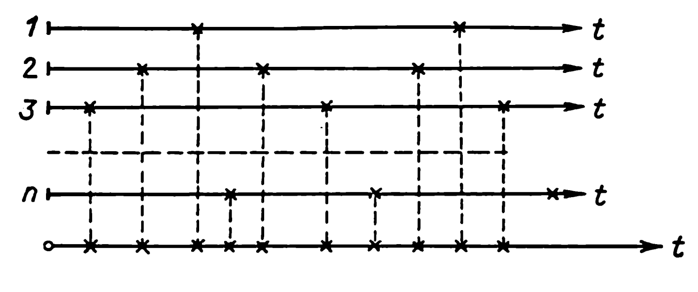


Fig. 2.4.1

poserons maintenant que chaque élément du système soit renouvelé après la panne.

Considérons tout d'abord le cas où le renouvellement a lieu instantanément. Nous estimerons comme plus haut que les propriétés initiales de l'élément sont intégralement rétablies. Supposons encore que le fonctionnement, la panne ou le renouvellement d'un élément n'aient aucune influence sur la fiabilité des autres éléments. Les instants des pannes de chaque élément constituent un processus de renouvellement, et en vertu de nos hypothèses ces processus sont indépendants. Désignons par $F_k(t)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) la loi de distribution de la durée de vie du k-ième élément. Nous supposons comme habituellement que ces lois possèdent une densité continue $f_k(t)$ et que la durée moyenne de vie de l'élément T_k et la variance σ_k^2 existent. Nous ne considérerons plus bas que le cas, où les éléments du système sont reliés (au sens de la fiabilité) en série et où la panne de n'importe quel élément entraîne la panne de tout le système. Si l'on porte les instants des pannes de tous les éléments sur l'axe commun du temps on obtient un flux de pannes du système. Ce flux est la somme de n processus de renouvellement (fig. 2.4.1).

Notre problème consiste à étudier le flux de pannes du système et à trouver ses caractéristiques principales. Soit $\nu_k(t)$ le nombre

10*

aléatoire de pannes du k-ième élément jusqu'à l'instant t, $k = 1, 2, \ldots, n$, et $\nu(t)$ le nombre aléatoire de pannes du système jusqu'à l'instant t. Il est évident que

$$\nu(t) = \nu_1(t) + \ldots + \nu_n(t). \quad (2.4.22)$$

Cela permet de trouver très simplement le nombre moyen de pannes du système jusqu'à l'instant t que nous désignerons par

$$H(t) = \mathbf{M}\nu(t) = \mathbf{M}\nu_1(t) + \ldots + \mathbf{M}\nu_n(t) = \\ = H_1(t) + H_2(t) + \ldots + H_n(t), \quad (2.4.23)$$

où $H_k(t)$ est la fonction de renouvellèment du k-ième élément.

La dérivée

$$h(t) = H'(t)$$

est appelée *intensité des pannes*. Elle est égale au nombre moyen de pannes au cours d'une unité de temps (si cette unité est petite). L'intensité des pannes $h(t)$, qui est la caractéristique principale du flux des pannes, peut être déterminée expérimentalement.

Pour cela nous enregistrons les instants des pannes du système et nous partageons tout le temps des observations en intervalles de longueur h, de sorte que dans chaque intervalle tombe un nombre suffisamment élevé de pannes (non moins de dix). Soient $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ les nombres de pannes compris respectivement dans le premier, le second, le troisième, etc. intervalles. Sur chaque k-ième intervalle nous construisons une colonne de hauteur $\frac{n_k}{h}$. La courbe en escalier ainsi obtenue nous donne une estimation de la fonction $h(t)$. Il est malheureusement très difficile de déterminer l'erreur de cette estimation, car dans le cas général la nature probabiliste du flux de pannes du système est très complexe.

L'égalité (2.4.22) permet de trouver également la distribution du nombre de pannes $\nu(t)$ du système. La formule (2.3.4) nous donne la distribution du nombre de pannes pour un processus de renouvellement

$$\mathbf{P}\{\nu_k(t) = s\} = F_{ks}(t) - F_{ks+1}(t) = P_{ks}(t).$$

Ici $F_{ks}(t)$ désigne la convolution s-uple de la loi de distribution $F_k(t)$.

Introduisons, pour trouver la distribution de $\nu(t)$, la fonction génératrice du nombre de pannes de l'élément

$$P_k(t, z) = \mathbf{M}z^{\nu_k(t)} = \sum_{s=0}^{\infty} P_{ks}(t)\, z^s.$$

Comme les grandeurs $\nu_k(t)$ sont indépendantes, la fonction

génératrice des pannes du système est

$$P(t, z) = \sum_{s=0}^{\infty} p_s(t) z^s = \mathrm{M}z^{\nu(t)} =$$

$$= \mathrm{M}z^{\nu_1(t)} \mathrm{M}z^{\nu_2(t)} \dots \mathrm{M}z^{\nu_n(t)} = P_1(t, z) P_2(t, z) \dots P_n(t, z), \quad (2.4.24)$$

où $p_s(t) = \mathbf{P}\{\nu(t) = s\}$.

Connaissant la fonction génératrice $P(t, z)$, nous pouvons trouver les probabilités cherchées $p_s(t)$

$$p_s(t) = \sum_{s_1 + \dots + s_n = s} p_{1s_1}(t) p_{2s_2}(t) \dots p_{ns_n}(t). \quad (2.4.25)$$

Il est souvent important en pratique de savoir si le système fonctionnera sans défaillance dans l'intervalle $(t, t + \tau)$. Cet événement aura lieu *si et seulement si aucun des éléments ne tombe en panne dans cet intervalle*. Désignons par $p_t(\tau)$ la probabilité de fonctionnement sans défaillance du système dans l'intervalle $(t, t + \tau)$ et par $p_t^{(k)}(\tau)$ la probabilité de fonctionnement sans défaillance de l'élément k dans l'intervalle $(t, t + \tau)$. Comme les éléments sont indépendants, nous avons

$$p_t(\tau) = p_t^{(1)}(\tau) \dots p_t^{(n)}(\tau), \quad (2.4.26)$$

où chaque probabilité $p_t^{(k)}(\tau)$ est déterminée d'après la formule (2.3.26). On aurait pu trouver de nombreuses autres caractéristiques, par exemple: la probabilité d'apparition de s pannes exactement dans l'intervalle $(t, t + \tau)$, la distribution de la s-ième panne du système, la distribution de l'intervalle entre deux pannes consécutives du système, etc. Nous ne nous attacherons pas à la démonstration de toutes ces formules, car de même que les formules (2.4.25) et (2.4.26) elles sont toutes extrêmement compliquées et ne présentent que peu d'intérêt pour la pratique.

Par contre, nous allons considérer les propriétés asymptotiques du flux de pannes du système dont nous tirerons des formules approchées simples et d'application pratique pour les diverses caractéristiques du flux de pannes du système. En règle générale, le système se compose d'un grand nombre d'éléments pouvant s'élever à un millier ou même à des dizaines de milliers. Par ailleurs, chaque élément pris en particulier possède une durée de service relativement élevée et tombe rarement en panne. Le flux de pannes du système est ainsi la somme d'un grand nombre de flux rares de renouvellement. Conformément à nos hypothèses, ces flux sont indépendants. La part de chaque élément dans le flux général de pannes du système est infime, car usuellement le système ne comporte pas d'élément dont le flux de pannes soit d'une intensité comparable à celle du flux de pannes de tout le système. Dans le flux de pannes du système ne sont dépendantes que les pannes qui appartiennent à un même

élément, mais elles sont, avec une probabilité proche de l'unité, séparées par un grand nombre de pannes des autres éléments. Il en découle que l'apparition des pannes dans un intervalle de temps ne modifie pas (ou, plus exactement, ne modifie presque pas) la probabilité d'apparition d'un nombre arbitraire de pannes dans un autre intervalle de temps disjoint du premier. Il découle de ces considérations physiques qu'avec les hypothèses formulées plus haut, le flux de pannes du système est sans post-action. D'autre part, nous avons supposé plus haut que les lois de distribution $F_k(t)$ possèdent des densités de probabilité continues. Il en découle que la fonction $H(t)$, représentant le nombre moyen de pannes, est continue et, comme on peut aisément le démontrer, le flux de pannes du système est ordinaire, autrement dit, la probabilité de l'apparition simultanée de deux pannes est nulle. On démontre en théorie des files d'attente qu'un flux ordinaire, possédant une fonction continue $H(t)$ et dans lequel la post-action est absente, représente un flux non stationnaire simple. Cela signifie que la probabilité d'apparition de s pannes dans tout intervalle (t_1, t_2) a pour expression

$$P_s(t_1, t_2) = \frac{[H(t_2) - H(t_1)]^s}{s!} e^{-[H(t_2)-H(t_1)]}, \tag{2.4.27}$$

et pour tout système d'intervalles disjoints les événements consistant en l'apparition d'un nombre donné de pannes dans un intervalle déterminé sont indépendants. Nous avons ainsi montré que sous des conditions assez générales le flux de pannes du système sera, du moins approximativement, un flux non stationnaire simple. Les raisonnements que nous venons de rapporter ne constituent pas, bien qu'ils soient suffisamment convaincants, une démonstration rigoureuse de cette affirmation. Une telle démonstration existe [16], mais nous ne la rapporterons pas et nous nous bornerons aux propos présentés dans ce qui précède. On voit de la formule (2.4.27) que le nombre de pannes est, sur chaque intervalle de temps, distribué suivant une loi de Poisson. C'est pourquoi un tel flux de pannes est souvent appelé *flux de Poisson à paramètre variable*. Ce paramètre variable est l'intensité des pannes $h(t)$. La formule (2.4.27) peut s'écrire ainsi

$$p_s(t_1, t_2) = \frac{\left[\int_{t_1}^{t_2} h(t)\,dt\right]^s}{s!} e^{-\int_{t_1}^{t_2} h(t)\,dt}.$$

Si dans l'intervalle $(t, t+\tau)$ la fonction $h(t)$ est approximativement linéaire, l'égalité approchée

$$p_s(t, t+\tau) \approx \frac{\left[h\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\tau\right]^s}{s!} e^{h\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\tau} \tag{2.4.28}$$

donne une bonne approximation pour ces probabilités. Si la fonction $h(t)$ est approximativement constante dans cet intervalle, $h(t) \approx h$, on a alors

$$p_s(t,\ t+\tau) \approx \frac{(h\tau)^s}{s!} e^{-h\tau}. \qquad (2.4.29)$$

Cette dernière formule est le plus souvent utilisée.

En particulier, la probabilité de fonctionnement sans défaillance dans l'intervalle $(t,\ t+\tau)$ est

$$p_0(t,\ t+\tau) \approx e^{-[H(t+\tau)-H(t)]}. \qquad (2.4.30)$$

Si, comme précédemment, $h(t)$ est approximativement constante dans cet intervalle, on a

$$p_0(t,\ t+\tau) \approx e^{-h(t)\tau}. \qquad (2.4.31)$$

Il découle de la formule (2.4.30) que le temps moyen s'écoulant jusqu'à la première panne après l'instant t est

$$T_{\text{moy}} = \int_0^\infty e^{-[H(t+\tau)-H(t)]}\,d\tau = e^{H(t)} \int_t^\infty e^{-H(x)}\,dx. \qquad (2.4.32)$$

Si la fonction $h(t)$ ne varie presque pas dans les intervalles entre les pannes consécutives, il découle de (2.4.31) que ce temps moyen a pour expression approchée

$$T_{\text{moy}} \approx \frac{1}{h(t)}. \qquad (2.4.33)$$

Considérons encore quelques caractéristiques de notre flux.

Soient $t_1, t_2, \ldots, t_s$ les instants des pannes consécutives du système. Trouvons la loi de distribution de l'instant t_s de la s-ième panne

$$\mathbf{P}\{t_s < t\} = \mathbf{P}\{\nu(t) \geqslant s\} = \sum_{k=s}^{\infty} \frac{[H(t)]^k}{k!} e^{-H(t)}, \qquad (2.4.34)$$

d'où nous tirons le temps moyen s'écoulant avant la s-ième panne

$$\mathbf{M}t_s = \int_0^\infty \mathbf{P}\{t_s > t\}\,dt = \sum_{k=0}^{s-1} \int_0^\infty \frac{[H(t)]^k}{k!} e^{-H(t)}\,dt.$$

On trouve aisément la loi de distribution du temps s'écoulant entre la s-ième et la $(s+1)$-ième pannes

$$\mathbf{P}\{t_{s+1} - t_s > t\} = \int_0^\infty \frac{[H(t)]^{s-1}}{(s-1)!} e^{-H(x+t)} h(x)\,dx, \qquad (2.4.35)$$

et sa valeur moyenne

$$M(t_{s+1}-t_s)=\int_0^\infty \frac{[H(t)]^s}{s!}e^{-H(t)}\,dt. \qquad (2.4.36)$$

Nous sommes très souvent intéressés par la fiabilité du système dans l'intervalle initial du temps, durant lequel le nombre moyen de pannes éventuelles du système est négligeable devant le nombre d'éléments du système. Cela signifie que

$$H(t)\ll n.$$

Si la fiabilité de tous les éléments est environ du même ordre, il en découle que $H_k(t)\ll 1$ et *a fortiori* que $F_k(t)\ll 1$. Or, nous avons montré que dans ces conditions

$$H_k(t)\approx F_k(t).$$

Cela signifie que

$$H(t)\approx\sum_{k=1}^{n}F_k(t), \qquad (2.4.37)$$

et que l'erreur relative de cette égalité approchée n'excède pas

$$\max_k\frac{F_k(t)}{1-F_k(t)}.$$

L'utilisation de cette égalité approchée simplifie notablement tous les calculs.

Par ailleurs, le fonctionnement du système se poursuit souvent si longtemps que presque tous les éléments du système ont le temps de tomber en panne plusieurs fois. Dans ces conditions les processus de renouvellement deviennent stationnaires et, par conséquent, le flux de pannes du système se stabilise. Etant donné que les densités de renouvellement de chaque élément tendent vers les limites

$$\lim_{t\to\infty}h_k(t)=\frac{1}{T_k},$$

l'intensité des pannes du système a pour limite

$$\lim_{t\to\infty}h(t)=h_0=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{T_k}. \qquad (2.4.38)$$

Le flux du système devient alors un flux de Poisson à paramètre constant, autrement dit un flux simple. Pour ce flux la probabilité d'apparition de s pannes durant un laps de temps τ ne dépend pas de la position de ce laps de temps et a pour expression

$$p_s(\tau)=\frac{(h_0\tau)^s}{s!}e^{-h_0\tau}. \qquad (2.4.39)$$

En particulier, la probabilité de fonctionnement sans défaillance du système au cours du temps τ est égale à $p_0(\tau) = e^{-h_0\tau}$ et, par conséquent, le temps moyen de fonctionnement sans défaillance est

$$T_{\text{moy}} = \frac{1}{h_0}. \tag{2.4.40}$$

Il est bon de noter que si la fiabilité de chaque élément du système suit une loi exponentielle

$$F_k(t) = 1 - e^{-\lambda_k t},$$

alors le processus de renouvellement pour chaque élément constituera un flux simple, et, par conséquent, le flux de pannes du système, étant la somme de flux simples, sera aussi un flux simple d'intensité

$$h = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k. \tag{2.4.41}$$

Fiabilité d'un système à temps de renouvellement fini. Passons maintenant à l'étude de la fiabilité du système dans le cas où le *renouvellement de chaque élément exige un certain temps* que l'on ne peut négliger. Soit $F_k(t)$ la loi de distribution de la durée de vie de l'élément k et $G_k(t)$ la loi de distribution du temps de son renouvellement. Nous supposerons comme toujours que ces lois possèdent des densités continues $f_k(t)$ et $g_k(t)$ et qu'existent les moyennes finies T_{k1} et T_{k2} et les variances σ_{k1}^2 et σ_{k2}^2.

Au cours du renouvellement l'élément du système peut se comporter différemment. Nous ne considérerons que deux cas.

1. Au cours du renouvellement d'un élément le *système est débranché*, ne fonctionne pas. Durant ce temps il ne se produit aucune modification notable dans les autres éléments et, par conséquent, quand l'élément est renouvelé, ils recommencent à fonctionner de la même façon que si le renouvellement était instantané.

2. Au cours du renouvellement d'un élément tous les autres éléments *continuent à fonctionner*. Les pannes et les renouvellements de l'élément n'influent pas sur la fiabilité des autres éléments. Le temps de renouvellement de l'élément ne dépend pas de l'apparition ou de la non-apparition au cours de ce temps des pannes des autres éléments. En d'autres termes, chaque élément tombe en panne et est renouvelé indépendamment des autres.

Etudions tout d'abord le *premier* cas. Nous supposerons, comme plus haut, que le nombre d'éléments du système est grand et que l'intensité des pannes de chacun d'eux constitue une part infiniment petite de l'intensité globale des pannes du système. Dans ces conditions le comportement du système peut aisément être décrit. Les intervalles de fonctionnement du système succèdent aux intervalles de renouvellement.

Les intervalles de fonctionnement pris séparément τ_1', τ_2', ... constituent un flux de Poisson à paramètre variable. La distribution de τ_s' peut être trouvée de la formule (2.4.32). La longueur de chaque intervalle de renouvellement τ_s'' ne dépend pratiquement pas de la longueur des intervalles contigus de fonctionnement et de renouvellement, puisque les pannes se produisant dans un élément sont séparées par de grands intervalles de temps. C'est pourquoi il n'est pas difficile de trouver la distribution des intervalles de renouvellement τ_s''. La probabilité pour qu'au cours d'un laps de temps infiniment petit $(t, t + \Delta t)$ se produise une panne de l'élément k est égale à

$$h_k(t)\,\Delta t + o(\Delta t),$$

et la probabilité d'une panne du système dans cet intervalle est

$$h(t)\,\Delta t + o(\Delta t),$$

où

$$h(t) = \sum_{k=1}^{n} h_k(t).$$

Il en découle que la probabilité conditionnelle de panne de l'élément k dans cet intervalle, sachant qu'une panne du système s'est produite dans cet intervalle, est

$$\frac{h_k(t)\,\Delta t + o(\Delta t)}{h(t)\,\Delta t + o(\Delta t)} = \frac{h_k(t)}{h(t)} + o(1).$$

Cela signifie que la probabilité pour que la panne du système se produisant à l'instant t affecte l'élément k est égale à

$$\frac{h_k(t)}{h(t)}.$$

C'est pourquoi la distribution de la durée de la période de renouvellement, qui a débuté à l'instant t, peut être trouvée en vertu de la formule des probabilités totales

$$\mathbf{P}\{\tau'' < \tau\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k(t)}{h(t)} G_k(\tau). \qquad (2.4.42)$$

La distribution du début de la s-ième période de renouvellement peut être trouvée si l'on connaît la distribution des périodes précédentes de fonctionnement et de renouvellement. Nous pouvons alors, en appliquant à nouveau la formule des probabilités totales, trouver la distribution marginale de la période τ_s''. Une telle voie conduira à des formules très compliquées. C'est pourquoi nous étudierons le flux des pannes et des renouvellements du système par voie quelque peu différente. D'après nos hypothèses, les intensités des pannes

$h_k(t)$ et $h(t)$ varient très lentement. Nous supposerons que dans l'intervalle de temps considéré elles sont constantes

$$h_k(t) \equiv h_k, \quad h(t) \equiv h.$$

Les périodes de fonctionnement seront alors distribuées suivant une loi exponentielle

$$\mathbf{P}\{\tau_i' < t\} = 1 - e^{-ht}, \tag{2.4.43}$$

et les périodes de renouvellement auront, comme il découle de (2.4.42), la distribution

$$\mathbf{P}\{\tau_i'' < t\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k}{h} G_k(t) = G(t), \tag{2.4.44}$$

et toutes ces périodes seront indépendantes. Le flux des pannes et des renouvellements du système constitue ainsi le processus déjà considéré de renouvellement à temps de renouvellement fini.

C'est pourquoi nous pouvons utiliser, pour étudier la fiabilité du système, les caractéristiques trouvées plus haut de ce processus.

Le temps moyen de fonctionnement du système sera en vertu de (2.4.43) égal à

$$T_1 = \int_0^\infty e^{-ht}\, dt = \frac{1}{h}, \tag{2.4.45}$$

et le temps moyen de renouvellement sera égal à

$$T_2 = \int_0^\infty [1 - G(t)]\, dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k}{h} \cdot T_{k2}. \tag{2.4.46}$$

Par conséquent, le coefficient d'aptitude aura dans l'intervalle donné pour expression

$$k_{\text{apt}} + \frac{T_1}{T_1 + T_2} = \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} h_k T_{k2}}. \tag{2.4.47}$$

La probabilité de fonctionnement sans défaillance au cours du temps t sera

$$p(t) = k_{\text{apt}} e^{-ht} = k_{\text{apt}} e^{-\frac{t}{T_1}}. \tag{2.4.48}$$

Si le système fonctionne pendant un temps suffisamment long, les intensités $h_k(t)$ et $h(t)$ s'approcheront de leurs limites

$$\lim_{t \to \infty} h_k(t) = \frac{1}{T_{k1}} \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \infty} h(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{T_{k1}}.$$

Dans ce cas les formules (2.4.45) à (2.4.48) prendront la forme

$$T_1=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{T_{k1}}};\quad T_2=T_1\sum_{k=1}^{n}\frac{T_{k2}}{T_{k1}};\quad k_{\text{apt}}=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{n}\frac{T_{k2}}{T_{k1}}};\quad (2.4.49)$$

$$p(t)=k_{\text{apt}}e^{-\frac{t}{T_1}}.$$

Notons que si le temps de fonctionnement et le temps de renouvellement de chaque élément suivent une loi exponentielle, les formules (2.4.49) sont exactes pour tout intervalle de temps et pour un nombre arbitraire d'éléments.

Passons maintenant à l'étude du *second* cas [17], quand chaque élément fonctionne et est renouvelé indépendamment des autres. Dans ce cas le flux des pannes et des renouvellements du système est la somme de n processus indépendants de renouvellement à temps de renouvellement fini. Pour un tel système on peut trouver aisément le coefficient d'aptitude $k_{\text{apt}}(t)$, égal à la probabilité pour qu'à l'instant t le système soit en état de fonctionnement. Considérons les fonctions aléatoires unitaires $\nu_s(t)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ définies de la façon suivante:

$$\nu_s(t)=\begin{cases}1, & \text{si à l'instant } t \text{ l'élément } s \text{ est en état de fonctionnement},\\ 0, & \text{si à l'instant } t \text{ l'élément } s \text{ est en panne.}\end{cases}$$

La fonction

$$\nu(t)=\nu_1(t)\,\nu_2(t)\ldots\nu_n(t)$$

est alors égale à l'unité si à l'instant t le système est en état de fonctionnement et à zéro s'il est en panne. Les fonctions $\nu_s(t)$ sont par hypothèse indépendantes, de sorte que

$$k_{\text{apt}}(t)=\mathbf{P}\{\nu(t)=1\}=\mathbf{M}\nu(t)=\mathbf{M}\nu_1(t)\,\mathbf{M}\nu_2(t)\ldots\mathbf{M}\nu_n(t)=$$
$$=k_{\text{apt}}^{(1)}(t)\,k_{\text{apt}}^{(2)}(t)\ldots k_{\text{apt}}^{(n)}(t),\quad (2.4.50)$$

où $k_{\text{apt}}^{(s)}(t)$ désigne le coefficient d'aptitude de l'élément s, calculé d'après la formule (2.3.37). Avec le temps le flux des pannes et des renouvellements du système devient stationnaire et pour ce cas

$$k_{\text{apt}}=\frac{T_{11}}{T_{11}+T_{12}}\,\frac{T_{21}}{T_{21}+T_{22}}\cdots\frac{T_{n1}}{T_{n1}+T_{n2}}.\qquad(2.4.51)$$

Pour déterminer les autres caractéristiques du système nous nous limiterons au cas stationnaire, en supposant que le système fonctionne depuis un temps suffisamment grand. Supposons qu'à l'instant t a eu lieu le renouvellement du système. Trouvons la probabilité pour que le système fonctionne sans défaillance au cours du temps τ.

Pour établir cette probabilité considérons les deux événements suivants:

$A(\Delta t, \tau)$, signifiant que dans l'intervalle de temps $(t - \Delta t, t)$ a eu lieu le renouvellement du système et que dans l'intervalle $(t, t + \tau)$ le système a fonctionné sans défaillance;

$A(\Delta t)$, signifiant que dans l'intervalle $(t - \Delta t, t)$ a eu lieu le renouvellement du système.

Il est évident que la probabilité cherchée est égale à

$$p(\tau) = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{P}\{A(\Delta t, \tau) \mid A(\Delta t)\} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{P}\{A(\Delta t, \tau)\}}{\mathbf{P}\{A(\Delta t)\}}.$$

Si l'on néglige les événements dont la probabilité est infiniment petite par rapport à Δt, l'événement $A(\Delta t, \tau)$ se présentera sous forme de somme d'événements disjoints

$$A(\Delta t, \tau) = A_1(\Delta t, \tau) + A_2(\Delta t, \tau) + \ldots + A_n(\Delta t, \tau),$$

où l'événement $A_m(\Delta t, \tau)$ consiste en ce que le m-ième élément est renouvelé dans l'intervalle de temps $(t - \Delta t, t)$ et que les autres éléments fonctionnent alors sans défaillance dans l'intervalle $(t, t + \tau)$. La probabilité de cet événement est égale à

$$\mathbf{P}\{A_m(\Delta t, \tau)\} = \frac{1 - F_m(\tau)}{T_{m1} + T_{m2}} \prod_{s \neq m} \frac{\int_{\tau}^{\infty} [1 - F_s(x)]\, dx}{T_{s1} + T_{s2}} \Delta t + o(\Delta t),$$

d'où nous tirons

$$\mathbf{P}\{A(\Delta t, \tau)\} = \sum_{m=1}^{n} \mathbf{P}\{A_m(\Delta t, \tau)\}.$$

Comme l'événement $A(\Delta t) = A(\Delta t, 0)$, nous avons

$$\mathbf{P}\{A(\Delta t)\} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\Delta t}{T_{m1}} \prod_{s=1}^{n} \frac{T_{s1}}{T_{s1} + T_{s2}} + o(\Delta t).$$

Nous pouvons maintenant trouver la probabilité cherchée

$$p(\tau) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{P}\{A(\Delta t, \tau)\}}{\mathbf{P}\{A(\Delta t)\}} = \frac{\sum_{m=1}^{n} \frac{1 - F_m(\tau)}{T_{m1}} \prod_{s \neq m} \frac{1}{T_{s1}} \int_{\tau}^{\infty} [1 - F_s(x)]\, dx}{\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{T_{m1}}}.$$

Pour donner à cette formule une forme plus compacte, désignons par

$$\Phi_s(\tau) = \frac{1}{T_{s1}} \int_{0}^{\tau} [1 - F_s(x)]\, dx$$

la loi de distribution du potentiel de durée (durée de vie restante) du s-ième élément, et soit $\varphi_s(\tau)=\Phi'_s(\tau)=\frac{1-F_s(\tau)}{T_{s1}}$ sa densité. Introduisons encore la notation

$$\frac{1}{T_0}=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{T_{m1}};$$

T_0 est le temps moyen séparant deux pannes consécutives du système dans le cas du renouvellement instantané. Notre probabilité peut alors s'écrire

$$p(\tau)=T_0\sum_{m=1}^{n}\varphi_m(\tau)\prod_{s\neq m}[1-\Phi_s(\tau)]=-T_0\left\{\prod_{s=1}^{n}[1-\Phi_s(\tau)]\right\}'. \quad (2.4.52)$$

Cela permet de trouver très facilement la durée moyenne de la période de fonctionnement du système

$$T_1=\int_0^\infty p(\tau)\,d\tau=-T_0\prod_{s=1}^{n}[1-\Phi_s(\tau)]\Big|_0^\infty=T_0. \quad (2.4.53)$$

Nous avons ainsi

$$T_1=T_0=\frac{1}{\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{T_{m1}}}.$$

Nous voyons que la durée moyenne de fonctionnement du système s'avère la même que lors du renouvellement instantané.

Supposons maintenant que T_2 soit le temps moyen de renouvellement du système. Dans ce cas, d'une part, le coefficient d'aptitude du système k_{apt} est égal à

$$k_{\text{apt}}=\frac{T_1}{T_1+T_2},$$

et d'autre part, ce coefficient s'exprime par les formules (2.4.51). Egalant ces expressions

$$\frac{T_1}{T_1+T_2}=\frac{T_{11}}{T_{11}+T_{12}}\,\frac{T_{21}}{T_{21}+T_{22}}\cdots\frac{T_{n1}}{T_{n1}+T_{n2}}=k_{\text{apt}},$$

nous obtenons une équation permettant de déterminer le temps moyen T_2:

$$T_2=T_1\frac{1-k_{\text{apt}}}{k_{\text{apt}}}. \quad (2.4.54)$$

Si nous supposons, comme nous l'avons fait plus haut, que le nombre d'éléments est grand et que la part de chaque élément dans le flux des pannes et des renouvellements du système est infiniment petite, nous pouvons alors trouver pour la probabilité $p(\tau)$ une expression

approchée plus simple

$$p(\tau) \approx e^{-\frac{\tau}{T_1}}. \qquad (2.4.55)$$

Cela permet de trouver la probabilité de fonctionnement sans défaillance du système dans l'intervalle $(t, t+\tau)$

$$k_{\text{apt}} p(\tau) \approx k_{\text{apt}} e^{-\frac{\tau}{T_1}}. \qquad (2.4.56)$$

Notons en conclusion que dans le cas, où la durée de vie de l'élément est distribuée suivant une loi exponentielle $F_k(t) = 1 - e^{-\lambda_k t}$ et le temps de renouvellement suivant une loi arbitraire, on peut non seulement déterminer le temps moyen de fonctionnement et de renouvellement du système, mais encore trouver les lois exactes de leur distribution. Indiquons simplement l'idée de ces développements sans en donner une démonstration détaillée.

Remarquons pour cela que dans notre cas les périodes de fonctionnement et de renouvellement du système sont indépendantes et que la période de fonctionnement suit la loi

$$1 - e^{-\lambda t},$$

où

$$\lambda = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k,$$

et la période de renouvellement du système est distribuée suivant une loi arbitraire que nous noterons $\Phi(t)$.

Le coefficient d'aptitude du système est

$$k_{\text{apt}}(t) = k_{\text{apt}}^{(1)}(t) \ldots k_{\text{apt}}^{(n)}(t)$$

et, par conséquent, nous est connu. On peut d'autre part exprimer ce coefficient en fonction de $\Phi(t)$.

Soit

$$\varphi(t) = \Phi'(t) \quad \text{et} \quad \psi(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-x)} \varphi(x)\, dx.$$

La formule (2.3.37) donne alors

$$k_{\text{apt}}(t) = e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-x)} h(x)\, dx, \qquad (2.4.57)$$

où $h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x)$ est la densité des instants de renouvellement du système. On tire de l'équation (2.4.57) la fonction $h(t)$ et détermine la loi cherchée $\Phi(t)$. La transformée de Laplace pour $\Phi(t)$ s'exprime aisément à l'aide de la transformée de Laplace de la fonction $h(t)$.

Chapitre 3

ESTIMATION DES INDICES DE FIABILITÉ D'APRÈS LES RÉSULTATS DES ÉPREUVES

§ 3.1. Essais de fiabilité

L'organisation et la conduite des essais des articles à la fiabilité débordent largement le cadre de l'utilisation exclusive des méthodes mathématiques.

Le principal moment de l'organisation des essais réside dans le choix des paramètres dont l'estimation des valeurs doit constituer l'objet essentiel des essais. Ce choix est avant tout déterminé par la signification physique des caractéristiques proposées et aussi par les points faibles, qui ont été décelés au cours du fonctionnement des articles soumis à l'essai ou lors de l'exploitation des articles fabriqués au préalable. Il est hors de doute que cette étape du travail vient peser de tout son poids sur les chimistes, les physiciens et les ingénieurs. Le rôle du mathématicien apparaît plus tard, quand il devient nécessaire d'estimer la dépendance réciproque des paramètres choisis et d'effectuer le traitement des résultats des essais.

Il est très rare, même pour les éléments relativement simples, condensateurs, résistances, diodes, etc., de pouvoir obtenir une caractéristique suffisamment complète de la fiabilité en mesurant un seul paramètre. En règle générale, on doit connaître plusieurs grandeurs pour pouvoir formuler une représentation concrète de l'article. Par exemple, s'il s'agit de l'axe du piston, il est important de connaître non seulement ses dimensions géométriques (y compris la conicité), mais aussi l'homogénéité de cémentation. Exactement de la même façon une résistance n'est pas suffisamment caractérisée par la valeur de la résistance en ohms. Pour évaluer la fiabilité, un grand rôle appartient à la stabilité de la résistance aux influences thermiques et électriques, à la durée de stockage, à l'influence de l'humidité.

On doit considérer que le deuxième moment important de l'organisation des essais est le choix des conditions extérieures, y compris le régime de travail au cours des essais. Il va de soi que le choix des conditions doit tenir compte dans une grande mesure des particularités du fonctionnement de l'article en cours d'exploitation. Ces conditions (température, humidité, tension, vibrations, chocs, distribution des charges dans le temps, etc.) doivent être différentes pour un lot d'articles destinés à être utilisés dans une région tropicale ou en Arctique, dans une zone désertique ou dans des régions montagneuses.

Les conditions extérieures peuvent exercer une influence excessivement forte sur le caractère de variation des paramètres mesurés. Une illustration intéressante de ce fait a été transmise aux auteurs par L. Kristallinski. Si une partie des articles d'un même lot soumis à l'essai (par exemple, des résistances métallocéramiques) subissent une contrainte continue au cours du temps t, et qu'une autre partie de ces articles subissent également une contrainte au cours

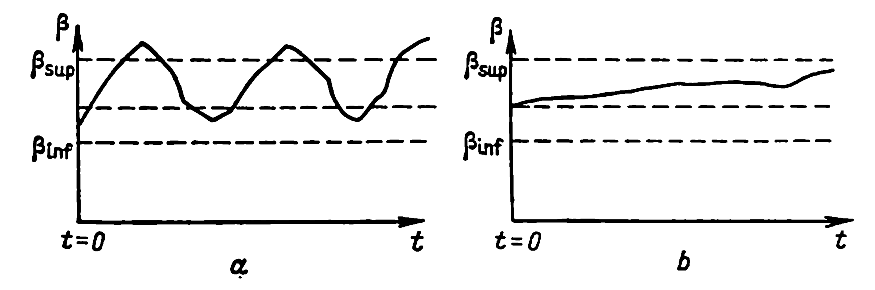


Fig. 3.1.1

d'un même temps global t, mais où les périodes de contrainte alternent avec les périodes de repos, le comportement des paramètres de ces deux groupes d'articles sera notablement différent.

On a représenté sur la figure 3.1.1,*a* le comportement général du gain β d'un transistor. La variation assez forte des ordonnées du graphique en fonction du temps est due à l'instabilité de température. On a représenté sur la figure 3.1.1,*b* la variation de ce même paramètre sous la condition que l'on ait maintenu rigoureusement la stabilité de la température. Si $\beta_{\inf}$ et $\beta_{\sup}$ désignent les limites inférieure et supérieure de la variation admissible du paramètre, on voit que dans le premier cas le paramètre de l'article dépassait la valeur supérieure extrême (on avait relevé une panne), alors que dans le second cas on n'avait pas observé de pannes.

Il semble séduisant d'utiliser les données non seulement des essais spécialement organisés, mais aussi les données relatives aux pannes des équipements fonctionnant dans les conditions réelles. Toutefois, ces données ne peuvent être utilisées directement pour l'analyse des questions de fiabilité. Il faut au préalable les classer suivant les conditions extérieures dans lesquelles a fonctionné l'équipement.

Les considérations physiques et la science d'ingénieur doivent également être mises à la base du choix des limites admissibles de variation des paramètres, de sorte que la sortie des valeurs des paramètres en dehors de ces limites doit être qualifiée de panne. Ces limites sont dans une notable mesure déterminées par la destination des éléments, car pour un appareil on tolère des variations telle-

ment grandes de ses paramètres que pour un autre appareil elles seraient qualifiées de pannes. Nous avons traité en détail de la notion de panne au § 2.1.

L'instant d'apparition de la panne ne peut pas être indiqué à l'avance, il est aléatoire. En fait, tous les paramètres déterminant la fiabilité des articles possèdent un caractère probabiliste, puisque leurs valeurs varient d'un article à l'autre et que cette variation n'est pas organisée, mais aléatoire. Cette circonstance nous oblige à estimer sur la base des essais la distribution des caractéristiques numériques de fiabilité qui nous intéressent ainsi que les liaisons existant entre elles. Nous sommes ainsi arrivés à la position des principaux problèmes de la statistique mathématique: a) *estimation des valeurs des paramètres inconnus des distributions* et b) *vérification de divers genres d'hypothèses statistiques*.

Les essais peuvent être organisés de nombreuses façons. Suivant les règles régissant le déroulement des essais on parle de tel ou tel *plan de leur conduite*. Le plan des essais doit inclure diverses indications, en particulier, le nombre d'articles, d'éléments ou d'équipements qui doivent être soumis à l'essai; quand doit-on effectuer le contrôle des articles (de façon continue ou à des instants donnés à l'avance du temps); remplacer ou ne pas remplacer les articles tombés en panne; quand doit-on cesser les essais ou ajouter de nouveaux articles pour poursuivre les essais.

Nous utiliserons les notations suivantes pour la commodité de l'écriture: nous noterons par la lettre « B » les plans suivant lesquels les éléments tombés en panne ne sont pas remplacés par des éléments neufs, par la lettre « V » les plans suivant lesquels l'élément tombé en panne est remplacé par un élément neuf identique. Supposons que l'observation des pannes est réalisée de façon continue, de sorte que les pannes sont décelées à l'instant même de leur apparition. Nous noterons par r les plans pour lesquels les observations sont conduites jusqu'à l'instant de l'apparition de la r-ième panne, par T les plans pour lesquels les observations sont conduites durant un temps T, mesuré habituellement en heures. On utilise parfois des plans mixtes, pour lesquels les observations sont conduites jusqu'à l'instant t_r d'apparition de la r-ième panne si $t_r < T$, ou jusqu'à l'instant T si $t_r \geqslant T$. Nous désignerons de tels plans par (r, T). Nous adopterons également pour simplifier et préciser la notation des divers plans les conventions suivantes: nous indiquerons tout d'abord le nombre N d'éléments soumis à l'essai, puis la présence ou l'absence du remplacement des articles tombés en panne, et enfin la durée des essais. Le plan, pour lequel on soumet à l'essai N éléments qui ne sont pas remplacés quand ils tombent en panne et pour lequel les observations sont conduites jusqu'à l'instant T, est désigné par $[N, B, T]$. La notation $[N = 100, V, (r = 15, T = 1500)]$ correspond au plan pour lequel on soumet à l'essai

100 éléments, chaque élément tombé en panne est remplacé par un élément neuf et les observations sont conduites soit jusqu'à l'instant t_{15} d'apparition de la 15ᵉ panne, soit au cours de 1500 heures, si $t_{15} \geqslant 1500$. On voit aisément que dans les conditions rapportées six plans différents sont seuls possibles:

$$[N, B, T]; \quad [N, B, r]; \quad [N, B, (r, T)];$$
$$[N, V, T]; \quad [N, V, r]; \quad [N, V, (r, T)].$$

Désignons par $d(t)$ le nombre de pannes s'étant produites avant l'instant t. Par définition la fonction $d(t)$ ne peut décroître et prend successivement les valeurs 0, 1, 2, ... Les points de croissance

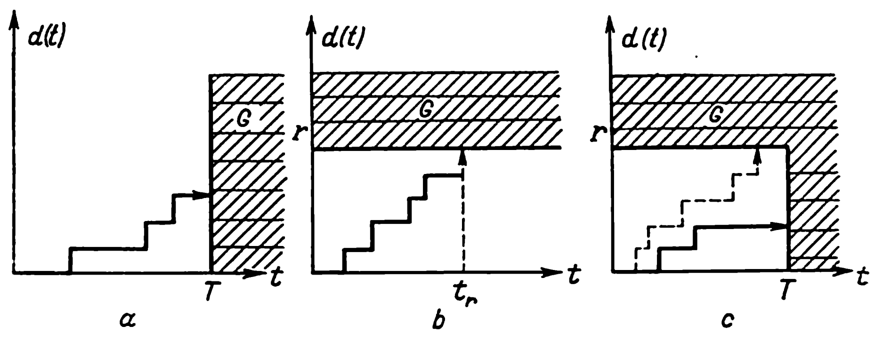


Fig. 3.1.2

de $d(t)$ correspondent aux instants aléatoires du temps t_i. La fonction $d(t)$ que l'on observe réellement au cours des essais est appelée *réalisation* du processus $d(t)$ ou *trajectoire* du processus $d(t)$.

Désignons par G le domaine du plan $(t, d(t))$ tel que l'entrée de la trajectoire du processus $d(t)$ dans ce dernier entraîne l'interruption des essais. Pour les plans $[N, B, T]$ et $[N, V, T]$ nous devons prendre en qualité de G le demi-plan $t > T$. Pour ces plans les essais se terminent à l'instant T, indépendamment de la forme de la trajectoire $d(t)$ (fig. 3.1.2, *a*).

Dans le cas des plans $[N, B, r]$, $[N, V, r]$ (fig. 3.1.2, *b*) les essais cessent à l'instant t_r de la première pénétration de la trajectoire $d(t)$ dans le domaine (l'ensemble) $G = \{(t, d): d \geqslant r\}$. Enfin, pour les plans $[N, B, (r, T)]$, $[N, V, (r, T)]$ les essais cessent à l'instant de la première pénétration de la trajectoire dans le domaine (l'ensemble) $G = \{(t, d): \text{ou } d \geqslant r, \text{ ou } t \geqslant T\}$ (fig. 3.1.2,*c*).

En certains cas les essais peuvent être planifiés sur la base des valeurs obtenues du temps global de fonctionnement. Si l'on désigne par $N(t)$ le nombre d'éléments fonctionnant sans défaillance jusqu'à l'instant t, $N(t) = N - d(t)$, la valeur du temps global de fonctionnement $S(t)$ à l'instant t est déterminée comme la somme des temps

durant lesquels les éléments soumis à l'essai ont fonctionné sans défaillance. Nous avons ainsi

$$S(t)=\int_0^t N(s)\,ds=\sum_{i=1}^{d(t)} t_i+N(t)\,t, \qquad (3.1.1)$$

où t_i sont les instants des pannes des éléments. Comme pour les plans du type V la valeur $S(t) = Nt$, un complément non trivial des six plans indiqués plus haut est donné par les deux plans suivants du type B. Pour le premier plan noté $[N, B, HS_0]$ l'instant de l'interruption des essais t^* est déterminé comme l'instant, où pour la première fois $S(t_N) = S_0$; s'il s'avère que $S(t_N) < S_0$, alors $t^* = t_N$. Pour le second plan l'instant de l'interruption des essais t^* est déterminé comme l'instant, où pour la première fois se produit l'un des deux événements suivants: ou bien $S(t^*) = S_0$ et $d(t^*) < r$, ou bien $t^* = t_r$, mais $S(t^*) < S_0$. Ici t_r est l'instant d'apparition de la r-ième panne. Nous employerons pour ce plan la notation $[N, B, (r, HS_0)]$. Il est bon d'avoir en vue que $[N, B, HS_0] \equiv [N, B, (N, HS_0)$. Nous avons de façon analogue $[N, B, (N, T)] \equiv [N, B, T]$, mais $[N, V, (N, T)] \not\equiv [N, V, T.]$.

On comprend aisément en observant les figures 3.1.2,*a*, *b*, *c* que l'on peut en principe considérer des plans des types B, V, pour lesquels l'instant d'interruption des essais coïncide avec l'instant de la première pénétration dans l'ensemble G dont la frontière, généralement parlant, peut être de forme arbitraire (fig. 3.1.3,*a*). On a montré sur la figure 3.1.3,*b* un plan de Wald du type progressif que nous étudierons en détail au § 4.4 du chapitre suivant. Pour les plans de Wald les frontières de l'ensemble G des points d'interruption des essais sont données sous forme de lignes parallèles L_1 et L_2, tracées en pointillé sur la figure 3.1.3,*b*. L'instant d'interruption t^* est pris égal au premier instant où la trajectoire $d(t)$ atteint l'une des droites L_1 ou L_2.

Une partie des plans des types B et V que nous venons de décrire a déjà été étudiée dans la littérature de fiabilité (cf. par exemple, [1], [2], [3], [4], [13]). On peut avoir besoin en certains cas de plans différents de ceux que nous avons décrits plus haut. Ainsi, lors des essais de réglage des articles nouvellement élaborés, une partie d'entre eux peut être soustraite aux essais. Il en résulte que le nombre l'articles soumis aux essais varie non seulement du fait que certains d'entre eux tombent en panne, mais aussi par suite du prélèvement d'une partie des articles à des fins d'analyse; des indications se rapportant à des plans de ce genre sont données dans le livre [7], p. 355.

Après avoir choisi les conditions extérieures de réalisation des essais, choisi de concert avec le client la caractéristique probabiliste et opté pour un plan de conduite des essais dont toute l'information

est contenue dans la portion de la trajectoire du processus $d(t)$ jusqu'à l'instant de la première pénétration dans l'ensemble G, on doit donner une méthode d'estimation de la caractéristique choisie de fiabilité ou une méthode de construction de l'intervalle de confiance. Ce sera précisément l'objet des paragraphes suivants du présent chapitre.

En conclusion de ce paragraphe formulons quelques remarques présentant plutôt le caractère de suggestions et ne contenant aucune

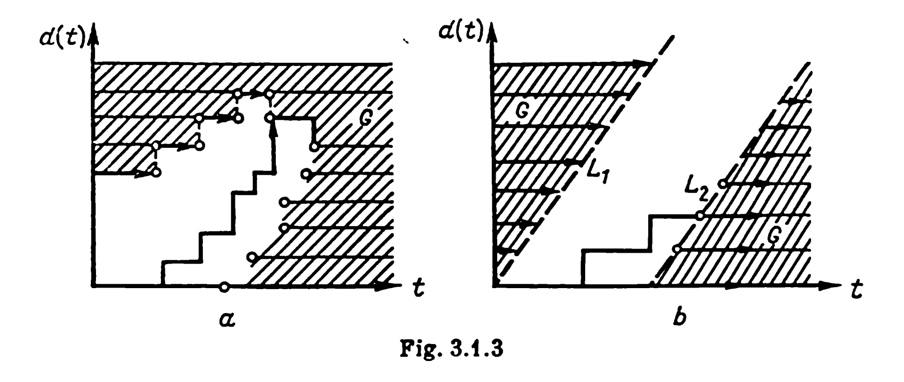


Fig. 3.1.3

solution ni même une indication sur les voies de résolution des problèmes soulevés.

Nous avons souligné au § 2.1 le caractère relatif de la notion de panne, découlant de l'arbitraire inhérent aux notions de limites admissibles. La définition des caractéristiques probabilistes d'après les instants des pannes même avec un niveau de confiance modéré conduit à la nécessité d'entreprendre un nombre considérable d'essais des éprouvettes. On peut fortement réduire le nombre d'articles soumis aux essais, si l'estimation de ces caractéristiques probabilistes est réalisée en tenant compte de toute la gamme de variation des paramètres dans le temps et non pas du seul instant, où se produit la panne. En ne relevant que les instants des pannes nous perdons généralement une grande quantité d'information précieuse et nous devons combler cette perte par le fait que nous conduisons les essais sur un nombre d'articles plus grand. De nombreuses difficultés surgissent lors de la résolution de ce problème. Premièrement, il est indispensable de disposer d'un appareillage spécialisé, permettant de suivre la variation des paramètres des articles soumis aux essais. Deuxièmement, il faut élaborer des modèles théoriques que l'on puisse utiliser pour décrire les processus de variation des paramètres dans le temps et sur la base desquels on effectue l'estimation des caractéristiques probabilistes exigées. Notons à cet égard que souvent les variations des paramètres conduisant à une panne ne peu-

vent être directement mesurées, mais qu'il est possible de mesurer d'autres grandeurs recelant une certaine information sur une panne éventuelle. Supposons, par exemple, que la panne soit déterminée par les valeurs du paramètre $\alpha_1(t)$; ces valeurs ne nous sont pas connues, mais nous connaissons, par contre, celles d'un autre paramètre $\alpha_2(t)$. On sait que $\alpha_1(t)$ et $\alpha_2(t)$ sont deux processus mutuellement dépendants (le caractère de la dépendance mutuelle est défini d'une manière particulière dans chaque cas concret). On demande d'estimer d'après les valeurs de $\alpha_2(t)$ les caractéristiques probabilistes requises du processus $\alpha_1(t)$.

Outre la réduction du nombre d'articles soumis aux essais un problème très actuel est celui de la diminution de la durée des essais. Le fait est que dans de nombreux cas on a besoin de données sur les pannes se produisant au cours d'un intervalle prolongé de fonctionnement ininterrompu, de l'ordre de plusieurs années, et que ces données doivent être obtenues d'après les résultats des essais conduits durant un laps de temps très petit. Il devient nécessaire d'effectuer des essais accélérés, pour lesquels les éléments soumis aux essais (les modèles d'appareillage) se trouvent dans des conditions de fonctionnement plus sévères (température ambiante plus élevée, amplitude ou fréquence accrues des vibrations de la plateforme portant les éprouvettes, tension plus forte, etc.). Sous régimes plus sévères de fonctionnement, les processus de vieillissement évoluent plus rapidement, les pannes se produisent plus vite. On demande de construire des modèles de similitude, qui permettraient d'après les résultats des essais accélérés d'estimer les caractéristiques probabilistes correspondant aux conditions normales de fonctionnement. Nous pensions consacrer un paragraphe de notre livre aux essais accélérés. Toutefois, l'étude de la littérature adéquate et les contacts, que nous avons pris avec les ingénieurs spécialisés dans cette question, nous ont confirmé que cette orientation des études ne se trouve qu'au stade initial de son développement.

Nous estimons que les principaux problèmes du développement de la méthode des essais accélérés sont liés à l'étude de l'aspect physique des processus de vieillissement en fonction des conditions extérieures et du régime de travail. Il nous semble que l'approche habituellement utilisée, basée sur l'établissement d'une similitude entre deux fonctions de répartition empiriques des pannes, l'une pour les conditions extérieures normales et l'autre obtenue pour les conditions des essais accélérés, est insuffisante, car elle ignore complètement les processus physiques de vieillissement qui ont lieu dans les éléments soumis aux essais. La seule exception est constituée par certains travaux relatifs aux essais accélérés des condensateurs. Des données expérimentales intéressantes sur les résultats des essais accélérés sont rapportées dans [6].

§ 3.2. Méthodes générales d'estimation des indices de fiabilité d'après les résultats des essais

Fonction de répartition empirique et histogramme des résultats des essais. On considère dans ce paragraphe les méthodes générales d'obtention des estimations des paramètres déterminant la fiabilité des articles. Ces méthodes peuvent être utilisées lors du traitement des résultats des observations réalisées sur les articles dont les temps de fonctionnement sans défaillance suivent telle ou telle loi de probabilité: exponentielle, de Weibull, lognormale, etc. Toutefois, des difficultés purement techniques nous obligent à nous limiter uniquement aux plans $[N, B, r]$ et $[N, B, T]$. Les résultats qui seront obtenus sont naturellement applicables lors du traitement des résultats des essais non seulement des éléments, mais aussi des systèmes complexes.

Rappelons que le plan $[N, B, N]$ signifie l'essai de N éléments jusqu'à la panne du dernier élément; les éléments tombés en panne ne sont pas remplacés par de nouveaux éléments. Le plan $[N, B, N]$ peut être utilisé soit dans le cas, où les éléments possèdent une fiabilité relativement faible, soit lors de la conduite des essais accélérés. Supposons que les éléments soumis aux essais sont numérotés de 1 à N et que le i-ième élément tombe en panne à l'instant x_i. La première panne a lieu à l'instant $t_1 = \min(x_1, \ldots, x_N)$; $t_1 = x_{i_1}$, où i_1 est le numéro de l'élément qui tombe en panne le premier; i_1 est un nombre aléatoire. La seconde panne se produit à l'instant $t_2 = \min(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_N)$, etc. Enfin, le dernier élément tombe en panne à l'instant $t_N = \max(x_1, \ldots, x_N)$.

En statistique une telle suite ordonnée de nombres $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_N$ est appelée échantillon ordonné associé aux résultats des observations $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

Quand on utilise le plan $[N, B, T]$, on n'observe que les pannes qui se produisent avant l'instant T. Si $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots$ sont les instants successifs des pannes, nous observons en résultat des essais le nombre aléatoire $d(T) = 0, 1, \ldots, N$ de pannes s'étant produites aux instants $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_{d(T)} \leqslant T$. (La panne numéro $d(T) + 1$, si elle est possible, se produit après l'instant T.) Ainsi, $d(T)$ signifie le numéro de la dernière panne qui a lieu avant l'instant T de l'arrêt des essais. Si la fiabilité des éléments est suffisamment élevée dans l'intervalle de temps $(0, T)$, il arrive assez souvent que l'on n'observe pas de pannes et que $d(T) = 0$. Notons maintenant que l'absence de pannes au cours des essais, autrement dit la condition $d(T) = 0$, ne permet pas de conclure que la fiabilité des articles est égale à 1. Nous indiquerons par la suite une règle d'estimation de la fiabilité dans des cas semblables, basée sur la notion d'intervalle de confiance.

Comme nous l'avons indiqué plus haut (§ 2.2), la caractéristique la plus complète de la fiabilité des éléments est la fonction de répartition $F(t)$ du temps de fonctionnement sans défaillance. On peut juger de la forme de la fonction de répartition d'après la fonction empirique de répartition, définie à l'aide de l'égalité $F_N(x) = \frac{k}{N}$

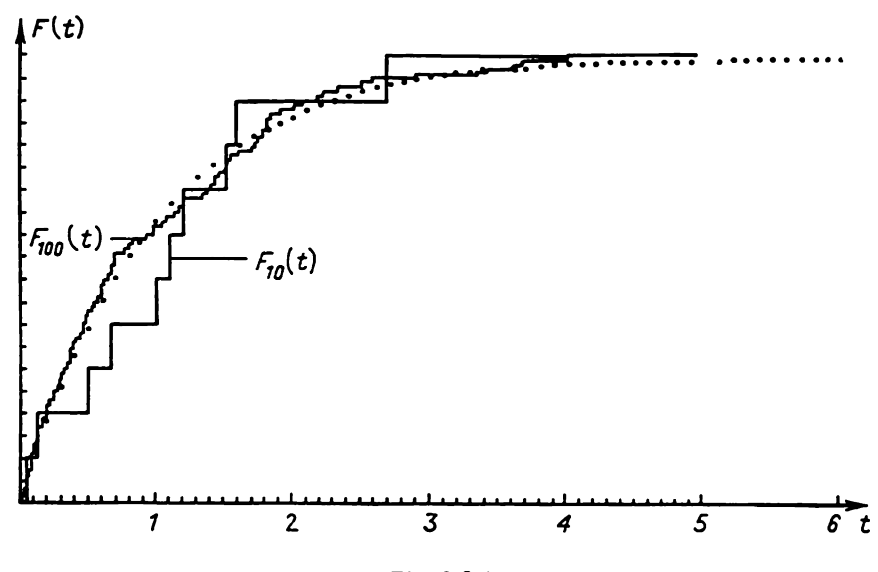


Fig. 3.2.1

pour les valeurs x, $t_k \leqslant x < t_{k+1}$. En vertu du théorème de Glivenko (cf. § 1.6), on peut affirmer avec une probabilité 1 que $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |F_N(x) - F(x)| \to 0$ quand $N \to \infty$. Sur la figure 3.2.1 on a montré les fonctions empiriques de répartition $F_{10}(t)$ et $F_{100}(t)$ pour la fonction théorique de répartition $F(t) = 1 - e^{-t}$. Si l'on utilise le plan $[N, B, T]$, les valeurs de la fonction empirique de répartition $F_N(t)$ ne peuvent être déterminées que pour $t \leqslant T$. Si l'on utilise le plan $[N, B, r]$, les valeurs de la fonction empirique de répartition ne sont définies que jusqu'au niveau $\frac{r}{N}$.

Une estimation de la densité des probabilités $p(t) = \frac{dF(t)}{dt}$ peut être fournie par l'*histogramme* $p_N(t)$. A la différence de la fonction empirique de répartition $F_N(t)$ l'histogramme $p_N(t)$ peut être construit de différentes manières. On peut, par exemple, partager le domaine des valeurs de t en intervalles (S_k, S_{k+1}), $k = 1, \ldots,$

$m, \ldots$ et poser sur chacun de ces intervalles

$$p_N(t)=\frac{d_k}{N}\frac{1}{[S_{k+1}-S_k]}\qquad S_k\leqslant t<S_{k+1},$$

où d_k est le nombre de pannes que l'on a observé sur l'intervalle (S_k, S_{k+1}). On a rapporté sur la figure 3.2.2,*a* un exemple de cons-

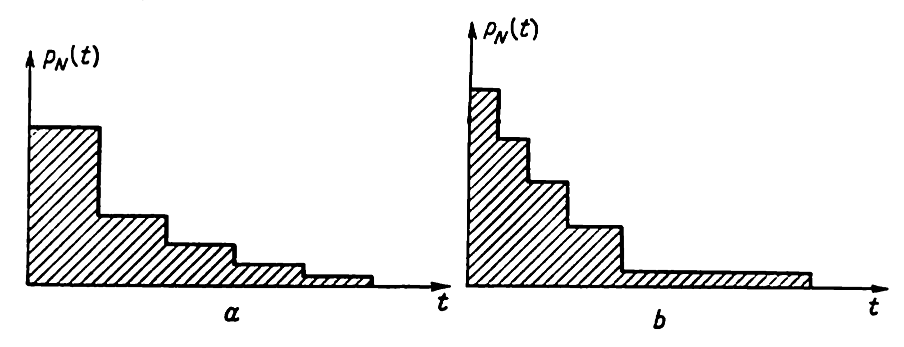


Fig. 3.2.2

truction de l'histogramme pour la loi exponentielle $F(t) = 1 - e^{-t}$, $N = 50$, $S_k - S_{k-1} \approx 0{,}9$.

D'après le second procédé on choisit le nombre des intervalles $k+1$, de sorte que $d=\left[\frac{N}{k}\right]\geqslant 10$, $k\geqslant 5$, et le reste d' de la division $N = kd + d'$ est proche de d. Le premier intervalle est $[0, S_1]$, où S_1 coïncide avec l'instant de la d-ième panne, le second intervalle est $[S_1, S_2]$, où S_2 coïncide avec l'instant de la $2d$-ième panne, etc., enfin le k-ième intervalle est $[S_{k-1}, S_k]$, où $S_k = t_{kd}$. Le dernier $(k+1)$-ième intervalle est $[S_k, t_N]$. Sur chacun des k intervalles du groupement (S_l, S_{l+1}), $l = 0, \ldots, k-1$, on pose

$$p_N(t)=\frac{d}{N}\frac{1}{S_{l+1}-S_l},$$

tandis que

$$p_N(t)=\frac{d'}{N}\frac{1}{t_N-S_k}$$

sur l'intervalle $[S_k, t_N]$ et $p_N(t)=0$ pour les valeurs $t>t_N$. L'histogramme construit d'après ce procédé pour $F(t) = 1 - e^{-t}$, $N = 50$, $k + 1 = 5$, $d = 10$ est représenté sur la figure 3.2.2,*b*. La fonction de risque de panne $\lambda(t)$ est déterminée d'après la formule $\lambda(t)=\frac{p(t)}{R(t)}$, où $R(t) = 1 - F(t)$. Si le nombre N des éléments soumis à l'essai est grand et les intervalles de temps séparant deux pannes successives sont relativement petits, on peut alors construire la fonction empirique de risque de panne. On partage l'axe du temps

en plusieurs secteurs $[S_{i-1}, S_i]$, $i = 1, 2, \ldots, S_0 = 0$. L'estimation de $R(t) = 1 - F(t)$ est donnée par le rapport $\frac{N(t)}{N}$, où $N(t)$ est le nombre d'éléments fonctionnant sans défaillance vers l'instant t; $N(t)$ est une variable aléatoire. On prend en tant qu'estimation de $p(t)$ la valeur $\frac{d_i}{N} \frac{1}{S_i - S_{i-1}}$, où d_i est le nombre d'éléments tombés en panne dans l'intervalle $S_{i-1} < t < S_i$. On définit la fonction empirique de risque de panne par le rapport

$$\lambda_N(t) = \frac{\frac{d_i}{N} \frac{1}{S_i - S_{i-1}}}{\frac{N(t)}{N}} = \frac{d_i}{(S_i - S_{i-1}) N(t)}.$$

Les intervalles $[S_{i-1}, S_i]$ peuvent alors être choisis d'après un procédé analogue à ceux que nous avons décrits plus haut pour la construction de l'histogramme.

Il n'est parfois pas nécessaire de connaître toute la fonction de répartition $F(t)$, sa densité de probabilité $p(t)$ ou la fonction de risque de panne $\lambda(t)$, mais il suffit de connaître seulement certaines caractéristiques: les moments, les quantiles, etc. Dans le cas du plan $[N, B, N]$ le moment du k-ième ordre est défini par la formule

$$\overline{t^k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i^k,$$

et le moment central du k-ième ordre par la formule

$$\overline{(t - \bar{t})^k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (t_i - \bar{t})^k.$$

Le nombre t_p tel que $F(t_p) = p$ est appelé *quantile d'ordre* p. *On appelle quantile empirique* $\hat{t}_p$ d'ordre p l'une des solutions de l'équation $F_N(\hat{t}_p) = p$. Nous supposons partout que $F(t)$ est continue.

Trois types de stabilité statistique. Dans le cas du plan $[N, B, N]$ nous connaissons toute la fonction empirique de répartition $F_N(t)$, et dans le cas du plan $[N, B, T]$ une partie seulement déterminée pour les valeurs $t \leqslant T$. Pour estimer la fonction de répartition $F(t)$ inconnue et ses diverses caractéristiques numériques trois procédés, en principe différents, sont possibles qui correspondent aux diverses conditions réelles pour lesquelles on résout le problème.

Dans le *premier* cas, le plus simple, on connaît à l'avance le type de la loi de distribution $F(t)$. Par exemple, les recherches théoriques et la vérification expérimentale ultérieure ont montré que pour un type déterminé d'éléments et d'appareillage la loi

de distribution du temps de fonctionnement sans défaillance est exponentielle, autrement dit $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geqslant 0$. Seule la valeur du paramètre λ n'est pas connue et doit être estimée d'après les résultats des essais.

Dans le *deuxième* cas on ne dispose pas de considérations théoriques plaidant en faveur d'une loi de distribution $F(t)$ bien déterminée, par exemple. exponentielle, lognormale, etc. Toutefois, les résultats des essais montrent que les fonctions empiriques de

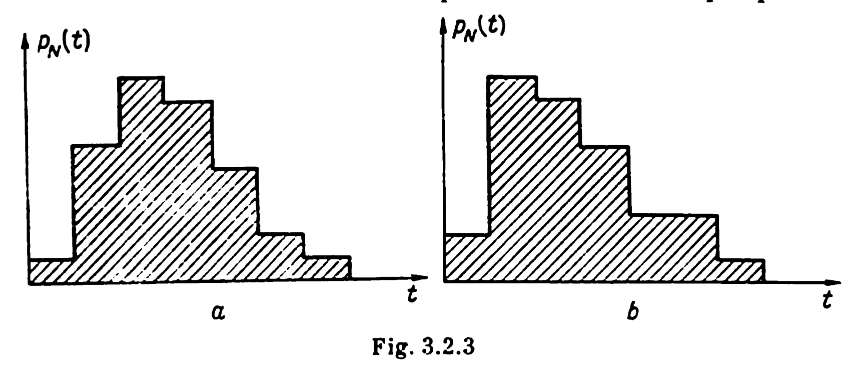


Fig. 3.2.3

répartition peuvent être approchées à l'aide de fonctions de répartition régulières. Le traitement préalable des données expérimentales montre que le caractère qualitatif du comportement des fonctions empiriques de répartition ou des histogrammes ne varie pas d'un lot à un autre. On a montré sur la figure 3.2.3 l'allure de deux histogrammes correspondant à deux lots différents de production. Nous remarquons en analysant la forme des histogrammes que tous les deux présentent une asymétrie prononcée et ont un seul sommet. Dans de tels cas on choisit l'une des familles possibles de distribution, pour laquelle le comportement des fonctions de répartition ou des densités de probabilité correspond aux données expérimentales. Les familles les plus fréquemment utilisées dans la pratique de la théorie de la fiabilité ont été décrites au § 1.2. Si la famille des distributions a été choisie, le problème de la détermination de la fonction $F(t)$ et de ses caractéristiques se ramène à l'estimation, d'après les résultats des essais, des valeurs inconnues des paramètres ou des fonctions de ces paramètres. Par exemple, si nous essayons de décrire approximativement les données à l'aide de la loi lognormale (cf. § 1.2, exemple 11), les valeurs inconnues des paramètres sont μ et σ. Il est alors utile dès le début de comparer les résultats obtenus lors de l'utilisation de deux ou trois types de familles de distribution. Si deux familles donnent des résultats identiquement bons, on opte pour celle d'entre elles pour laquelle on peut proposer une argumentation théorique. Si on ne peut pas avancer de tels

fondements théoriques pour effectuer un choix entre les distributions, on doit préférer celle pour laquelle le volume des calculs nécessaires est moindre.

Un *troisième* cas de conditions de fabrication est néanmoins possible, quand le caractère qualitatif de la fonction empirique $F_N(t)$ varie de lot en lot, ou quand l'approximation de la fonction exige une famille comportant de nombreux paramètres inconnus, ce qui entraîne des calculs laborieux des caractéristiques indispensables. On peut utiliser dans ces cas certaines méthodes de statistique non paramétrique (cf. § 4.5), c'est-à-dire des méthodes qui ne sont pas liées à la forme analytique de la fonction de répartition $F(t)$.

Pour des éléments très fiables la réalisation du plan $[N, B, N]$ ou $[N, V, N]$ nécessite la conduite des essais durant de nombreux milliers d'heures. C'est précisément pour cette raison que l'on utilise souvent divers plans avec une durée fixée des essais ($[N, B, T]$, $[N, V, T]$, $[N, B, (r, T)]$, $[N, V, (r, T)]$, etc.). On doit alors, d'après les observations obtenues au cours d'un intervalle limité du temps, estimer divers indices de fiabilité liés aux pannes qui peuvent se produire après l'instant T, la durée moyenne du fonctionnement sans défaillance au cours du temps $T_d > T$, etc. L'utilisation des résultats obtenus au cours d'un laps de temps limité pour estimer toutes les caractéristiques possibles de fiabilité est fondée dans le *premier* cas, où l'on connaît la forme de la fonction de répartition $F(t)$ avant l'expérience et où seules les valeurs des paramètres déterminant cette loi nous sont inconnues. Tout le paragraphe suivant se rapporte à ce cas avec la seule limitation que l'on considère la fonction de répartition $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Dans le *second* cas on doit disposer d'un matériel statistique suffisant, qui doit confirmer au moins indirectement la validité des estimations numériques obtenues. Une confirmation indirecte de ce genre peut être donnée par le résultat des essais des divers lots d'éléments, que l'on effectue au cours d'une longue période de temps, ou les données relatives aux pannes de l'équipement en service. Un *troisième* cas se présente enfin, quand il n'y a pas de stabilité même qualitative dans le comportement de la fonction empirique de répartition; dans ce cas les estimations de n'importe quelles caractéristiques de fiabilité déterminées d'après les valeurs de $F(t)$ pour $t > T$, où T est la durée des essais, ne sont pas légitimes. Dans ce cas on doit avant tout mettre au point le processus technologique.

Considérons à l'appui des raisonnements qui précèdent l'exemple suivant, dans lequel nous avons intentionnellement « forcé la dose ». Supposons que l'on effectue les essais de $N = 1000$ éléments. Chaque élément se compose de deux parties telles que la panne de l'une d'elles provoque la panne de tout l'élément (par exemple, la couche conductrice du condensateur et les contacts). Les pannes des deux parties sont indépendantes. Ainsi, si

à l'instant t_1 a lieu la panne de la première partie (rupture) et à l'instant t_2 la panne de la seconde partie (le paramètre sort des limites admissibles), on estimera que la panne de l'élément a eu lieu à l'instant $t = \min(t_1, t_2)$. Supposons encore que

$$\mathbf{P}\{t_1 > T\} = e^{-\frac{t}{\theta}}, \qquad \mathbf{P}\{t_2 > t\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

où $\theta = 2000$ heures, $\mu = 1000$ heures, $\sigma = 100$ heures. Toutefois.

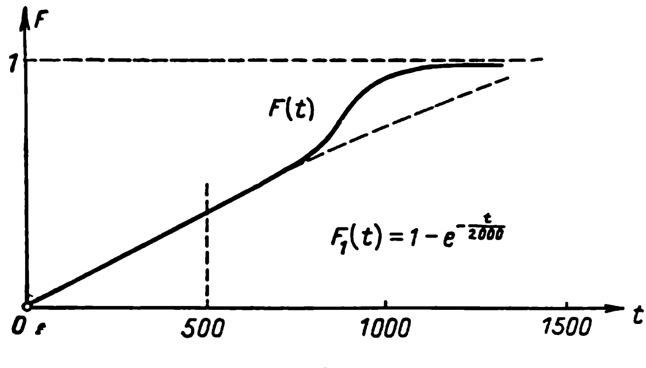


Fig. 3.2.4

l'expérimentateur ne sait pas que la loi de distribution de la durée de fonctionnement sans défaillance est

$$F(t) = 1 - \mathbf{P}\{\min(t_1, t_2) > t\} = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

La forme de la fonction $F(t)$ est montrée sur la figure 3.2.4. On avait décidé de conduire les essais durant $T = 500$ heures. La probabilité de panne du premier élément est

$$F(T) \approx 1 - e^{-\frac{T}{\theta}} = 1 - e^{-0,25}.$$

Nous observons ainsi en moyenne $NF(T) \approx 218$ pannes, et toutes les pannes observées seront pratiquement du *premier* type (*rupture*), car les pannes du *second* type (*sortie des paramètres des limites admissibles*) ne commenceront à se produire qu'après 800 heures de fonctionnement, mais, par contre, vers 1200 heures de fonctionnement presque tous les éléments seront mis hors de service du fait des pannes du second type. Nous n'observons pas de pannes du second type durant un temps $T = 500$ heures, de sorte que nous pensons à tort que la loi est $F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}$, et d'après les résultats de ces essais nous trouvons, en utilisant les méthodes du paragraphe

suivant, une estimation de θ proche de 2000. Ainsi, les résultats des essais effectués durant $T = 500$ heures nous ont conduit à une conclusion erronée au sujet du caractère de la distribution.

La conclusion que l'on peut tirer de cet exemple est la suivante. Il faut d'abord vérifier théoriquement ou expérimentalement (ou, encore mieux, par ces deux voies) que la forme de la fonction $F(t)$ n'est pas modifiée pour des valeurs de t supérieures au temps T de la conduite des essais, et puis procéder à la recherche des estimations des caractéristiques de fiabilité.

Considérons maintenant certaines méthodes générales d'obtention des estimations des paramètres de la distribution du temps de fonctionnement sans défaillance. Une partie de ces méthodes a déjà été exposée sur un plan général au § 1.6. Lors de l'estimation des paramètres d'une famille concrète de distributions, diverses méthodes peuvent être utilisées. Suivant la méthode employée on obtiendra des estimations des valeurs de paramètres différentes les unes des autres. C'est pourquoi il faut comparer les diverses méthodes et par la suite choisir celle qui donne les meilleurs résultats. Dans les cas où les calculs sont exécutés manuellement, on doit lors de l'estimation prendre en considération le volume des calculs.

Méthodes graphiques. Le premier groupe le plus simple de méthodes est celui des méthodes *graphiques* d'estimation. Elles sont applicables à certaines familles $F(t, \alpha, \beta)$, comportant deux paramètres inconnus α et β. Le graphique de la fonction de répartition $F(t, \alpha, \beta)$ peut être présenté sous forme de l'ensemble de points (t, p) du plan, où $p = F(t, \alpha, \beta)$. L'idée principale de la méthode graphique consiste à choisir une transformation continue des coordonnées $t' = h(t)$, $p' = \varphi(p)$ telle que le graphique de la fonction de répartition (t', p'), où $p' = \varphi[F(t, \alpha, \beta)]$, devienne une droite $p' = \psi(\alpha, \beta)\, t' + \chi(\alpha, \beta)$. Si l'on arrive à trouver une telle transformation des variables, toute fonction de répartition de cette famille sur le plan (t', p') peut être présentée sous forme de la droite $p' = \psi(\alpha, \beta)\, t' + \chi(\alpha, \beta)$ ou, ce qui revient au même, sous forme de la droite

$$\varphi[F(t, \alpha, \beta)] = \psi(\alpha, \beta)\, h(t) + \chi(\alpha, \beta). \tag{3.2.1}$$

Utilisons ce fait pour l'estimation des paramètres α et β. Supposons que les résultats des essais nous aient donné N valeurs d'une certaine variable aléatoire (par exemple, de la durée de fonctionnement sans défaillance de l'élément ou de l'intervalle séparant deux pannes de l'appareillage). Nous pouvons construire d'après ces valeurs la fonction empirique de répartition $F_N(t)$. Comme cette fonction empirique est, pour les grandes valeurs de N, proche de la fonction de répartition théorique $F(t, \alpha, \beta)$, le graphique (t', p'_N), où $t' = h(t)$ et $p'_N = \varphi[F_N(t)]$, sera situé après

le changement de variables dans le voisinage immédiat du graphique (t', p') qui est la droite de la forme (3.2.1). Mesurant à l'aide d'une règle la pente k et le terme constant b et égalant les valeurs trouvées aux valeurs théoriques, nous obtenons les équations

$$k=\psi(\alpha, \beta), \qquad b=\chi(\alpha, \beta), \tag{3.2.2}$$

d'où nous tirons les estimations des valeurs inconnues des paramètres α et β.

Il est bon de noter que la méthode graphique est applicable à n'importe quel plan des types $[N, B, r]$, $[N, V, r]$, $[N, B, T]$, $[N, V, T]$, $[N, B, (r, T)]$, $[N, V, (r, T)]$. Par exemple, dans le cas du plan $[N, B, (r, T)]$ nous ne pouvons construire, d'après les résultats des essais, qu'une partie de $F_N(t)$ pour les valeurs $t \leqslant \min(t_r, T)$ et $F_N(t) \leqslant \frac{d(T)}{N}$, où $d(T) \leqslant r$ désigne le nombre d'éléments tombés en panne au cours des essais. Si l'on applique à la partie obtenue de la fonction de répartition empirique la transformation $t' = h(t)$, $p' = \varphi[F_N(t)]$, on obtiendra sur le plan (t', p') un tronçon de ligne brisée proche de l'une des droites de la forme (3.2.1). D'après ce tronçon nous estimons k et b et nous retrouvons les équations (3.2.2).

Considérons en qualité d'exemple trois familles de distributions. Dans le cas de la famille normale de distributions

$$F(t, \mu, \sigma)=\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right), \quad \text{où} \quad \Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{t} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz,$$

considérons en tant que transformation $\varphi(p)$ la fonction $\Phi^{-1}(p)$, inverse de la fonction $p=\Phi(t)$. Nous obtenons alors

$$p'=\varphi[F(t, \mu, \sigma)]=\Phi^{-1}\left[\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right]=\frac{t-\mu}{\sigma}. \tag{3.2.3}$$

Ainsi, (3.2.3) correspond à (3.2.1) quand

$$t'=h(t)=t, \quad \psi(\mu, \sigma)=\frac{1}{\sigma}, \quad \chi(\mu, \sigma)=-\frac{\mu}{\sigma}.$$

Pour faciliter l'application de la méthode, on peut utiliser un papier fonctionnel à échelle gaussienne. On porte en abscisses les valeurs t de la variable aléatoire et en ordonnées les valeurs de la fonction $\Phi^{-1}(p)$. L'axe t passe par l'origine des coordonnées correspondant à $\Phi^{-1}(0, 5)$. Près de chaque valeur $\Phi^{-1}(p)$ on note la valeur correspondante de p (fig. 3.2.5). La fonction de répartition $\Phi(t)$ est alors représentée par la droite $y = x$. A la droite $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ correspond la fonction de répartition d'une variable aléatoire normale de moyenne μ et de variance σ^2. On peut ainsi, à l'aide du papier fonctionnel, vérifier aisément sur le dessin la normalité de la loi de distribution

et simultanément estimer ses paramètres. Si la ligne en escalier présente une courbure notable, cela signifie que la loi véritable de distribution n'est pas normale. Si l'on ne décèle pas de courbure, on peut tracer la droite se confondant le mieux avec la ligne en escalier et estimer ainsi μ et σ: μ est égal à l'abscisse du point A, A étant le point d'intersection de la droite avec l'axe t; σ est égal

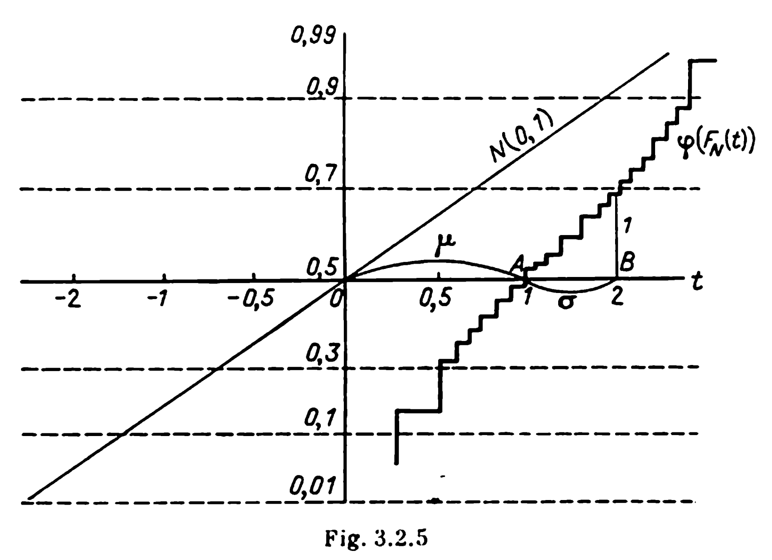


Fig. 3.2.5

à la distance de A à B, B étant le point de l'axe t, où la valeur de la perpendiculaire menée par un point de la droite à l'axe t est égale à 1 (dans les unités de l'échelle de l'axe des abscisses).

Dans le cas de la loi lognormale $F(t, \mu, \sigma) = \Phi\left[\ln\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right]$, de sorte que $p' = \varphi(p) = \Phi^{-1}(p)$, $h(t) = \ln t$, $\psi(\mu, t) = \frac{1}{\sigma}$, $\chi(\mu, \sigma) = \frac{\mu}{\sigma}$.

Si l'on se donne une famille de distributions exponentielles décalées

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{(t-\mu)}{\theta}}, & t > \mu, \\ 0, & t \leqslant \mu, \end{cases}$$

on a

$$\ln \frac{1}{1-F(t)} = \frac{t-\mu}{\theta}, \tag{3.2.4}$$

où $t \geqslant \mu$. C'est pourquoi en qualité de $p' = \varphi(p)$ on choisit la fonction $\varphi(p) = \ln \frac{1}{1-p}$. Comparant (3.2.4) et (3.2.1) nous

voyons que $t' = h(t) = t$, $\psi(\mu, \theta) = \frac{1}{\theta}$, $\chi(\mu, \theta) = -\frac{\mu}{\theta}$.

Enfin, si nous avons une famille de distributions de Weibull

$$F(t, p, \theta) = 1 - e^{-\frac{t^p}{\theta}},$$

alors

$$\lg \lg \frac{1}{1-F(t)} \quad p \lg t - \lg \theta + \lg \lg e. \tag{3.2.5}$$

Comparant (3.2.5) et (3.2.1) nous trouvons que

$$p' = \varphi(p) = \lg \lg \frac{1}{1-p}, \quad t' = h(t) = \ln t,$$

$$\psi(p, \theta) = p, \quad \chi(p, \theta) = -\lg \theta + \lg \lg e.$$

Le papier fonctionnel pour la distribution de Weibull est représenté sur la figure 3.2.6. Ainsi la pente est égale à p, et le logarithme

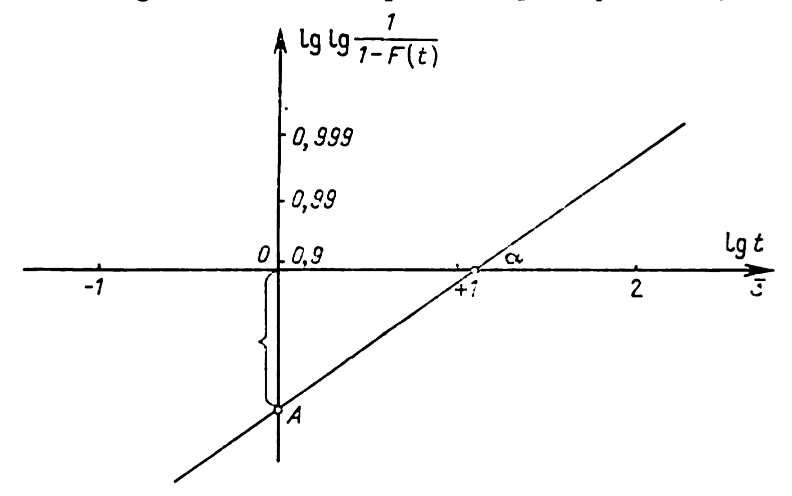


Fig. 3.2.6

de θ est égal à la valeur du segment OA que la droite découpe sur l'axe des ordonnées.

Méthodes des quantiles et des moments. Pour obtenir des estimations des valeurs inconnues des paramètres déterminant la forme de la loi de distribution de la durée de fonctionnement sans défaillance, on peut utiliser les méthodes des moments et des quantiles. Ces méthodes ont été décrites au § 1.6 pour le cas d'un échantillon de taille N. Nous allons considérer ici ces méthodes du point de vue du traitement des résultats des essais obtenus en appliquant certains plans du type B. Pour fixer les idées nous nous bornerons au cas de deux paramètres inconnus α, β.

Supposons que la loi de distribution du temps de fonctionnement sans défaillance $F(t, \alpha, \beta)$ possède une densité de probabilité continûment différentiable, prenant des valeurs positives pour n'importe quelles valeurs des paramètres α, β. Si les essais ont été conduits d'après le plan $[N, B, r]$, $r \gg 1$, on peut considérer l'instant t_{l_i} d'apparition de la l_i-ième panne comme le quantile empirique correspondant au niveau $q_i = \frac{l_i}{N}$, $i = 1, 2, \ldots$ Si l_i et N sont suffisamment grands, on peut estimer (cf. § 1.6) que $\delta t_{l_i} = t_{l_i} - t_{q_i}$ $(i = 1, 2)$ suivent une distribution normale de moyennes zéro et de matrice des variances-covariances

$$\left\| \begin{matrix} \frac{q_1(1-q_1)}{Nf_1^2} & \frac{q_1(1-q_2)}{Nf_1f_2} \\ \frac{q_1(1-q_2)}{Nf_1f_2} & \frac{q_2(1-q_2)}{Nf_2^2} \end{matrix} \right\|,$$

où

$$F(t_{q_i}, \alpha, \beta) = q_i, \quad f_i = \left.\frac{dF(t, \alpha, \beta)}{dt}\right|_{t=t_{q_i}}.$$

Si l'on connaissait la valeur exacte des quantiles t_{q_1}, t_{q_2}, on aurait pu trouver les valeurs des paramètres α et β à partir des équations

$$F(t_{q_1}, \alpha, \beta) = q_1, \quad F(t_{q_2}, \alpha, \beta) = q_2. \tag{3.2.6}$$

Nous ne connaissons que les valeurs approchées de ces quantiles, les instants d'apparition de la l-ième et de la r-ième pannes. Remplaçant dans les équations (3.2.6) les valeurs des quantiles par leurs estimations, nous obtenons les équations

$$F(t_l, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{l}{N}, \qquad F(t_r, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{r}{N}, \tag{3.2.7}$$

dont les solutions $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ sont des estimations consistantes des paramètres α, β quand $N \to \infty$, $\frac{l}{N} = \text{const}$, $\frac{r}{N} = \text{const}$, ce qui découle immédiatement de la continuité de la fonction $F(t, \alpha, \beta)$. On peut démontrer que ces estimations sont, sous des hypothèses extrêmement générales de régularité des fonctions $F(t, \alpha, \beta)$, asymptotiquement non biaisées et asymptotiquement normalement distribuées. C'est pourquoi les indices les plus importants de qualité de ces estimations sont leurs variances.

Illustrons la méthode des quantiles sur l'exemple de la loi de Weibull $F(t, p, \theta) = 1 - e^{-\frac{t^p}{\theta}}$, $t > 0$. On conduit les essais d'après le plan $[N, B, r]$. On choisit la valeur de l $\left(\text{on peut prendre } l \approx \frac{r}{2}\right)$. Les essais permettent de fixer les valeurs t_l et t_r des

instants des l-ième et r-ième pannes. Les équations (3.2.7) peuvent alors s'écrire sous la forme

$$1-e^{-\frac{t_l^p}{\theta}}=\frac{l}{N},\qquad 1-e^{-\frac{t_r^p}{\theta}}=\frac{r}{N}.$$

Résolvant ces équations par rapport aux valeurs inconnues des paramètres p, θ, nous obtenons les estimations

$$\hat{p}=\frac{\ln\ln\frac{N}{N-r}-\ln\ln\frac{N}{N-l}}{\ln t_r-\ln t_l};\quad \hat{\theta}=\frac{\ln\left(\frac{N}{N-l}\right)}{t_l^{\hat{p}}}.$$

Si l'on suppose que $F(t, \alpha, \beta)$ possède des dérivées partielles continues du second ordre par rapport à t et aux paramètres α, β, on peut alors, en utilisant l'artifice habituel (cf. § 1.6) de développement en série de Taylor, obtenir une expression approchée pour la variance des estimations des paramètres α, β.

Introduisons les notations $q_i=\frac{l_i}{N}$; $F(t_{q_i}, \alpha, \beta)=q_i$; $\delta t_i = t_{l_i}-t_{q_i}$, $i=\overline{1,2}$; $\delta\alpha=\hat{\alpha}-\alpha$; $\delta\beta=\hat{\beta}-\beta$. Nous trouvons alors de l'équation (3.2.7)

$$F(t_{l_1}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})=F(t_{q_1}, \alpha, \beta)+\frac{\partial F(t_{q_1}, \alpha, \beta)}{\partial t}\delta t_{l_1}+$$
$$+\frac{\partial F(t_{q_1}, \alpha, \beta)}{\partial\alpha}\delta\alpha+\frac{\partial F(t_{q_1}, \alpha, \beta)}{\partial\beta}\delta\beta+o(\delta t, \delta\alpha, \delta\beta)=q_1.$$

Notant que $F(t_{q_1}, \alpha, \beta)=q_1$, nous obtenons aux infiniment petits d'ordres supérieurs près

$$\frac{\partial F(t_{q_1}, \alpha, \beta)}{\partial t}\delta t_{l_1}+\frac{\partial F(t_{q_1}, \alpha, \beta)}{\partial\alpha}\delta\alpha+\frac{\partial F(t_{q_1}, \alpha, \beta)}{\partial\beta}\delta\beta=0.\qquad(3.2.8)$$

D'une manière analogue nous trouvons que

$$\frac{\partial F(t_{q_2}, \alpha, \beta)}{\partial t}\delta t_{l_2}+\frac{\partial F(t_{q_2}, \alpha, \beta)}{\partial\alpha}\delta\alpha+\frac{\partial F(t_{q_2}, \alpha, \beta)}{\partial\beta}\delta\beta=0.\qquad(3.2.8')$$

Résolvant les équations linéaires (3.2.8) et (3.2.8′) par rapport aux erreurs $\delta\alpha$ et $\delta\beta$, nous les obtenons sous forme de combinaisons linéaires de δt_{l_1} et δt_{l_2}:

$$\delta\alpha=a_{\alpha l_1}\delta t_{l_1}+a_{\alpha l_2}\delta t_{l_2},\qquad \delta\beta=a_{\beta l_1}\delta t_{l_1}+a_{\beta l_2}\delta t_{l_2}.$$

Nous pouvons alors, en utilisant la matrice des moments du second ordre pour les quantiles t_{l_1} et t_{l_2}, trouver les variances

des erreurs

$$\left.\begin{aligned} D(\hat{\alpha}) &\simeq a_{\alpha t_1}^2 M(\delta t_{t_1})^2 + 2a_{\alpha t_1}a_{\alpha t_2} M\delta t_{t_1}\delta t_{t_2} + a_{\alpha t_2}^2 M(\delta t_{t_2})^2, \\ D(\hat{\beta}) &\simeq a_{\beta t_1}^2 M(\delta t_{t_1})^2 + 2a_{\beta t_1}a_{\beta t_2} M\delta t_{t_1}\delta t_{t_2} + a_{\beta t_2}^2 M(\delta t_{t_2})^2, \\ \operatorname{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) &= \sum a_{\alpha_i} a_{\beta_j} M\delta_{t_i}\delta_{t_j}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.9)$$

Nous obtenons en particulier dans le cas de la loi de Weibull

$$D(\hat{p}) \simeq \frac{\theta^2}{N\left[\ln\left(\frac{t_{q_2}}{t_{q_1}}\right)\right]^2}\left[\frac{q_1(1-q_1)}{t_{l_1}^{2p}} e^{\frac{t_{l_1}^p}{\theta}} - \right.$$

$$\left. -2\frac{q_1(1-q_2)}{(t_{l_1}t_{l_2})^p} e^{\frac{t_{l_1}^p + t_{l_2}^p}{\theta}} + \frac{q_2(1-q_2)}{t_{l_2}^{2p}} e^{\frac{t_{l_2}^p}{\theta}}\right].$$

La méthode des quantiles peut sous une forme légèrement modifiée être également utilisée dans le cas des plans $[N, B, T]$. Dans ce cas nous pouvons écrire au lieu des équations (3.2.6)

$$F(T_1, \alpha, \beta) = q_1, \quad F(T_2, \alpha, \beta) = q_2, \qquad (3.2.10)$$

où $T_1 < T_2 \leqslant T$. Or, les valeurs $F(t, \alpha, \beta)$ sont inconnues pour $t = T_1$ et $t = T_2$. Nous ne connaissons que les nombres $d(T_1)$ et $d(T_2)$ des pannes s'étant produites aux instants T_1 et T_2. Pour des grandes valeurs de N les rapports $\frac{d(T_1)}{N}$ et $\frac{d(T_2)}{N}$ sont proches des valeurs théoriques q_1 et q_2. C'est pourquoi, en remplaçant dans (3.2.10) q_1, q_2 par leurs estimations, nous obtenons les équations

$$F(T_1, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{d(T_1)}{N}, \quad F(T_2, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{d(T_2)}{N} \qquad (3.2.11)$$

pour trouver les estimations $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$. Utilisant le développement de la fonction $F(t, \alpha, \beta)$ en série de Taylor suivant les paramètres α et β, nous pouvons trouver les expressions approchées pour la variance des estimations.

Dans l'ouvrage [7], consacré aux méthodes paramétriques en statistique, on donne la solution du problème du choix le plus rationnel des niveaux des quantiles pour le cas des essais $[N, B, N]$ et des lois normale et exponentielle. Si la taille de l'échantillon N est grande, on peut, pour obtenir les estimations des paramètres, utiliser non pas toutes les données, mais seulement les valeurs des k quantiles empiriques $t_{N_1}, \ldots, t_{N_k}$ choisis d'une manière adéquate, où $N_k = [Np_k] + 1$, $0 < p_1 < \ldots < p_k < 1$. Les nombres $p_1, \ldots$ $\ldots, p_k$ sont alors choisis de telle manière que les variances des erreurs des paramètres inconnus soient minimales. Par exemple,

pour le cas de la loi exponentielle du type $F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}$ l'estimation est recherchée sous forme de la combinaison linéaire

$$\hat{\theta}^* = \sum_{i=1}^{k} b_i t_{N_i}, \tag{3.2.12}$$

où les coefficients b_i et les nombres N_i sont choisis de telle manière que la variance des estimations soit minimale. On sait que la meilleure estimation pour le paramètre θ quand on utilise toutes les données est $\hat{\theta} = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^{N} t_i$. Le calcul du rapport des variances $\varkappa_k = \frac{D[\hat{\theta}]}{D[\theta^*]}$ de ces estimations en fonction du nombre choisi k de quantiles a montré que

$$\varkappa_1 = 0{,}65, \quad \varkappa_2 = 0{,}82, \quad \varkappa_3 = 0{,}89, \quad \varkappa_{10} = 0{,}98.$$

On trouve dans l'ouvrage [7] des tables des valeurs optimales de p_i et b_i; ainsi pour $k = 2$, $p_1 = 0{,}64$, $b_1 = 0{,}52$, $p_2 = 0{,}93$, $b_2 = 0{,}18$.

De même que la méthode des quantiles, la méthode des moments ne peut être utilisée que pour le traitement des résultats des observations pour lesquelles le nombre de pannes est suffisamment élevé. Si les essais sont conduits conformément au plan $[N, B, T]$, la densité de probabilité conditionnelle de l'instant de la panne, sachant que cette panne a eu lieu au cours du temps T de l'essai, est égale à $\frac{f(t, \alpha, \beta)}{F(T, \alpha, \beta)}$. Nous avons ainsi pour le moment d'ordre k se rapportant aux pannes observées

$$\int_0^T t^k \left[\frac{f(t, \alpha, \beta)}{F(T, \alpha, \beta)}\right] dt = \varphi_k(\alpha, \beta). \tag{3.2.13}$$

Si $d(T)$ est le nombre de pannes enregistrées au cours du temps T et si les instants des pannes sont $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{d(T)} \leqslant T$, les moments empiriques du premier et du second ordres sont respectivement égaux à $\frac{\sum_{i=1}^{d(T)} t_i}{d(T)}$ et $\frac{\sum_{i=1}^{d(T)} t_i^2}{d(T)}$. Si $d(T)$ est suffisamment grand, alors en vertu de la loi des grands nombres les valeurs des moments empiriques sont proches des valeurs théoriques. Egalant dans (3.2.13) les valeurs des moments théoriques aux valeurs des moments empiriques, nous obtenons des équations pour déterminer les estimations $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$:

$$\varphi_j(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{\sum_{i=1}^{d(T)} t_i^j}{d(T)}, \qquad j = 1, 2. \tag{3.2.14}$$

Si les essais avaient été conduits conformément à un plan du type $[N, B, r]$, $r \gg 1$, on aurait pu alors obtenir les équations correspondantes pour déterminer les estimations à partir des valeurs moyennes pour les termes de la série ordonnée des observations. Nous avons ici

$$\gamma_i(\alpha, \beta) = \mathbf{M}t_i =$$

$$= \frac{N!}{(i-1)!(N-i)!} \int_0^\infty tf(t, \alpha, \beta) F(t, \alpha, \beta)^{i-1} [1 - F(t, \alpha, \beta)]^{N-i} dt. \tag{3.2.15}$$

Choisissant deux numéros d'ordre $l < k \leqslant r$, nous obtenons des équations pour déterminer les estimations

$$\gamma_l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = t_l, \qquad \gamma_k(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = t_k, \tag{3.2.16}$$

où $\gamma_i(\alpha, \beta)$ est défini par la formule (3.2.15).

Notons en conclusion que l'on peut également utiliser des méthodes mixtes, quand l'une des équations servant à déterminer les estimations est décrite conformément à la méthode des quantiles et l'autre suivant la méthode des moments. La comparaison de l'efficacité des diverses méthodes peut être faite en confrontant les variances des estimations obtenues. On peut alors appliquer des méthodes asymptotiques analogues à celle de développement en série de Taylor avec une utilisation ultérieure de la distribution asymptotiquement normale des écarts. C'est par cette méthode que l'on a obtenu les expressions (3.2.9) pour les variances des estimations dans la méthode des quantiles. L'expression de la matrice des covariances des moments est donnée au § 1.6.

En qualité d'exemple pour illustrer la méthode des moments, considérons l'estimation des paramètres α, β dans le cas, où la densité de probabilité des pannes appartient à la famille des distributions gamma $f(t, \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t}$ et où les essais sont effectués suivant le plan $[N, B, N]$. Etant donné que

$$\varphi_1(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \varphi_2(\alpha, \beta) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}, \tag{3.2.17}$$

que les estimations de φ_1 et φ_2 sont $\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i$, $\overline{t^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i^2$, alors en remplaçant dans (3.2.17) les moments par leurs estimations, nous obtenons les équations

$$\bar{t} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}, \qquad \overline{t^2} = \frac{\hat{\alpha}(\hat{\alpha}+1)}{\hat{\beta}^2}.$$

Les solutions de ces équations sont de la forme

$$\hat{\beta} = H_1(\bar{t}, \overline{t^2}) = \frac{\bar{t}}{\overline{t^2} - (\bar{t})^2}, \quad \hat{\alpha} = H_2(\bar{t}, \overline{t^2}) = \frac{(\bar{t})^2}{\overline{t^2} - (\bar{t})^2}. \quad (3.2.18)$$

Introduisons les notations $\delta\bar{t} = \bar{t} - \frac{\alpha}{\beta}$, $\delta\overline{t^2} = \overline{t^2} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$ et utilisons le développement en série de Taylor

$$\left.\begin{aligned} \hat{\beta} &\approx \beta + \left[\frac{\partial H_1(\bar{t}, \overline{t^2})}{\partial \bar{t}}\right]\delta\bar{t} + \left[\frac{\partial H_1(\bar{t}, \overline{t^2})}{\partial \overline{t^2}}\right]\delta\overline{t^2}, \\ \hat{\alpha} &\approx \alpha + \left[\frac{\partial H_2(\bar{t}, \overline{t^2})}{\partial \bar{t}}\right]\delta\bar{t} + \left[\frac{\partial H_2(\bar{t}, \overline{t_2})}{\partial \overline{t^2}}\right]\delta\overline{t^2}. \end{aligned}\right\} \quad (3.2.19)$$

Les symboles $\left[\frac{\partial H_i}{\partial \bar{t}}\right]$, $\left[\frac{\partial H_i}{\partial \overline{t^2}}\right]$ signifient que l'on considère les valeurs des dérivées pour

$$\bar{t} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \overline{t^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}.$$

Notons maintenant que

$$\mathbf{M}(\delta\bar{t})^2 = \mathbf{D}[\bar{t}] \cong \frac{\alpha}{N\beta^2}, \quad \mathbf{M}(\delta\overline{t^2})^2 \cong \mathbf{D}[\overline{t^2}] \simeq \frac{1}{N}\frac{2\alpha(\alpha+1)(2\alpha+3)}{\beta^4},$$

$$\mathbf{M}(\delta\bar{t}\delta\overline{t^2}) \cong \frac{1}{N}\frac{2\alpha(\alpha+1)}{\beta^3}. \quad (3.2.20)$$

Nous trouvons de (3.2.19) et (3.2.20) les expressions des variances et de la covariance des estimations, obtenues d'après la méthode des moments

$$\begin{cases} \mathbf{D}(\hat{\alpha}) = \mathbf{M}(\hat{\alpha} - \alpha)^2 \approx \frac{2\alpha(\alpha+1)}{N}, \\ \operatorname{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \mathbf{M}(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta) \approx \frac{2\beta(\alpha+1)}{N}, \\ \mathbf{D}(\hat{\beta}) = \mathbf{M}(\hat{\beta} - \beta)^2 \approx \frac{(2\alpha+3)\beta^2}{N\alpha}. \end{cases}$$

Méthode du maximum de vraisemblance. On utilise le plus souvent pour estimer les paramètres la méthode dite *du maximum de vraisemblance*. La description de cette méthode a été donnée au § 1.6, où il avait été spécifié que, sous des limitations du type de régularité, on peut obtenir à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance des estimations asymptotiquement efficaces. Toutefois, les plans du type $[N, B, N]$ peuvent très rarement être utilisés lors des essais des éléments très sûrs, car leur exécution exige une grande durée des essais. Dans ce cas on peut utiliser d'autres plans $[N, B, r]$, $[N, B, (r, T)]$, etc. $(r \ll N)$. La question se pose de déterminer la qualité des estimations obtenues en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance pour des plans différents

du plan $[N, B, N]$. A l'heure actuelle les auteurs n'ont pas connaissance de résultats tant soit peu importants dans ce domaine. Toutefois, l'idée principale de la méthode d'obtention des estimations du maximum de vraisemblance reste la même. Dans le cas du plan $[N, B, N]$ l'ensemble des données obtenues après le déroulement des essais avait une structure homogène. En résultat de chaque essai nous obtenons N nombres $t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_N$ correspondant aux instants des pannes. Dans le cas des autres plans la structure de l'ensemble des données obtenues peut varier d'un essai à l'autre. Il peut se faire, par exemple, que lors de l'utilisation du plan $[N, B, (r, T)]$ au cours de la durée T des essais aucune panne ne se produise (événement A_0) ou que d pannes se produisent (événement A_d), $d \leqslant r$. Dans le cas de l'événement A_0 l'ensemble des données est un ensemble vide, il n'y a pas de données; dans le cas de l'événement A_d, $d \leqslant r$, l'ensemble des données est l'ensemble de d nombres $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_d \leqslant T$. Nous obtenons ainsi, dans le cas général, des données appartenant à des sous-ensembles d'un type déterminé, pour lesquels sont données des familles de distributions dépendant des valeurs inconnues des paramètres. Pour le plan $[N, B, (r, T)]$ cette distribution des probabilités est de la forme: la probabilité de l'événement A_0 est $p(A_0, \alpha, \beta) = [1 - F(T, \alpha, \beta)]^N$, la densité de probabilité de la réalisation de l'événement A_d, $d < r$, pour lequel les pannes ont eu lieu aux instants $t_1, \ldots, t_d$, est égale à

$$p(A_d, t_1, \ldots, t_d, \alpha, \beta) = N(N-1)\ldots$$
$$\ldots(N-d+1) \prod_{i=1}^{d} p(t_i, \alpha, \beta)\,[1-F(T, \alpha, \beta)]^{N-d};$$

la densité de probabilité de l'événement A_r pour lequel les pannes ont eu lieu aux instants $t_1, \ldots, t_r$ est

$$p(A_r, t_1, \ldots, t_r, \alpha, \beta) = N(N-1)\ldots(N-r+1) \prod_{i=1}^{r} p(t_i, \alpha, \beta),$$

où $p(t, \alpha, \beta) = \frac{dF(t, d, \beta)}{dt}$. Si l'on considère les résultats des essais comme un ensemble de nombres aléatoires, la probabilité ou la densité de probabilité des résultats des essais (dans notre exemple $p(A_0, \alpha, \beta)$, $p(A_d, t_1, \ldots, t_d, \alpha, \beta)$, $d \leqslant r$) sont aussi des variables aléatoires. De même que pour le cas du plan $[N, B, N]$ ces variables aléatoires sont appelées fonctions de vraisemblance. Pour estimer les paramètres α, β nous choisissons un couple de nombres $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ tels que la valeur de la fonction de vraisemblance pour des valeurs fixées des résultats des essais soit maximale. Les estimations que l'on obtient de la sorte sont alors appelées *estimations du maximum de vraisemblance*. La condition nécessaire

d'existence d'un maximum d'une fonction de deux variables est l'égalité à zéro de ses dérivées partielles par rapport à α et β. Si la fonction ne s'annule pas, on peut, pour rechercher le point où la fonction admet un maximum, égaler à zéro les dérivées partielles du logarithme de cette fonction. Pour le plan $[N, B, (r, T)]$ et l'événement A_d, $d \leqslant r$, les équations du maximum de vraisemblance sont de la forme

$$\frac{\partial L(A_d, t_1, \ldots, t_d, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial L(A_d, t_1, \ldots, t_d, \alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0, \quad (3.2.21)$$

où $L(A_d, t_1, \ldots, t_d, \alpha, \beta) = \ln p(A_d, t_1, \ldots, t_d, \alpha, \beta)$. En règle générale, les équations (3.2.21) sont des équations transcendantes et leur solution manuelle exige une grande dépense de temps. Toutefois, si on conduit systématiquement les essais en utilisant un seul et même plan, il devient rationnel d'utiliser un ordinateur pour réaliser les calculs. Dans ce cas il faut au préalable s'assurer de l'existence des solutions de (3.2.21). Si la solution de ces équations n'est pas unique, il faut faire appel à des considérations complémentaires pour choisir l'une d'entre elles. Pour la loi exponentielle $F(t, \theta) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}$ l'équation de vraisemblance (dans le cas d'un paramètre il y aura une seule équation) peut, en règle générale, être résolue explicitement. Nous étudierons en détail ce cas dans le paragraphe suivant.

Notons en conclusion de ce paragraphe que l'expression explicite de la fonction de vraisemblance permet d'écrire directement l'ensemble des statistiques exhaustives (cf. § 1.6), recelant toute l'information sur les paramètres à estimer. Il faut seulement pour cela utiliser le critère de factorisation (cf. § 1.6). En ce qui concerne le plan $[N, B, (r, T)]$, nous obtenons du critère de factorisation que si la fonction de vraisemblance peut être mise sous la forme

$$p(A_d, t_1, \ldots, t_d) = \varphi(S_1, \ldots, S_k, \alpha, \beta)\, h(t_1, \ldots, t_d), \quad (3.2.22)$$

où $S_1, \ldots, S_k$ sont des fonctions de $t_1, \ldots, t_d$, et $h(t_1, \ldots, t_d)$ ne dépend pas de α, β, alors $S_1, \ldots, S_k$ sont des statistiques exhaustives pour le couple de paramètres α, β. Par exemple, si

$$p(t, \alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t},$$

alors

$$p(A_d, t_1, \ldots, t_d) = N \ldots (N-d+1) \times$$
$$\times \frac{\beta^{d\alpha}(t_1, \ldots, t_d)^{d-1}}{\Gamma(\alpha)^d} e^{-\beta \sum\limits_1^d t_i} \left[\int\limits_T^\infty \frac{\beta^{\alpha} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t}\, dt\right]^{N-d}. \quad (3.2.23)$$

C'est pourquoi, posant $h(t_1, \ldots, t_d) \equiv 1$ et comparant (3.2.23) et (3.2.22), nous obtenons que les statistiques $S_1 = d$; $S_2 =$

$= \prod_{i=1}^{d} t_i$, $S_3 = t_1 + \ldots + t_d$ sont exhaustives pour les paramètres α, β. Dans le cas où $d = r$, les statistiques exhaustives seront $S_2 = \prod_{i=1}^{r} t_i$, $S_3 = t_1 + \ldots + t_r$. Malheureusement, il n'existe pas toujours des statistiques exhaustives différentes de l'ensemble complet $t_1, \ldots, t_d$. En particulier, elles n'existent pas pour la famille de distributions de Weibull (cf. [8]).

§ 3.3. Estimation du paramètre de la loi exponentielle

Deux raisons nous poussent à consacrer à l'estimation du paramètre λ de la loi exponentielle $F(t, \lambda) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t > 0$, un paragraphe spécial. Premièrement, la loi exponentielle a trouvé de sérieuses applications dans les problèmes de la théorie de la fiabilité, et à l'heure actuelle il existe un grand nombre de travaux consacrés à cette question. Deuxièmement, dans le cas de la loi exponentielle de nombreux problèmes peuvent être résolus sous forme explicite et la réponse peut être donnée sous forme de formules simples. On peut ainsi sur l'exemple de la loi exponentielle exposer les principales idées des méthodes d'obtention des estimations, sans les obscurcir par des calculs compliqués. Notons à cet égard que, dans la littérature de fiabilité [5], on suppose habituellement, lors de l'estimation des paramètres de la loi de Weibull $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t^p)$, que la valeur du paramètre p est connue. Or, dans cette hypothèse la loi de Weibull peut, par un changement de variable du temps $t' = t^p$, être ramenée à la loi exponentielle. La loi dite exponentielle logarithmique pour laquelle $F(t) = 1 - (t + 1)^{-\lambda}$, $t > 0$, $\lambda > 0$ peut aussi, à l'aide du changement de variable $t' = \ln(t + 1)$, être ramenée à la loi exponentielle. Ainsi, les estimations que nous rapportons plus bas peuvent, compte tenu du changement de la variable du temps, être utilisées dans ces cas également.

Le paramètre principal, pour lequel nous construisons dans ce paragraphe les estimations, est la grandeur λ. Nous aurions pu toutefois construire une estimation pour le paramètre $\theta = \lambda^{-1}$, égal à la valeur moyenne du temps de fonctionnement sans défaillance. Il peut, en certains cas, être nécessaire d'obtenir des estimations pour la probabilité de fonctionnement sans défaillance au cours du temps T_d, $R(T_d) = e^{-\lambda T_d}$. A la fin du paragraphe nous donnerons des formules pour les estimations non biaisées de $R(T_d)$, correspondant aux plans $[N, B, r]$, $[N, V, r]$.

Plans du type V. Considérons tout d'abord les plans des essais avec renouvellement des éléments tombés en panne $[N, V, T]$,

$[N, V, r]$, $[N, V, (r, T)]$. Pour ces plans les instants des pannes observées forment un flux de Poisson d'intensité $\Lambda = \lambda N$ (cf. § 1.5). En effet, comme les durées de fonctionnement sans défaillance des éléments sont mutuellement indépendantes, la suite $\{t_{ik}\}$, $k = 1, \ldots, N$, $i = 1, 2, \ldots$ des instants de remplacement des éléments dans la k-ième cellule du stand forme un processus de renouvellement (cf. § 2.2) pour lequel les intervalles $S_{i,k} = t_{i+1,k} - t_{i,k}$ sont des variables mutuellement indépendantes distribuées suivant une loi exponentielle $\mathbf{P}\{S_{i,k} > t\} = e^{-\lambda t}$. Or, un tel processus de renouvellement est un flux de Poisson (cf. § 1.5) d'intensité λ. Les instants de remplacement des éléments (les pannes) sont mutuellement indépendants, de sorte que les flux poissoniens des instants de remplacement correspondant à N cellules différentes du stand sont aussi mutuellement indépendants. Comme le flux de toutes les pannes qui ont lieu au cours des essais est la superposition de N flux poissoniens mutuellement indépendants d'intensités λ, il sera aussi un flux poissonien d'intensité $\Lambda = \lambda N$. Cette affirmation est une conséquence immédiate des résultats du chapitre 2.

Plan $[N, V, T]$. Dans le cas du plan $[N, V, T]$ nous observons un flux poissonien des pannes d'intensité $\Lambda = \lambda N$ au cours du temps T. Soit $d(T)$ le nombre de pannes observées qui ont eu lieu aux instants $t_1, \ldots, t_{d(T)}$. La densité de probabilité de cet événement peut être obtenue de la façon suivante. La probabilité pour que la première panne ait lieu dans l'intervalle $(t_1, t_1 + dt_1)$ est égale à $\Lambda e^{-\Lambda t}\, dt_1$, la probabilité conditionnelle pour que la seconde panne ait lieu dans l'intervalle $(t_2, t_2 + dt_2)$, sachant que la première panne a eu lieu dans l'intervalle $(t_1, t_1 + dt_1)$, est égale à $\Lambda e^{-\Lambda (t_2 - t_1)}\, dt_2$, etc. Enfin, la probabilité conditionnelle pour que la $d(T)$-ième panne ait lieu dans l'intervalle $(t_{d(T)}, t_{d(T)} + dt_{d(T)})$ et que dans l'intervalle $(t_{d(T)} + dt_{d(T)}, T)$ il n'y ait pas eu d'autres pannes, sachant que les pannes ont eu lieu dans les intervalles $(t_1, t_1 + dt_1), \ldots, (t_{d(T)-1}, t_{d(T)-1} + dt_{d(T)-1})$, est égale à $\Lambda e^{-\Lambda (t_{d(T)} - t_{d(T)-1})} dt_{d(T)}\, e^{-\Lambda (T - t_{d(T)})}$. La probabilité de l'événement, consistant en ce que les pannes ont eu lieu dans les intervalles $(t_1, t_1 + dt_1), \ldots, (t_{d(T)}, t_{d(T)} + dt_{d(T)})$, est égale au produit de ces probabilités conditionnelles

$$\Lambda e^{-\Lambda t_1} \Lambda e^{-\Lambda (t_2 - t_1)} \ldots \Lambda e^{-\Lambda (t_{d(T)} - t_{d(T)-1})} \times \\ \times e^{-\Lambda (T - t_{d(T)})}\, dt_1 \ldots dt_{d(T)} = \Lambda^{d(T)} e^{-\Lambda T}\, dt_1 \ldots dt_{d(T)}.$$

Ainsi, la densité de probabilité de l'apparition des pannes aux instants $t_1, \ldots, t_{d(T)}$ est égale à

$$p(A_d, t_1, \ldots, t_{d(T)}) = \Lambda^{d(T)} e^{-\Lambda T}. \qquad (3.3.1.$$

La probabilité pour qu'au cours de la durée des essais T aucune panne n'ait lieu est

$$P(A_0) = e^{-\Lambda T}. \tag{3.3.2}$$

Considérant (3.3.1) et (3.3.2) comme des fonctions de vraisemblance, nous obtenons l'équation du maximum de vraisemblance

$$\frac{\partial \ln p(A_d, t_1, \ldots, t_{d(T)})}{\partial \Lambda} = \frac{\partial (d(T) \ln \Lambda - \Lambda T)}{\partial \Lambda} = \frac{d(T)}{\Lambda} - T, \tag{3.3.3}$$

dont la solution est de la forme

$$\hat{\Lambda} = \frac{d(T)}{T}. \tag{3.3.4}$$

Comme $\Lambda = \lambda N$, l'estimation du paramètre λ sera

$$\hat{\lambda} = \frac{d(T)}{NT}. \tag{3.3.5}$$

Etant donné que $\mathbf{P}\{d(T) = d\} = \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T}$, nous avons

$$\mathbf{M}\hat{\lambda} = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{d}{NT} \frac{(\lambda NT)^d}{d!} e^{-\lambda NT} = \lambda \sum_{d=1}^{\infty} \frac{(\lambda NT)^{d-1}}{(d-1)!} e^{-\lambda NT} = \lambda, \tag{3.3.6}$$

autrement dit, l'estimation (3.3.5) est non biaisée.

$$\mathbf{D}[\hat{\Lambda}] = \mathbf{M}(\hat{\Lambda})^2 - (\mathbf{M}\hat{\Lambda})^2 = \sum_{d=0}^{\infty} \left(\frac{d}{T}\right)^2 \frac{(\Lambda T)^2}{d!} e^{-\Lambda T} - \Lambda^2 =$$

$$= \left(\Lambda^2 + \frac{\Lambda}{T}\right) - \Lambda^2 = \frac{\Lambda}{T}, \tag{3.3.7}$$

$$\mathbf{D}[\hat{\lambda}] = \mathbf{D}\left[\frac{\hat{\Lambda}}{N}\right] = \frac{1}{N^2} \mathbf{D}[\hat{\Lambda}] = \frac{\lambda N}{N^2 T} = \frac{\lambda}{NT}. \tag{3.3.7'}$$

On peut démontrer que cette estimation est efficace. Notons également qu'il découle de la forme de la densité (3.3.1) que dans le cas du plan $[N, V, T]$ la statistique exhaustive est seulement le nombre $d(T)$ de pannes s'étant produites au cours de la durée des essais et que les instants des pannes $(t_1, \ldots, t_{d(T)})$ n'apportent aucune information complémentaire sur le paramètre λ.

Exemple. Les essais étaient conduits suivant le plan $[N = 100, V, T = 200]$. Les pannes ont eu lieu aux instants $t_1 = 51$, $t_2 = 78$, $t_3 = 110$, $t_4 = 135$, $t_5 = 180$. Le nombre total de pannes est $d(200) = 5$. Nous trouvons d'après la formule (3.3.5) que

$$\hat{\lambda} = \frac{5}{100 \cdot 200} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}.$$

Plan $[N, V, r]$. Nous obtenons pour le plan $[N, V, r]$, en raisonnant de manière analogue, que la probabilité pour que les pannes

aient lieu dans les intervalles $(t_1, t_1 + dt_1), \ldots, (t_r, t_r + dt_r)$ est égale à

$$\Lambda e^{-\Lambda t_1} dt_1 \Lambda e^{-\Lambda(t_2-t_1)} dt_2 \ldots \Lambda e^{-\Lambda(t_r-t_{r-1})} dt_r = \Lambda^r e^{-\Lambda t_r} dt_1 \ldots dt_r.$$

Il en découle que la densité de probabilité de l'apparition des pannes aux instants $t_1, \ldots, t_r$ est égale à

$$p(t_1, \ldots, t_r, \lambda) = \Lambda^r e^{-\Lambda t_r}. \qquad (3.3.8)$$

Il découle de (3.3.8) que la statistique exhaustive pour l'estimation du paramètre λ est l'instant t_r de l'apparition de la r-ième panne. L'équation du maximum de vraisemblance est de la forme

$$\frac{\partial \ln p(t_1, \ldots, t_r, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial (r \ln \Lambda - \Lambda t_r)}{\partial \Lambda} = 0, \qquad (3.3.9)$$

d'où nous obtenons l'estimation

$$\hat{\Lambda}_1 = \frac{r}{t_r}. \qquad (3.3.10)$$

Notons maintenant que $t_r = t_1 + (t_2 - t_1) + \ldots + (t_r - t_{r-1})$, autrement dit, t_r est la somme des r intervalles séparant des pannes consécutives. Nous avons montré plus haut (§ 2.3) que ces intervalles sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes de densité de probabilité $\Lambda e^{-\Lambda t}$. C'est pourquoi la densité de probabilité de t_r, égale à la convolution de r densités $p(t) = \Lambda e^{-\Lambda t}$, est de la forme

$$p(t_r) = \frac{\Lambda^r t_r^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\Lambda t_r}. \qquad (3.3.11)$$

Nous obtenons de (3.3.11) et (3.3.10)

$$M\hat{\Lambda}_1 = \int_0^\infty \frac{r}{t_r} \frac{\Lambda^r t_r^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\Lambda t_r} dt_r =$$

$$= \frac{r\Lambda}{(r-1)!} \int_0^\infty \Lambda^{r-1} t_r^{r-2} e^{-\Lambda t_r} dt_r = \frac{r\Lambda}{r-1}, \quad r > 1. \qquad (3.3.12)$$

Par conséquent, l'estimation $\hat{\Lambda}_1$ obtenue par la méthode du maximum de vraisemblance est biaisée et pour $r = 1$ son espérance mathématique est infinie. On peut éliminer ce biais, en considérant l'estimation

$$\hat{\Lambda}_1 = \frac{r-1}{t_r}, \quad r > 1. \qquad (3.3.13)$$

Il découle de (3.3.13) et (3.3.12) que $\mathbf{M}\hat{\Lambda}_1=\Lambda$. Nous rappelant que $\Lambda=\lambda N$, nous obtenons une estimation non biaisée pour λ

$$\hat{\lambda}=\frac{\hat{\Lambda}_1}{N}=\frac{r-1}{Nt_r}. \tag{3.3.14}$$

Les variances des estimations (3.3.13) et (3.3.14) s'expriment par les formules

$$\mathbf{D}[\hat{\Lambda}_1]=\int_0^{\infty}\frac{(r-1)^2}{t_r^2}\,\frac{\Lambda^r t_r^{r-1}}{(r-1)!}\,e^{-\Lambda t_r}\,dt_r-\Lambda^2=\frac{\Lambda^2}{r-2}, \tag{3.3.15}$$

$$\mathbf{D}[\hat{\lambda}]=\mathbf{D}\left[\frac{\hat{\Lambda}_1}{N}\right]=\frac{\mathbf{D}[\hat{\Lambda}_1]}{N^2}=\frac{(\lambda N)^2}{N^2(r-2)}=\frac{\lambda^2}{r-2}. \tag{3.3.16}$$

Les variances des estimations n'existent que pour les valeurs $r>2$.

Exemple. Les essais étaient conduits conformément au plan $[N=200,\ V,\ r=10]$. L'instant, où l'on a enregistré la dixième panne, est $t_{10}=551$ heures. Nous trouvons de la formule (3.3.14) l'estimation

$$\hat{\lambda}=\frac{9}{200\cdot 551}=8{,}17\cdot 10^{-5}\ \text{pannes/heure}.$$

Plan $[N,\ V,\ (r,\ T)]$. Lors de l'étude du plan plus général $[N,\ V,\ (r,\ T)]$ les essais cessent soit à l'instant T, et dans ce cas on observe $d(T)<r$ pannes, soit à l'instant t_r de l'apparition de la r-ième panne, si $t_r<T$. Dans le premier cas la densité de probabilité de l'apparition des pannes aux instants $t_1,\ \ldots,\ t_{d(T)}$ s'écrit d'après la formule (3.3.1), et dans le second cas la densité de probabilité de l'apparition des pannes aux instants $t_1,\ \ldots,\ t_r$ d'après la formule (3.3.8). Nous obtenons alors, en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance sous la forme exposée à la fin du paragraphe précédent, une estimation pour Λ

$$\hat{\Lambda}_1=\begin{cases}\dfrac{d(T)}{T}, & \text{si } t_r>T,\\[2mm] \dfrac{r}{t_r}, & \text{si } t_r\leqslant T.\end{cases}$$

Par analogie avec le cas du plan $[N,\ V,\ r]$ que nous venons de considérer, nous pouvons améliorer cette estimation en éliminant le biais. Introduisons l'estimation non biaisée

$$\hat{\Lambda}=\begin{cases}\dfrac{d(T)}{T}, & \text{si } t_r>T,\\[2mm] \dfrac{r-1}{t_r}, & \text{si } t_r\leqslant T.\end{cases} \tag{3.3.17}$$

En effet, en utilisant la formule des espérances mathématiques conditionnelles, nous obtenons

$$\mathbf{M}\hat{\Lambda} = \mathbf{M}(\hat{\Lambda} \mid t_r > T)\,\mathbf{P}(t_r > T) + \mathbf{M}(\hat{\Lambda} \mid t_r \leqslant T)\,\mathbf{P}\{t_r \leqslant T\} =$$

$$= \sum_{d=0}^{r-1} \frac{d}{T} \mathbf{P}\{d(T) = d\} + \int_0^\infty \frac{r-1}{s} d_s \mathbf{P}\{t_r < s\} =$$

$$= \sum_{d=0}^{r-1} \frac{d}{T} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} + \int_0^T \frac{r-1}{s} \frac{\Lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\Lambda s}\, ds =$$

$$= \Lambda \sum_{d=0}^{r-2} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} + \Lambda \sum_{d=r-1}^{\infty} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} = \Lambda.$$

De manière analogue on peut trouver la variance de cette estimation $\hat{\Lambda}$

$$\mathbf{D}[\hat{\Lambda}] = \mathbf{M}\hat{\Lambda}^2 - (\mathbf{M}\hat{\Lambda})^2 = \frac{\Lambda}{T} \sum_{d=0}^{r-2} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} + \frac{\Lambda^2}{r-2} \sum_{d=r-2}^{\infty} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T}. \tag{3.3.18}$$

Pour l'estimation non biaisée des paramètres $\left(\hat{\lambda} = \frac{\hat{\Lambda}}{N},\ \mathbf{M}\hat{\lambda} = \lambda\right)$ nous avons

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \dfrac{d(T)}{NT}, & \text{si } t_r > T_1, \\ \dfrac{r-1}{Nt_r}, & \text{si } t_r \leqslant T_1, \end{cases} \tag{3.3.19}$$

$$\mathbf{D}[\hat{\lambda}] = \mathbf{D}\left[\frac{\hat{\Lambda}}{N}\right] = \frac{1}{N^2} \mathbf{D}[\hat{\Lambda}] = \frac{\lambda}{NT} \sum_{d=0}^{r-2} \frac{(\lambda NT)^d}{d!} e^{-\lambda NT} +$$

$$+ \frac{\lambda^2}{r-2} \sum_{\lambda=r-2}^{\infty} \frac{(\lambda NT)^d}{d!} e^{-\lambda NT}. \tag{3.3.20}$$

En conclusion de la partie du paragraphe consacrée aux plans du type V notons le résultat suivant. A la fin du § 3.1 nous avons indiqué la classe générale des plans de conduite des essais, pour lesquels l'instant d'interruption des essais t^* était défini comme l'instant, où la trajectoire $(t, d(t))$ atteint la frontière du domaine G. Ici $d(t)$ est le nombre d'éléments tombés en panne vers l'instant t. Supposons que la frontière Γ du domaine G soit une fonction non croissante de t (fig. 3.3.1).

Divisons les points de la frontière Γ en deux classes. Appelons le point (t, d) un point de la classe A si à droite de ce point au niveau d tous les points n'appartiennent pas au domaine G. Les points de

la classe A sont sur la figure 3.3.1 marqués par un petit cercle. Les points de la frontière Γ qui ne sont pas des points de la classe A seront appelés points de la classe B. Sur la figure 3.3.1 ces points sont indiqués par des lignes fines continues. Si à l'instant, où la trajectoire $(t, d(t))$ touche pour la première fois la frontière Γ, le point $(t^*, d(t^*)) \in \Gamma$ est un point de la classe A, alors l'estimation est réalisée d'après la formule

$$\hat{\lambda} = \frac{d(t^*)}{Nt^*}.$$

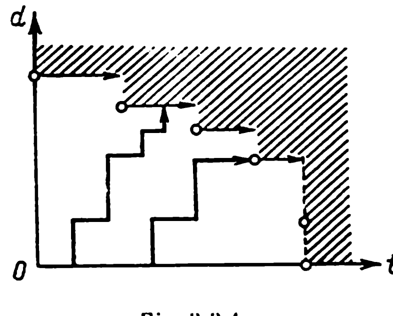


Fig. 3.3.1

Si le point $(t^*, d(t^*))$ est un point de la classe B, alors l'estimation de λ est donnée par la formule

$$\hat{\lambda} = \frac{d(t^*)-1}{Nt^*}.$$

Notons qu'avec une probabilité 1 l'instant, où les points atteignent la classe B, coïncide avec l'instant d'apparition de la panne.

Plans du type B. Considérons maintenant les plans $[N, B, T]$, $[N, B, r]$, $[N, B, (r, T)]$, pour lesquels les éléments tombés en panne ne sont pas remplacés par de nouveaux éléments.

Plan $[N, B, T]$. On peut obtenir l'expression de la densité de probabilité pour que, lors des essais suivant le plan $[N, B, T]$, les pannes aient lieu aux instants $t_1, \ldots, t_{d(T)}$ de la manière suivante. La densité de probabilité pour qu'à ces instants tombent en pannes précisément les éléments numérotés $i_1, \ldots, i_{d(T)}$ est égale, en vertu de l'indépendance mutuelle des instants des pannes, au produit des densités de probabilités pour les instants des pannes de chacun de ces éléments, multipliées par la probabilité pour que dans l'intervalle $(0, T)$ les $N - d(T)$ autres éléments ne tombent pas en panne, autrement dit est égale à

$$\lambda e^{-\lambda t_1} \lambda e^{-\lambda t_2} \ldots \lambda e^{-\lambda t_{d(T)}} e^{-\lambda [N-d(T)]T}. \qquad (3.3.21)$$

L'événement consistant en ce que les instants des pannes soient $t_1, \ldots, t_{d(T)}$ peut être réalisé de $A_N^{d(T)} = N(N-1)\ldots$ $\ldots [N - d(T) + 1]$ manières différentes, car on peut former avec N nombres $N \ldots [N - d(T) + 1]$ différents échantillons des numéros $i_1, \ldots, i_{d(T)}$. Multipliant (3.3.21) par $A_N^{d(T)}$ nous obtenons l'expression de la densité de probabilité cherchée

$$p(t_1, \ldots, t_{d(T)}, \lambda) =$$

$$= N \ldots [N - d(T) + 1] \lambda^{d(T)} e^{-\lambda \left(\sum_{i=1}^{d(T)} t_i + [N-d(T)]T \right)}. \qquad (3.3.22)$$

Ainsi, dans le cas du plan $[N, B, T]$ les statistiques exhaustives seront : le nombre $d(T)$ d'éléments tombés en panne durant le temps T et la somme $S_B(T) = \sum_{i=1}^{d(T)} t_i + [N - d(T)]\, T$ des temps de fonctionnement de chaque élément, autrement dit le *temps de fonctionnement global des éléments* au cours des essais. Nous obtenons de (3.3.22) que

$$\ln p(t_1, \ldots, t_{d(T)}, \lambda) = \\ = \ln N(N-1) \ldots [N-d(T)+1] + d(T) \ln \lambda - \lambda S_B(T). \quad (3.3.23)$$

Nous en tirons

$$\frac{\partial \ln p(t_1, \ldots, t_{d(T)}, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{d(T)}{\lambda} - S_B(T) = 0. \quad (3.3.24)$$

Ainsi, l'estimation du maximum de vraisemblance est

$$\hat{\lambda} = \frac{d(T)}{S_B(T)}; \quad S_B(T) = \sum_{i=1}^{d(T)} t_i + [N - d(T)]\, T. \quad (3.3.25)$$

Cette estimation est biaisée. Le calcul exact du biais conduit à des formules très compliquées que nous ne rapporterons pas. Nous omettrons également pour cette même raison de citer la formule de la variance de l'estimation $\hat{\lambda}$. Notons que pour des éléments relativement sûrs pour $\lambda T < 0{,}1$ la densité de probabilité conditionnelle de distribution de l'instant de la panne ayant lieu dans l'intervalle $(0, T)$ est égale à $\frac{\lambda e^{-\lambda T}}{1-e^{-\lambda T}} \approx \frac{\lambda}{\lambda T} = \frac{1}{T}$ et la valeur moyenne de chaque t_i peut approximativement être considérée égale à $\frac{T}{2}$. Par conséquent, on peut estimer pour $d(T) > 10$ et $\frac{d(T)}{N} < 0{,}1$, à l'appui de la loi des grands nombres, que $\sum_{i=1}^{d(T)} t_i = d(T) \times \left[\frac{1}{d(T)} \sum_{i=1}^{d(T)} t_i\right] \approx \frac{d(T)\, T}{2}$. Portant cette expression dans le dénominateur de la formule (3.3.25) nous obtenons

$$\hat{\lambda}_1 \approx \frac{d(T)}{d(T)\frac{T}{2} + [N - d(T)]\, T} = \frac{d(T)}{\left[N - \frac{d(T)}{2}\right] T}. \quad (3.3.26)$$

La formule (3.3.26) est fréquemment utilisée en pratique. Il convient toutefois d'avoir en vue qu'elle n'est applicable que pour $\frac{d(T)}{N} \leqslant 0{,}1$, $d(T) \geqslant 10$. Si l'on trouve que la formule (3.3.26) est trop compliquée,

on peut utiliser également pour l'estimation de λ la formule d'estimation de la probabilité d'après la fréquence (cf. § 1.6). L'estimation de la probabilité $R(T) = e^{-\lambda T}$ de fonctionnement sans défaillance de l'élément est le rapport du nombre d'éléments $N - d(T)$ ayant fonctionné sans défaillance durant le temps T au nombre global N d'éléments. Egalant l'estimation à la valeur théorique de la probabilité, nous obtenons pour trouver $\hat{\lambda}$ l'équation

$$\frac{N-d(T)}{N} = e^{-\hat{\lambda} T},$$

d'où

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{1}{T} \ln \frac{N}{N-d(T)} = -\frac{1}{T} \ln \left[1 - \frac{d(T)}{N}\right]. \quad (3.3.27)$$

Cette formule peut être utilisée pour les valeurs $0{,}2 < \frac{d(T)}{N} < 0{,}8$. Notons que le biais de l'estimation (3.3.27) est infini, puisqu'avec une probabilité positive il se peut que $d(T) = N$.

Exemple. Les essais étaient conduits conformément au plan $[N = 100, B, T = 500]$. Les pannes se sont produites aux instants $t_{(1)} = 31$, $t_{(2)} = 49$, $t_{(3)} = 90$, $t_{(4)} = 135$, $t_{(5)} = 161$, $t_{(6)} = 249$, $t_{(7)} = 323$, $t_{(8)} = 353$, $t_{(9)} = 383$, $t_{(10)} = 436$, $t_{(11)} = 477$. Le nombre total d'éléments tombés en panne est $d(500) = 11$, le temps global de fonctionnement est $S_B(500) = 31 + 49 + 90 + 135 + 161 + 249 + 323 + 353 + 383 + 436 + 477 + 89 \cdot 500 = 47\,147$. Nous trouvons d'après la formule (3.3.25) l'estimation du paramètre λ

$$\hat{\lambda} = \frac{d(T)}{S_B(T)} = \frac{11}{47\,147} = 2{,}33 \cdot 10^{-4}.$$

Si l'on se base sur la formule simplifiée (3.3.26), on aura

$$\hat{\lambda} = \frac{11}{\left(100 - \frac{11}{2}\right) 500} = 2{,}328 \cdot 10^{-4}.$$

Plan $[N, B, r]$. Pour le plan $[N, B, r]$ la densité de probabilité d'apparition des pannes aux instants $t_1, \ldots, t_r$ peut être obtenue à partir des raisonnements analogues à ceux que nous avons utilisés pour le plan $[N, B, T]$. La densité de probabilité pour qu'aux instants $t_1, \ldots, t_r$ tombent en panne les éléments numérotés $i_1, \ldots, i_r$, où $1 \leqslant i_k \leqslant N$, $i_k \neq i_l$, $k \neq l$, et que dans l'intervalle $(0, t_r)$ les $N - r$ autres éléments ne tombent pas en panne, sera égale à

$$\lambda e^{-\lambda t_1} \ldots \lambda e^{-\lambda t_r} e^{-\lambda (N-r) t_r}.$$

Du fait que le nombre d'arrangements de N chiffres pris r à r est égal à $N(N-1) \ldots (N - r + 1)$, nous obtenons que la densité de probabilité de l'apparition de r pannes aux instants $t_1, \ldots, t_r$ est

$$p(t_1, \ldots, t_r, \lambda) = \\ = N(N-1)\ldots(N-r+1)\lambda^r e^{-\lambda\left(\sum_{i=1}^{r} t_i+(N-r)t_r\right)}. \quad (3.3.28)$$

Il découle de cette formule que la statistique exhaustive est le temps global de fonctionnement de tous les éléments soumis à l'essai :

$$S_B(t_r) = \sum_{i=1}^{r} t_i + (N-r)\,t_r = \\ = Nt_1 + (N-1)(t_2-t_1) + \ldots + (N-r+1)(t_r-t_{r-1}). \quad (3.3.29)$$

Notons qu'en introduisant de nouvelles variables $s_1 = t_1$, $s_k = t_k - t_{k-1}$, $k = 2, \ldots, r$, la densité de probabilité (3.3.28) peut s'écrire, compte tenu de (3.3.29), sous la forme

$$p(s_1, \ldots, s_r) = \\ = N\lambda e^{-\lambda N s_1}(N-1)\lambda e^{-(N-1)s_2}(N-r+1)\lambda e^{-(N-r-1)\lambda s_r}. \quad (3.3.30)$$

Dans ce cas nous tenons compte du fait que le jacobien de la transformation des coordonnées $t_1, \ldots, t_r$ en coordonnées $s_1, \ldots, s_r$ est égal à 1. Il découle de (3.3.30) que les variables aléatoires $s_1 = t_1, \ldots, s_r = t_r - t_{r-1}$ sont mutuellement indépendantes et que la densité de s_k est égale à $(N - k + 1)\,\lambda e^{-(N-k+1)\lambda s}$ et que, respectivement, la densité de la variable aléatoire $(N - k + 1)\,s_k$ est $\lambda e^{-\lambda s}$. Il découle ainsi de (3.3.30) que s est la somme de r variables aléatoires mutuellement indépendantes distribuées suivant une loi exponentielle. Nous en tirons que la densité de probabilité du temps global de fonctionnement $S_B(t_r)$ est

$$p(s) = \lambda^r \frac{s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda s}, \quad s > 0. \quad (3.3.31)$$

Logarithmant la densité (3.3.28), nous trouvons

$$\ln p(t_1, \ldots, t_r, \lambda) = \ln[N\ldots(N-r+1)] + r\ln\lambda - \lambda s,$$

d'où nous obtenons l'équation du maximum de vraisemblance

$$\frac{\partial \ln p(t_1, \ldots, t_r, \lambda)}{\partial\lambda} = \frac{r}{\lambda} - s = 0.$$

L'estimation du maximum de vraisemblance est de la forme

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{r}{S_B(t_r)}. \quad (3.3.32)$$

Nous trouvons alors, en utilisant l'expression (3.3.31) pour la densité de probabilité du temps global de fonctionnement, que

$$\mathrm{M}\hat{\lambda}_1 = \int_0^\infty \frac{r}{s}\lambda^r \frac{s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda s}\,ds = \frac{r}{r-1}\lambda, \quad r > 1.$$

Ainsi, l'estimation $\hat{\lambda}$ est biaisée. Ce biais peut être éliminé en utilisant l'estimation

$$\hat{\lambda}=\frac{r-1}{r}\,\hat{\lambda}_1=\frac{r-1}{S_B(t_r)}. \tag{3.3.33}$$

La variance de cette estimation est égale à

$$D\hat{\lambda}=\int_0^{\infty}\left(\frac{r-1}{s^r}\right)^r\frac{\lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!}\,e^{-\lambda s}\,ds-\lambda^2=\frac{r-1}{r-2}\,\lambda^2-\lambda^2=\frac{\lambda^2}{r-2},\quad r>2. \tag{3.3.34}$$

Exemple. Les essais étaient conduits conformément au plan $[N = 50, B, (r = 8)]$. Les instants des pannes sont $t_{(1)} = 91$, $t_{(2)} = 145$, $t_{(3)} = 221$, $t_{(4)} = 285$, $t_{(5)} = 317$, $t_{(6)} = 328$, $t_{(7)} = 411$, $t_{(8)} = 496$. La valeur du temps global de fonctionnement est $S_B(t_{(8)}) = 91 + 145 + 221 + 285 + 317 + 328 + 411 + 496\,(50 - 7) = 21\,965$. Nous trouvons d'après la formule (3.3.33) l'estimation du paramètre λ

$$\hat{\lambda}=\frac{7}{21\,965}=3{,}2\cdot10^{-4}.$$

Plan $[N, B, (r, T)]$. Si l'on utilise le plan $[N, B, (r, T)]$, les essais cessent soit à l'instant T, si $t_r > T$, soit à l'instant t_r, si $t_r < T$. Conformément à cela dans le premier cas la densité de probabilité de l'apparition de $d(T)$ pannes aux instants $t_1, \ldots, t_{d(T)}$ s'écrit suivant la formule (3.3.22) et dans le second cas pour les instants $t_1, \ldots, t_r$ des pannes suivant la formule (3.3.28). De même que dans le cas du plan $[N, V, (r, T)]$, nous trouvons que l'estimation du maximum de vraisemblance est de la forme

$$\hat{\lambda}=\begin{cases}\dfrac{d(T)}{S_B(T)}, & \text{si } t_r>T, \text{ où } S_B(T)=\sum\limits_{i=1}^{d(T)}t_i+[N-d(T)]\,T,\\[2ex] \dfrac{r}{S_B(t_r)}, & \text{si } t_r\leqslant T, \text{ où } S_B(t_r)=\sum\limits_{i=1}^{r}t_i+(N-r)\,t_r.\end{cases}$$

Par analogie avec le cas précédent nous pouvons utiliser une estimation améliorée pour le cas $t_r \leqslant T$. Nous obtenons en définitive

$$\hat{\lambda}=\begin{cases}\dfrac{d(T)}{S_B(T)}, & \text{si } t_r>T, \text{ où } S_B(T)=\sum\limits_{i=1}^{d(T)}t_i+[N-d(T)]\,T,\\[2ex] \dfrac{r-1}{S_B(t_r)}, & \text{si } t_r\leqslant T, \text{ où } S_B(t_r)=\sum\limits_{i=1}^{r}t_i+(N-r)\,t_r.\end{cases} \tag{3.3.35}$$

Cette estimation est biaisée. Vu la complexité des formules exprimant le biais et la variance nous sommes contraints de les omettre.

Plan $[N, B, (r, HS_0)]$. Considérons en conclusion de ce paragraphe encore un plan de conduite des essais de stand, qui est également appliqué en pratique. On soumet à l'essai N éléments sans renouveler les éléments tombés en panne. Les essais cessent soit à l'instant, où le temps global de fonctionnement des éléments soumis à l'essai devient égal à un nombre S_0 choisi avant les essais, soit à l'instant, où le r-ième élément tombe en panne, si le temps global de fonctionnement s'avère en ce cas inférieur à S_0. Nous désignerons d'une manière concise ce plan par $[N, B, (r, HS_0)]$. Si l'on désigne par $N(t)$ le nombre d'éléments non encore tombés en panne vers l'instant t, le temps global de fonctionnement $S(t)$ des éléments soumis à l'essai sera à l'instant t égal à $S_B(t) = \int_0^t N(s)\,ds$. Supposons que les pannes des éléments aient eu lieu aux instants $t_1, \ldots, t_{d(t)}$, dans ce cas le temps global de fonctionnement vers l'instant t s'exprime par la formule

$$S_B(t) = \int_0^t N(s)\,ds = Nt_1 + (N-1)(t_2 - t_1) + \ldots + [N - d(t)](t - t_{d(t)}),$$

$t_0 = 0$, si $d(t) = 0$. Les essais cessent à l'instant s, quand soit le temps global de fonctionnement

$$S_B(s) = Nt_1 + (N-1)(t_2 - t_1) + \ldots + (N - d(s))(s - t_{d(s)}) = S_0 \quad (3.3.36)$$

(dans ce cas $d(s) < r$), soit à l'instant t_r, où se produit la panne du r-ième élément

$$S_B(t_r) = Nt_1 + (N-1)(t_2 - t_1) + \ldots + (N - r + 1)(t_r - t_{r-1}) < S_0. \quad (3.3.37)$$

Nous avons montré plus haut qu'au cours des essais de N éléments sans renouvellement des éléments tombés en panne, les variables aléatoires Nt_1, $(N-1)(t_2 - t_1)$, $(N - r + 1)(t_r - t_{r-1})$ sont mutuellement indépendantes et suivent une même distribution de densité de probabilité $\lambda e^{-\lambda t}$. Ainsi, les conditions (3.3.36) et (3.3.37) signifient en fait que nous observons un flux de pannes de Poisson d'intensité λ et que nous cessons les observations soit à « l'instant » S_0, soit à « l'instant » $S(t_r)$, où se produit la r-ième panne. Or, nous avons déjà résolu le problème de l'estimation du paramètre Λ d'un flux de Poisson, quand nous avons étudié le cas du plan $[N, V, (r, T)]$. Pour utiliser l'estimation (3.3.17), nous devons poser $t_r = S(t_r)$, $T = S_0$ et dans la formule de la variance de l'estimation

(3.3.18) estimer que $\Lambda = \lambda$. Nous avons en définitive

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \dfrac{d(t_0)}{S_0}, & \text{où } t_0 \text{ est déterminé de la condition} \\ & S_B(t_0) = S_0, \text{ si } S(t_r) > S_0, \\ \dfrac{r-1}{S_B(t_r)}, & \text{si } S_B(t_r) < S_0. \end{cases} \qquad (3.3.38)$$

On trouve $S_B(t)$ d'après la formule (3.3.35). Comme nous l'avons déjà démontré, cette estimation est non biaisée et sa variance est, en vertu de la formule (3.3.20), égale à

$$D(\hat{\lambda}) = \frac{\lambda}{S_0} \sum_{d=0}^{r-2} \frac{(\lambda S_0)^d}{d!} e^{-\lambda S_0} + \frac{\lambda^2}{r-2} \sum_{d=r-2}^{\infty} \frac{(\lambda S_0)^d}{d!} e^{-\lambda S_0}.$$

Il découle de la considération du plan $[N, V, (r, T)]$ que les statistiques exhaustives sont $d(t_0)$, si $S(t_r) > S_0$, et $S(t_r)$, si $S(t_r) < S_0$.

Exemple. On effectue les essais conformément au plan $[N = 100, B, (r = 5, HS = 10\,000)]$. La première panne s'est produite à l'instant $t_{(1)} = 34$, la valeur du temps global de fonctionnement $S_B(t_{(1)}) = 3400 < 10\,000$. La seconde panne a été enregistrée à l'instant $t_{(2)} = 75$, la valeur du temps global de fonctionnement $S_B(t_{(2)}) = 7\,459 < 10\,000$. Dans l'intervalle compris entre $t_{(2)} = 75$ et $t_0 = 100{,}71$ on n'a pas observé de pannes. A l'instant $t_0 = 100{,}71$ la valeur du temps global de fonctionnement a atteint le niveau donné de 10 000. Conformément à la partie supérieure de la formule (3.3.38) nous trouvons

$$\hat{\lambda} = \frac{d(t_0)}{S_0} = \frac{2}{10\,000} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ pannes/heure.}$$

Estimations non biaisées pour la probabilité de fonctionnement sans défaillance. L'un des indices les plus importants de fiabilité est la probabilité de fonctionnement sans défaillance au cours d'un temps donné T_d. Dans le cas de la loi exponentielle cette probabilité est $R(T_d) = \exp(-\lambda T_d)$. Utilisant les formules obtenues plus haut pour l'estimation $\hat{\lambda}$ du paramètre λ, on peut utiliser en qualité d'estimation pour $R(T_d)$

$$\hat{R}(T_d) = \exp(-\hat{\lambda} T_d). \qquad (3.3.39)$$

On peut montrer que, quand le nombre N d'éléments soumis à l'essai croît, cette estimation est consistante et asymptotiquement efficace, si seulement $\hat{\lambda}$ est une estimation asymptotiquement efficace pour λ. Toutefois, pour des valeurs finies de N l'estimation donnée par la formule (3.3.39) est biaisée. Ce biais peut atteindre une grandeur notable dans le cas important en pratique, où $R(T_d)$ est proche de

l'unité. La grandeur du biais dépend également du type du plan suivant lequel on effectue les essais. De même que pour les estimations du paramètre λ, on peut poser le problème de la recherche des estimations non biaisées pour $R(T_d) = \exp(-\lambda T_d)$. Nous nous bornerons ici à étudier seulement deux types de plans $[N, V, T]$ et $[N, B, r]$. L'idée principale de l'élaboration des estimations non biaisées avec une variance minimale consiste en ce qui suit. On recherche d'abord une estimation non biaisée pour la fonction donnée du paramètre inconnu. Si cette estimation non biaisée est une fonction de la statistique exhaustive (et, de plus, unique), elle possède (cf. § 7.5) une variance minimale. Si cette estimation non biaisée n'est pas une fonction d'une statistique exhaustive, alors on considère en qualité de nouvelle estimation non biaisée l'espérance mathématique conditionnelle de l'estimation initiale, sous la condition que l'on a fixé la valeur de la statistique exhaustive.

Supposons que les essais sont conduits suivant le plan $[N, V, T]$. La statistique exhaustive est le nombre $d(T)$ d'éléments tombés en panne au cours de la réalisation des essais. La variable aléatoire $d(T)$ suit une loi de Poisson de paramètre $N\lambda T$. L'équation principale pour l'estimation non biaisée $\varphi(d)$ pour $R(T_d)$ est de la forme

$$\sum_{d(T)=0}^{\infty} \varphi(d) \frac{(N\lambda T)^d}{d!} e^{-\lambda NT} = e^{-\lambda T_d}. \qquad (3.3.40)$$

Divisant les deux membres par $e^{-\lambda NT}$ et développant $e^{\lambda(NT-T_d)}$ suivant les puissances de λ, nous obtenons que l'égalité (3.3.40) est valable quand et seulement quand

$$\varphi(d) \frac{(N\lambda T)^d}{d!} = \frac{\lambda^d (NT-T_d)^d}{d!}. \qquad (3.3.41)$$

Nous obtenons ainsi de (3.3.41) l'expression de l'estimation non biaisée de $R(T_d)$:

$$\hat{R}(T_d) = \varphi(d(T)) = \left(1 - \frac{T_d}{NT}\right)^{d(T)}. \qquad (3.3.42)$$

La variance de cette estimation est donnée par la formule

$$\mathrm{D}[\hat{R}(T_d)] = \exp\left\{\lambda NT\left[\left(1-\frac{T_d}{NT}\right)^2 - 1\right]\right\} - \exp(-2\lambda T_d). \quad (3.3.43)$$

Notons que l'estimation non biaisée pour les valeurs $T_d > NT$ donne des valeurs négatives pour un nombre impair de pannes et des valeurs plus grandes que l'unité pour un nombre de pannes pair. L'estimation (3.3.42) ne peut être recommandée que pour les valeurs $T_d \ll NT$.

Supposons que les essais aient lieu conformément au plan $[N, B, r]$. Si $t_{(i)}$ désigne les instants des pannes, $i = 1, \ldots, r$, alors les

variables aléatoires $\tau_i = (N - i + 1)(t_{(i)} - t_{(i-1)})$, $i = 1, \ldots, r$, $t_{(0)} = 0$ sont mutuellement indépendantes et suivent une loi de distribution exponentielle de paramètre λ:

$$\mathrm{P}\{\tau_i > T_\mathrm{d}\} = \exp(-\lambda T_\mathrm{d}) = R(T_\mathrm{d}).$$

Par conséquent, on peut choisir en qualité d'estimation non biaisée de $R(T_\mathrm{d})$ le rapport du nombre $d(r)$ de variables aléatoires τ_i, telles que $\tau_i > T_\mathrm{d}$ au nombre global r. L'estimation $\hat{R}_1(T_\mathrm{d}) = \frac{d(r)}{r}$ est non biaisée. Toutefois, elle n'est pas une fonction de la statistique exhaustive $S_B(t_r)$. En calculant l'espérance mathématique conditionnelle de $\hat{R}_1(T_\mathrm{d})$ par rapport à $S_B(t_r)$, nous obtenons l'expression pour l'estimation non biaisée améliorée

$$\hat{R}(T_\mathrm{d}) = \begin{cases} \left(1 - \frac{T_\mathrm{d}}{S_B(t_r)}\right)^{r-1}, & S_B(t_r) > T, \\ 0, & S_B(t_r) \leqslant T. \end{cases} \tag{3.3.44}$$

On peut, en tenant compte du fait que la densité de probabilité du temps global de fonctionnement $S_B(t_r)$ est donnée par la formule (3.3.11), vérifier aisément que l'estimation (3.3.44) est non biaisée. Nous avons en effet

$$\mathrm{M}\hat{R}(T_\mathrm{d}) = \int_{T_\mathrm{d}}^{\infty} \left(1 - \frac{T_\mathrm{d}}{s}\right)^{r-1} \frac{\lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda s}\, ds =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^{\nu} \int_{T_\mathrm{d}}^{\infty} \left(-\frac{T_\mathrm{d}}{s}\right)^{\nu} \frac{\lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda s}\, ds =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^{\nu} C_{r-1}^{\nu} \frac{T_\mathrm{d}^{\nu} \lambda^{\nu+1} (r-\nu-1)!}{(r-1)!} \sum_{\mu=0}^{r-\nu-1} \frac{(\lambda T_\mathrm{d})^{\mu}}{\mu!} e^{-\lambda T_\mathrm{d}} =$$

$$= e^{-\lambda T_\mathrm{d}} \sum_{l=0}^{r-1} (\lambda T_\mathrm{d})^{l} \sum_{k=0}^{l} \left[\frac{(-1)^k}{k!\,(l-k)!}\right] = e^{-\lambda T_\mathrm{d}}.$$

L'estimation (3.3.44) a été obtenue en 1962 par E. Odnorobova. Une estimation analogue a été publiée dans [10].

§ 3.4. Intervalles de confiance pour le paramètre de la loi exponentielle

Insuffisance des estimations ponctuelles. Nous avons considéré dans le paragraphe précédent diverses estimations du paramètre λ de la loi exponentielle. Toutefois, aussi bonnes que soient les pro-

priétés de ces estimations, même si, par exemple, elles sont non biaisées et efficaces, il s'avère insuffisant dans divers cas présentant un grand intérêt pratique de caractériser la qualité et la fiabilité des articles uniquement à l'aide d'estimations. Si la panne de l'élément entraîne une perte notable, on n'utilise que des éléments très fiables. Dans le cas où les pannes suivent une loi exponentielle, cela signifie que la grandeur λ doit être très petite. Comme la durée T de déroulement des essais est limitée, la petitesse de λ entraîne que le nombre moyen de pannes observées lors de la conduite des essais est aussi petit. Il peut s'avérer que lors du déroulement des essais aucune panne ne soit observée. Si l'on utilise les estimations proposées au début de ce paragraphe, il est clair que dans ce cas on estime que la qualité est excellente, autrement dit que $\lambda = 0$. On ne tient alors aucun compte de la taille N du lot d'éléments soumis à l'essai. Dans les cas où le nombre observé de pannes est différent de zéro, mais petit, la mesure naturelle de la dispersion des valeurs de l'estimation aléatoire, le rapport de la racine de la variance à l'espérance mathématique, est grande (>1), de sorte que la valeur de l'estimation varie fortement d'un essai à l'autre et ne peut servir de caractéristique stable de fiabilité des éléments. Ces remarques critiques nous conduisent d'une manière rationnelle à utiliser pour l'estimation du paramètre λ de la loi exponentielle la méthode des intervalles de confiance. On appelle *intervalle de confiance bilatéral* pour le paramètre λ avec un coefficient de confiance, non inférieur à γ, l'intervalle aléatoire $(\underline{\lambda}(x), \bar{\lambda}(x))$, dont les extrémités $\underline{\lambda}(x) < \bar{\lambda}(x)$ ne dépendent que du résultat des essais x et pour tout $\lambda > 0$ on a

$$\mathbf{P}\{\underline{\lambda}(x) < \lambda < \bar{\lambda}(x)\} \geqslant \gamma.$$

On appelle *intervalle de confiance unilatéral supérieur* $(0, \bar{\lambda}(x))$ et *inférieur* $(\underline{\lambda}(x), +\infty)$ des intervalles aléatoires pour lesquels on a respectivement pour tout $\lambda > 0$

$$\mathbf{P}\{0 < \lambda < \bar{\lambda}(x)\} \geqslant \gamma, \qquad \mathbf{P}\{\underline{\lambda}(x) < \lambda\} \geqslant \gamma.$$

Au cours de la construction des intervalles de confiance nous utiliserons la méthode générale exposée au § 3.5. Nous prendrons alors en qualité de variables aléatoires, dont les distributions ne dépendent que du paramètre inconnu λ, les valeurs des statistiques exhaustives que l'on obtient au cours du déroulement des essais. Notons que puisque les estimations du paramètre λ sont des fonctions monotones des statistiques exhaustives que nous considérons plus bas, alors, comme nous l'avons montré au § 1.6, les intervalles de confiance obtenus à partir des estimations, d'une part, et des statistiques exhaustives, d'autre part, coïncident. Nous modifierons quelque peu l'ordre de notre exposé, en considérant tout d'abord les plans les plus simples $[N, V, T]$, $[N, V, r]$, $[N, B, r]$, $[N, B, T]$, et ensuite

les plans plus compliqués $[N, V, (r, T)]$, $[N, B, (r, HS)]$, $[N, B, (r, T)]$.

Intervalles de confiance pour les plans comportant des statistiques exhaustives simples. Pour le plan $[N, V, T]$ la statistique exhaustive est le nombre $d\,(T)$ de pannes observées. La variable aléatoire $d\,(T)$ suit une loi de distribution de Poisson de paramètre $\Delta = \lambda NT$. Sur le plan (Δ, d) les résultats des essais sont représentés sous forme de points aléatoires $Q = (\Delta, d)$, où Δ est la valeur

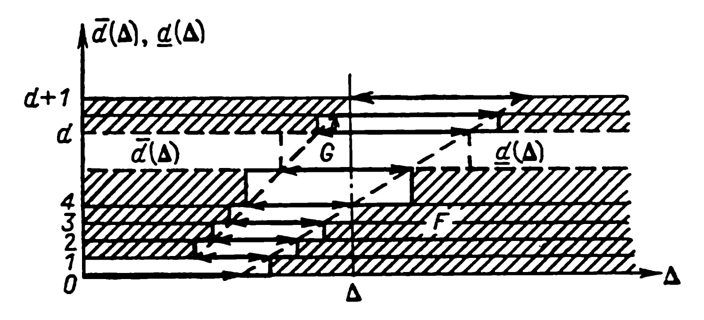


Fig. 3.4.1

du paramètre de la distribution de Poisson et d le nombre de pannes observées. En nous basant sur la méthode exposée au § 3.5 pour construire la limite supérieure de l'intervalle de confiance avec un coefficient de confiance non inférieur à α, nous devons pour chaque valeur de Δ indiquer un nombre entier $\underline{d}\,(\Delta)$ tel que la probabilité pour que la statistique exhaustive prenne une valeur non supérieure à $\underline{d}\,(\Delta)$ ne dépasse pas $1 - \alpha$, et la probabilité pour qu'elle prenne une valeur non supérieure à $[\underline{d}\,(\Delta) + 1]$ dépasse $1 - \alpha$. Comme la grandeur $d\,(T)$ suit une loi de distribution de Poisson, alors $\underline{d}\,(\Delta)$ est déterminée à partir de la relation

$$\mathbf{P}\{d\,(T) \leqslant \underline{d}\,(\Delta)\} = L_{\underline{d}(\Delta)}(\Delta) \leqslant 1 - \alpha < \mathbf{P}\{d\,(T) \leqslant \underline{d}\,(\Delta) + 1\} = = L_{\underline{d}(\Delta)+1}(\Delta), \tag{3.4.1}$$

où $L_d(\Delta) = \sum\limits_{k=0}^{d} \frac{\Delta^k}{k!}\, e^{-\Delta}$. Nous obtenons, en notant que $L_d\,(\Delta)$ est une fonction monotone décroissante du paramètre Δ, que $\underline{d}\,(\Delta)$ est une fonction non décroissante de Δ. Comme $\underline{d}\,(\Delta)$ ne prend que des valeurs entières, alors $\underline{d}\,(\Delta)$ est une fonction en escalier non décroissante (fig. 3.4.1). Il découle alors de (3.4.1) que $\underline{d}\,(\Delta)$ atteint pour la première fois le niveau d pour une valeur de $\overline{\Delta}_{1-\alpha}\,(d)$ pour laquelle

$$L_d\,(\Delta_{1-\alpha}\,(d)) = 1 - \alpha. \tag{3.4.2}$$

Définissons l'ensemble F_B comme l'ensemble des points (Δ, d), $\Delta > 0$, $d = 1, 2, \ldots$ pour lesquels $d(\Delta) < \underline{d}(\Delta)$. Il découle de la définition que la probabilité pour que le point aléatoire $(\Delta, d(T))$, où $\Delta = \lambda NT$ et $d(T)$ est le nombre d'éléments tombés en panne, se trouve dans l'ensemble F_B ne dépasse pas $1 - \alpha$, quelle que soit la valeur de Δ. L'événement $Q = (\Delta, d(T)) \bar{\in} F_B$ est équivalent au fait que la valeur Δ soit à gauche du point aléatoire $\Delta_{1-\alpha}(d(T))$, défini par (3.4.2). Les probabilités des événements équivalents sont égales, de sorte que

$$\mathbf{P}\{\Delta < \Delta(d)\} = \mathbf{P}\{Q \bar{\in} \mathfrak{F}_B\} = \mathbf{P}\{d > \underline{d}(T)\} = \\ = 1 - \mathbf{P}\{d \leqslant \underline{d}(T)\} \geqslant \alpha. \quad (3.4.3)$$

Ainsi, $\Delta_{1-\alpha}(d)$ est la limite de confiance supérieure avec un coefficient de confiance non inférieur à α. Comme $\Delta = \lambda NT$, alors $\bar{\lambda} = \frac{\Delta_{1-\alpha}(d)}{NT}$ est la limite de confiance supérieure pour le paramètre λ avec le même coefficient de confiance α.

Pour construire l'intervalle de confiance bilatéral pour le paramètre Δ de la variable aléatoire poissonienne $d(T)$ avec un coefficient de confiance α on choisit deux nombres ε_1 et $\varepsilon_2 > 0$, $1 - \alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ (habituellement $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) et l'on construit l'ensemble $\mathfrak{F}$ des points (Δ, d) pour lesquels soit

$$L_d(\Delta) \leqslant \varepsilon_1, \qquad \text{soit } 1 - L_{d-1}(\Delta) \leqslant \varepsilon_2. \quad (3.4.4)$$

Il découle de la condition (3.4.4) que la probabilité $\mathbf{P}(Q \in \mathfrak{F})$ pour que le point aléatoire $Q = (\Delta, d)$ tombe dans l'ensemble $\mathfrak{F}$ ne dépasse pas $1 - \alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Tenant compte du fait que la fonction $L_d(\Delta)$ est monotone décroissante nous obtenons de (3.4.4) que $(\Delta, d) \bar{\in} \mathfrak{F}$ si et seulement si la valeur Δ est à gauche du point $\bar{\Delta}(d)$ et à droite du point $\underline{\Delta}(d)$, pour lesquels

$$L_d(\bar{\Delta}(d)) = \varepsilon_1, \quad 1 - L_{d-1}(\underline{\Delta}(d)) = \varepsilon_2, \quad (3.4.5)$$

car ce n'est que dans ce cas que l'une au moins des inégalités (3.4.4) n'est pas vérifiée. Ainsi, l'événement $\{\underline{\Delta}(d) < \Delta < \bar{\Delta}(d)\}$ est équivalent à l'événement $\{(\Delta, d) \bar{\in} \mathfrak{F}\}$. Nous en tirons

$$\mathbf{P}\{\underline{\Delta}(d) < \Delta < \bar{\Delta}(d)\} = \mathbf{P}\{(\Delta, d) \bar{\in} \mathfrak{F}\} = \\ = 1 - \mathbf{P}\{(\Delta, d) \in \mathfrak{F}\} \geqslant 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \alpha. \quad (3.4.6)$$

Tenant compte du fait que les valeurs de $\Delta_\alpha(d)$, définies par la formule

$$L_d(\Delta_\alpha(d)) = \alpha, \quad (3.4.7)$$

sont données dans la table 7 de l'annexe, nous pouvons écrire à l'appui de (3.4.5)

$$\bar{\Delta}(d) = \Delta_{\varepsilon_1}(d), \quad \underline{\Delta}(d) = \Delta_{1-\varepsilon_2}(d-1). \quad (3.4.8)$$

L'intervalle $(\Delta_{1-\varepsilon_2}(d-1), \Delta_{\varepsilon_1}(d))$ est ainsi un intervalle de confiance avec un coefficient de confiance égal à α. Tenant compte de nouveau que $\lambda = \frac{\Delta}{NT}$, nous obtenons l'intervalle de confiance pour la valeur à estimer λ

$$\underline{\lambda} = \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(d-1)}{NT}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(d)}{NT}, \tag{3.4.9}$$

où les valeurs $\Delta_{1-\varepsilon_2}(d-1)$ et $\Delta_{\varepsilon_1}(d)$ sont déterminées en tant que solutions de l'équation (3.4.5). Si $d = 0$, on estime que la valeur de $\Delta_\alpha(0-1)$ est nulle.

Exemple. Supposons que les essais étaient conduits conformément au plan $[N = 500, V, T = 100]$ et que l'on avait enregistré 5 pannes: $d(T) = 5$. On demande de trouver la limite supérieure de confiance pour un coefficient de confiance $\alpha = 0{,}9$. Nous trouvons de la table 7 de l'annexe que $\Delta_{0,1}(5) = 9{,}275$ pour $\alpha = 0{,}9$. Nous en tirons

$$\bar{\lambda} = \frac{9{,}275}{500 \cdot 100} = 1{,}855 \cdot 10^{-4}.$$

On peut affirmer avec une probabilité 0,9 que la valeur véritable de λ ne dépasse pas la valeur trouvée de $\bar{\lambda}$. Construisons maintenant l'intervalle de confiance bilatéral correspondant à la valeur $\alpha = 0{,}9$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}05$. Nous utilisons la même table 7, d'où nous trouvons $\Delta_{0,95}(4) = 1{,}970$; $\Delta_{0,05}(5) = 10{,}513$. Nous obtenons alors en vertu de la formule (3.4.9)

$$\underline{\lambda} = \frac{1{,}970}{500 \cdot 100} = 0{,}394 \cdot 10^{-4}, \quad \bar{\lambda} = \frac{10{,}513}{500 \cdot 100} = 2{,}103 \cdot 10^{-4}.$$

Lors de l'utilisation du plan $[N, V, r]$ la statistique exhaustive est l'instant t_r d'apparition de la r-ième panne. La densité de probabilité de cette statistique est donnée par la formule (3.3.11). Notons maintenant que la densité de probabilité de la variable aléatoire Λt_r est de la forme

$$p(t) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-t}, \tag{3.4.10}$$

autrement dit, ne dépend pas de la valeur inconnue du paramètre Λ. Si l'on se donne la valeur du coefficient de confiance $\alpha = 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ et les valeurs $\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)$ et $\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)$, telles que

$$\int_{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}^{\infty} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-t}\, dt = \varepsilon_1, \quad \int_{0}^{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-t}\, dt = \varepsilon_2, \tag{3.4.11}$$

il découle de la forme de la densité de probabilité (3.4.10) que

$$\mathbf{P}\{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)<\Lambda t_r<\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)\}=\int\limits_{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}^{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}e^{-t}\,dt=$$

$$=1-\int\limits_{0}^{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}e^{-t}\,dt-\int\limits_{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}^{\infty}\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}e^{-t}\,dt=$$

$$=1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\alpha. \qquad (3.4.12)$$

Les inégalités dans (3.4.12) sont équivalentes aux inégalités $\frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{t_r}<\Lambda<\frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{t_r}$, de sorte que nous avons

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{t_r}<\Lambda<\frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{t_r}\right\}=\alpha. \qquad (3.4.13)$$

Comme la relation (3.4.13) est vérifiée pour tout $\Lambda>0$, l'intervalle aléatoire $\left(\frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{t_r}, \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{t_r}\right)$ est un intervalle de confiance pour le paramètre Λ avec un coefficient de confiance α. L'intervalle de confiance pour le paramètre $\lambda=\frac{\Lambda}{N}$ est respectivement de la forme

$$\left(\underline{\lambda}=\frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{Nt_r}, \quad \overline{\lambda}=\frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{Nt_r}\right). \qquad (3.4.14)$$

Nous obtenons de (3.4.14) l'intervalle unilatéral avec un coefficient de confiance α, en posant $\varepsilon_2=0$, $\varepsilon_1=1-\alpha$. Dans ce cas $\Delta_1(r-1)=0$ et $\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)=\Delta_{1-\alpha}(r-1)$. Les valeurs de $\Delta_\alpha(r)$ pour différents r et α sont rapportées dans la table 7 de l'annexe.

Exemple. On a obtenu par suite des essais réalisés conformément au plan $[N=500, V, r=15]$ que $t_{15}=1211$ heures. Trouver l'intervalle de confiance unilatéral supérieur avec un coefficient de confiance $\alpha=0{,}99$. Nous trouvons de la table 7 de l'annexe que la valeur $\Delta_{0,01}(14)=25{,}446$. Nous obtenons de la formule (3.4.14) la valeur de la limite supérieure de l'intervalle de confiance de λ

$$\overline{\lambda}=\frac{25{,}446}{500\cdot 1211}=4{,}24\cdot 10^{-5}.$$

On peut construire de manière analogue l'intervalle de confiance pour le plan $[N, B, r]$. La statistique exhaustive est ici le temps global de fonctionnement des éléments soumis à l'essai $S_B(t_r)=\sum\limits_{i=1}^{r}t_i+(N-r)t_r$, où $t_1, \ldots, t_r$ sont les instants des pannes des éléments. Comme nous l'avons montré au § 3.3, la densité de probabilité de cette statistique est de la forme (3.3.31), c'est pourquoi la densité de la variable aléatoire $\lambda, S_B(t_r)$ est (3.4.10).

Répétant les raisonnements utilisés pour établir la formule (3.4.13), nous obtenons que

$$\mathrm{P}\left\{\frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{S_B(t_r)}<\lambda<\frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{S_B(t_r)}\right\}=\alpha. \qquad (3.4.15)$$

Ainsi, l'intervalle de confiance bilatéral pour λ, correspondant au coefficient de confiance $\alpha=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, aura pour limites

$$\underline{\lambda}=\frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{S_B(t_r)},\quad \overline{\lambda}=\frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{S_B(t_r)}, \qquad (3.4.16)$$

où $S_B(t_r)$ est le temps global de fonctionnement des éléments pendant le déroulement des essais. De même, la limite supérieure de l'intervalle de confiance unilatéral avec un coefficient de confiance α est égale à

$$\overline{\lambda}=\frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{S_B(t_r)}.$$

Nous rappelons que les valeurs des coefficients $\Delta_\alpha(r)$ sont données dans la table 7 de l'annexe.

Plan $[N, B, T]$. Dans le cas du plan $[N, B, T]$ les statistiques exhaustives sont le nombre $d(t)$ d'éléments tombés en panne et le temps global de fonctionnement $S_B(T)=\sum_{i=1}^{d(T)} t_i+[N-d(T)]T$. Pour les éléments très fiables $\lambda T\ll 1$, c'est pourquoi la densité de probabilité conditionnelle des instants des pannes coïncide pratiquement avec la densité de la distribution uniforme, puisqu'elle est égale à $\frac{\lambda e^{-\lambda T}}{1-e^{-\lambda T}}\approx\frac{1}{T}$, $\lambda T\ll 1$. C'est pourquoi pour une valeur fixée de la statistique exhaustive $d(T)$ la distribution de la statistique $S(T)$ ne dépend pratiquement pas de la valeur du paramètre λ, si seulement $\lambda T\ll 1$. Par conséquent, dans le domaine le plus important des petites valeurs du paramètre λ pratiquement toute l'information relative à ce paramètre est concentrée dans la statistique exhaustive $d(T)$. Partant de ce fait, nous nous bornerons uniquement à la statistique $d(T)$. Nous aurions pu considérer les valeurs de l'estimation même du paramètre λ égale à $\frac{d(T)}{S_B(T)}$, mais cette voie conduit à des formules très compliquées, peu susceptibles d'être utilisées. Comme chaque élément peut tomber en panne indépendamment des pannes des autres éléments et que la probabilité d'une panne est $p=1-e^{-\lambda T}$, la distribution du nombre de pannes $d(T)$ sera binomiale

$$\mathrm{P}\{d(T)=d\}=C_N^d p^d(1-p)^{N-d}.$$

Nous avons déjà considéré au § 1.6 le cas de construction de l'intervalle de confiance $(\underline{p}(d(T)), \overline{p}(d(T)))$ pour le paramètre p de la

distribution binomiale. La fonction $\lambda = \frac{1}{T}\ln\frac{1}{1-p}$ est monotone en p, de sorte que l'inégalité $\underline{p}(d) < p < \overline{p}(d)$ est équivalente à l'inégalité $\frac{1}{T}\ln\frac{1}{1-\underline{p}(d)} < \lambda < \frac{1}{T}\ln\frac{1}{1-\overline{p}(d)}$. Par conséquent,

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{T}\ln\frac{1}{1-\underline{p}(d)} < \lambda < \frac{1}{T}\ln\frac{1}{1-\overline{p}(d)}\right\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\underline{p}(d) < p < \overline{p}(d)\} \geqslant 1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = \alpha. \qquad (3.4.17)$$

Comme quand $\varepsilon_1 = 0$, $\underline{p}(d) = 0$ pour $d = 0, 1, \ldots, N$, nous obtenons alors de (3.4.17), en posant $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1-\alpha$, l'intervalle de confiance unilatéral $\left(0, \frac{1}{T}\ln\frac{1}{1-\overline{p}(d)}\right)$ avec un coefficient de confiance non inférieur à α. Pour faciliter la construction des intervalles de confiance pour les valeurs $\alpha = 0{,}95$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{,}025$ et $N = 50, 60, 80, 100, 150, 200$ on a rapporté dans la table 8 de l'annexe des coefficients

$$\underline{\Delta}'(d) = \ln\frac{1}{1-\underline{p}(d)}, \quad \overline{\Delta}'(d) = \ln\frac{1}{1-\overline{p}(d)}. \qquad (3.4.18)$$

Nous trouvons de (3.4.17) que l'intervalle de confiance bilatéral est de la forme

$$\underline{\lambda} = \frac{\underline{\Delta}'(d)}{T}, \qquad \overline{\lambda} = \frac{\overline{\Delta}'(d)}{T}, \qquad (3.4.19)$$

où $\underline{\Delta}'(d)$, $\overline{\Delta}'(d)$ sont déterminés de (3.4.18) et $\underline{p}(d)$ et $\overline{p}(d)$ d'après les formules du § 1.6 pour les valeurs $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1-\alpha}{2}$. L'intervalle unilatéral est égal à

$$\left(0, \frac{\overline{\Delta}'(d)}{T}\right), \qquad (3.4.20)$$

où la valeur correspondante $\overline{p}(d)$ est trouvée d'après les formules du § 1.6 pour $\varepsilon_2 = 1-\alpha$.

Exemple. Les essais sont réalisés d'après le plan $[N = 150, B, T = 100$ heures]. Au cours des essais 5 éléments sont tombés en panne. On demande de trouver l'intervalle de confiance bilatéral pour un coefficient de confiance $\alpha = 0{,}95$.

Nous trouvons de la table 8 de l'annexe que $\overline{\Delta}'(10) = 0{,}079$; $\underline{\Delta}' = 0{,}011$. Nous obtenons ainsi de la formule (3.4.19)

$$\underline{\lambda} = \frac{0{,}011}{100} = 1{,}1\cdot 10^{-4}; \quad \overline{\lambda} = \frac{0{,}079}{100} = 7{,}9\cdot 10^{-4}.$$

Intervalles de confiance pour les plans à statistiques exhaustives composites. **Plan** $[N, B, (r, T)]$. Nous utilisons maintenant la méthode générale du § 1.6 pour construire l'intervalle de confiance pour λ d'après les résultats des expériences réalisées conformément au plan $[N, B, (r, T)]$. Dans ce cas les instants des pannes constituent un flux de Poisson d'intensité Λ. Le côté spécifique principal de ce cas consiste en ce que la statistique exhaustive pour le paramètre λ est composite. Si $t_r > T$, elle est égale à la valeur

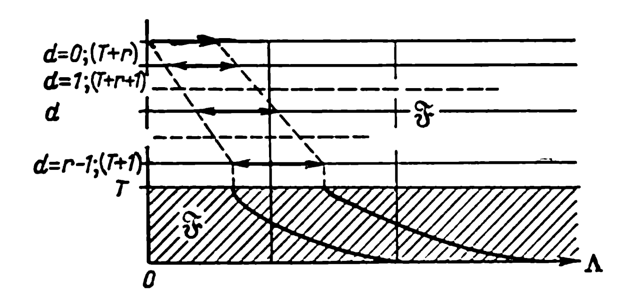


Fig. 3.4.2

$d(T)$ du nombre d'éléments tombés en panne au cours du temps T; si par contre $t_r < T$, alors la statistique exhaustive est égale à t_r qui est l'instant d'apparition de la r-ième panne. Considérons les points du plan de la forme (Λ, t), $\Lambda > 0$, $0 < t < T$, $t = T + 1, \ldots, T + r$ (fig. 3.4.2). Si au cours des essais des éléments, pour lesquels $\lambda N = \Lambda$, on observe une valeur $t_r < T$, les résultats des essais sont notés par le point aléatoire (Λ, t_r). Si par contre $t_r > T$ et si le nombre de pannes est $d(T) = d$, alors le résultat des essais est noté par le point aléatoire $(\Lambda, T + r - d)$. L'ensemble des points $\mathfrak{F}$ est construit de la manière suivante. On se donne deux nombres ε_1, $\varepsilon_2 > 0$, $\alpha = 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. Pour une valeur fixée de Λ on rapporte à la partie supérieure de l'ensemble $\mathfrak{F}$ les points (Λ, S), $S = T + r - d$ ou t, pour lesquels $S > \overline{S}(\Lambda)$, où $\overline{S}(\Lambda)$ est déterminé des conditions $\overline{S}(\Lambda) = T + r - \overline{d}(T)$; $\overline{d}(T)$ est un entier, non supérieur à $r - 1$, si

$$\sum_{d=0}^{\overline{d}(T)} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} \leqslant \varepsilon_1 < \sum_{d=0}^{\overline{d}(T)+1} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T}; \qquad (3.4.21)$$

si par contre

$$\sum_{d=0}^{r-1} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} < \varepsilon_1,$$

alors $\overline{S}(\Lambda)=\overline{t}(\Lambda)$, où $\overline{t}(\Lambda)$ est déterminé des conditions

$$\sum_{d=0}^{r-1}\frac{(\Lambda T)^d}{d!}e^{-\Lambda T}+\int_{\overline{t}(\Lambda)}^{T}\frac{\Lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\Lambda s}\,ds=\int_{\overline{t}(\Lambda)}^{\infty}\frac{\Lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\Lambda s}\,ds=\varepsilon_1. \quad (3.4.22)$$

De manière analogue on rapporte à la partie inférieure de l'ensemble $\mathfrak{F}$ les points (Λ, S) pour lesquels $S<\underline{S}(\Lambda)$, où $\underline{S}(\Lambda)$ est déterminé des conditions

$$\int_{0}^{\underline{S}(\Lambda)}\frac{\Lambda^r s^{r-1}}{(s-1)!}e^{-\Lambda s}\,ds=\varepsilon_2; \quad (3.4.23)$$

si par contre $\int_0^T\frac{\Lambda^r s^{r-1}}{(s-1)!}e^{-\Lambda s}\,ds<\varepsilon_2$, alors on choisit en qualité de $\underline{S}(\Lambda)$ le nombre $\underline{S}(\Lambda)=T+r-\underline{d}(T)$, où $\underline{d}(T)$ est un nombre entier non supérieur à $r-1$ déterminé des conditions

$$\sum_{d=\underline{d}(T)}^{r-1}\frac{(\Lambda T)^d}{d!}e^{-\Lambda T}+\int_0^T\frac{\Lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\Lambda s}\,ds=$$

$$=1-\sum_{d=0}^{\underline{d}(T)-1}\frac{(\Lambda T)^d}{d!}e^{-\Lambda T}=\int_0^T\frac{\Lambda^{\underline{d}(T)}s^{\underline{d}(T)-1}}{(\underline{d}(T)-1)!}e^{-\Lambda s}\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon_2<\sum_{d=\underline{d}(t)-1}^{r-1}\frac{(\Lambda T)^d e^{-\Lambda T}}{d!}+\int_0^T\frac{\Lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!}e^{-\Lambda s}\,ds. \quad (3.4.24)$$

La probabilité pour que le résultat des essais soit noté par un point aléatoire $(\Lambda, S)\in\mathfrak{F}$ ne dépasse pas $1-\alpha=\varepsilon_1+\varepsilon_2$ en vertu des règles de construction de l'ensemble $\mathfrak{F}$. Respectivement, la probabilité de l'événement contraire $(\Lambda, S)\overline{\in}\mathfrak{F}$ n'est pas inférieure à α. Si par suite de la réalisation des essais on a observé $d(T)=d\leqslant r-1$ pannes, l'événement $(\Lambda, S)\overline{\in}\mathfrak{F}$ sera équivalent à l'événement

$$\underline{\Lambda}(d)<\Lambda<\overline{\Lambda}(d), \quad (3.4.25)$$

où $\underline{\Lambda}(d)$ et $\overline{\Lambda}(d)$ sont les fonctions inverses de $\underline{S}(\Lambda)$ et $\overline{S}(\Lambda)$ pour les valeurs de Λ, pour lesquelles $\underline{S}(\Lambda)$ ou $\overline{S}(\Lambda)$ sont égales à $T+r-d$, $d=0,\ldots,r-1$. Nous trouvons des équations (3.4.21)

et (3.4.24) que $\underline{\Lambda}(d)$ et $\overline{\Lambda}(d)$ sont déterminés par les équations

$$\int_T^\infty \frac{\overline{\Lambda}^d s^d}{d!} e^{-\overline{\Lambda} s} ds = \varepsilon_1, \tag{3.4.26}$$

$$\int_0^T \frac{\underline{\Lambda}^d s^d}{d!} e^{-\underline{\Lambda} s} ds = \varepsilon_2. \tag{3.4.27}$$

Or, ces équations sont équivalentes aux équations (3.4.11). Nous en concluons que

$$\overline{\Lambda}(d) = \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(d)}{T} \qquad \underline{\Lambda}(d) = \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(d-1)}{T}, \tag{3.4.28}$$

où

$$\overline{\Lambda}(d) = \overline{\lambda}(d) N, \qquad \underline{\Lambda}(d) = \underline{\lambda}(d) N.$$

Rappelons que les valeurs des coefficients $\Delta_\alpha(d)$ sont données dans la table 7 de l'annexe. Si, par contre, l'instant de la r-ième panne $t_r < T$, l'événement $(\Lambda, t_r) \overline{\in} \mathfrak{F}$ est alors équivalent à l'événement

$$\underline{\Lambda}(t_r) < \Lambda < \overline{\Lambda}(t_r), \tag{3.4.29}$$

où $\underline{\Lambda}(S)$, $\overline{\Lambda}(S)$ sont les fonctions inverses de $\underline{S}(\Lambda)$, $\overline{S}(\Lambda)$ pour les valeurs de Λ, pour lesquelles les valeurs de $\underline{S}(\Lambda)$ et $\overline{S}(\Lambda)$ ne dépassent pas T. Nous trouvons de (3.4.22) et (3.4.23) que $\underline{\Lambda}(t_r)$ et $\overline{\Lambda}(t_r)$ sont déterminés des équations

$$\int_{t_r}^\infty \frac{[\overline{\Lambda}(t_r)]^r}{(r-1)!} s^{r-1} e^{-\overline{\Lambda}(t_r)s} ds = \varepsilon_1, \tag{3.4.30}$$

$$\int_0^{t_r} \frac{[\underline{\Lambda}(t_r)]^r}{(r-1)!} s^{r-1} e^{-\underline{\Lambda}(t_r)s} ds = \varepsilon_2. \tag{3.4.31}$$

Ces équations sont équivalentes aux équations (3.4.11) dans lesquelles

$$\overline{\Delta}(r) = \overline{\Lambda}(t_r)\, t_r = \overline{\lambda}(t_r)\, N t_r,$$
$$\underline{\Delta}(r) = \underline{\Lambda}(t_r)\, t_r = \underline{\lambda}(t_r)\, N t_r,$$
$$\overline{\Delta}(r) = \Delta_{\varepsilon_1}(r-1), \quad \underline{\Delta}(r) = \Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1).$$

Ainsi, la construction de l'intervalle de confiance pour l'estimation du paramètre λ lors de l'utilisation du plan $[N, V, (r, T)]$ doit être effectuée de la même manière que lors de l'utilisation des plans $[N, V, T]$ et $[N, V, r]$ suivant que l'on ait $t_r > T$ ou $t_r < T$. Un résultat plus général pour des limites non croissantes d'interruption des essais a été obtenu par L. Bolchev [9].

Plan $[N, B, (r, HS_0)]$. Il avait été établi au § 3.3 que le plan $[N, B, (r, HS_0)]$ est équivalent au plan $[N = 1, B, (r, S_0)]$. C'est pourquoi l'intervalle de confiance bilatéral est de la forme

$$\underline{\lambda} = \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(d-1)}{S_0}, \quad \overline{\lambda} = \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(d)}{S_0}, \quad \text{si } S_B(t_r) > S_0, \qquad (3.4.32)$$

$$\underline{\lambda} = \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{S_B(t_r)}, \quad \overline{\lambda} = \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{S_B(t_r)}, \quad \text{si } S_B(t_r) \leqslant S_0, \qquad (3.4.33)$$

où $S_B(t) = \sum_{i=0}^{d(t)} t_i + [N - d(t)]\, t$, $d(t)$ le nombre d'éléments déjà tombés en panne vers l'instant t. Les valeurs des coefficients $\Delta_\alpha(d)$ sont trouvées dans la table 7 de l'annexe. Nous obtenons l'intervalle de confiance unilatéral à partir des formules (3.4.32), (3.4.33), en faisant $\underline{\lambda} = 0$, ce qui correspond à $\varepsilon_1 = 1 - \alpha$, $\varepsilon_2 = 0$.

Exemple. Les expériences étaient réalisées conformément au plan $[N = 500, B, (r = 20, HS_0 = 20\,000)]$. A l'instant de l'interruption des essais, alors que le temps global de fonctionnement des éléments était égal à 20 000, 16 éléments étaient tombés en panne. On demande de trouver la limite supérieure de l'intervalle de confiance correspondant au coefficient de confiance $\alpha = 0{,}99$. Comme la valeur $S_B(t_{20}) \geqslant S_0$, autrement dit, le temps global de fonctionnement des éléments a atteint le niveau prévu S_0 avant que ne se produise la panne du 20-ième élément, on détermine la limite supérieure de confiance d'après la formule (3.4.32). Nous trouvons de la table 7 de l'annexe que $\Delta_{0,01}(16) = 28{,}030$, d'où

$$\overline{\lambda} = \frac{28{,}030}{20\,000} = 1{,}40 \cdot 10^{-3}.$$

Plan $[N, B, (r, T)]$. On peut d'une manière absolument analogue obtenir les intervalles de confiance pour le cas du plan $[N, B, (r, T)]$. La statistique exhaustive est ici soit égale au temps global de fonctionnement $S(t_r)$ à l'instant t_r, si $t_r \leqslant T$, soit bidimensionnelle $(d(T), S_B(T))$, si $t_r > T$, où $d(T)$ est le nombre d'éléments tombés en panne et $S_B(T) = \sum_{i=1}^{d(T)} t_i + [N - d(T)]\, T$ est le temps global de fonctionnement des éléments. Toutefois, à l'appui des mêmes raisonnements que nous avons rapportés dans le cas du plan $[N, B, T]$, nous ne considérerons pas la statistique $S_B(T)$. Ainsi, la valeur de la variable aléatoire qui nous sert à construire l'intervalle de confiance est égale à $d(T)$, si $t_r > T$, et $S_B(t_r) = \sum_{i=1}^{r} t_i + (N - r)\, t_r$, si $t_r < T$. Nous considérerons sur le plan (Λ, t) l'ensemble des points $\Lambda > 0$, $0 < t < NT$, $t = NT + 1, \ldots, NT + r$, $\lambda S_B(t_r) = N\lambda t_1 + (N - 1)\, \lambda (t_2 - t_1) + \ldots + (N - r + 1)\, \lambda (t_r - t_{r-1})$,

où $(N-i)(t_{i+1}-t_i)$ $(i=0, \ldots, r-1,\ t_0=0)$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes (cf. § 3.3) de densité égale à $e^{-\lambda t}$. C'est pourquoi

$$\mathbf{P}\{\lambda S_B(t_r)<x, \quad \lambda t_r<T\}=$$

$$=\underset{\left\{\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{r} s_i<x \\ \sum_{i=1}^{r} \frac{s_i}{N-i+1}<T\end{array}\right\}}{\int \cdots \int} e^{-\sum_{i=1}^{r} s_i}\, ds_1 \ldots ds_r=F_r(x, T). \tag{3.4.34}$$

Par conséquent, nous avons

$$\mathbf{P}\{S(t_r)\leqslant s, \quad t_r<T\}=F_r(\lambda s, \lambda T). \tag{3.4.35}$$

Répétant ensuite tous les raisonnements utilisés pour la construction de l'ensemble $\mathfrak{F}$ et des intervalles de confiance pour le plan $[N, V, (r, T)]$ et tenant compte du fait que la distribution de $d(T)$ est binomiale, nous obtenons les intervalles de confiance pour le paramètre λ avec un coefficient de confiance non inférieur à $\alpha=$ $=1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$. Si à l'instant T, où cessent les essais, le nombre global de pannes $d(T)=d<r$, alors on trouve la limite supérieure de l'intervalle de confiance de l'équation

$$\sum_{k=0}^{d} C_N^k (1-e^{-\bar{\lambda} T})^k e^{-(N-k)\bar{\lambda} T}=\varepsilon_1>0, \tag{3.4.36}$$

et la limite inférieure de l'équation

$$\sum_{k=d}^{N} C_N^k (1-e^{-\underline{\lambda} T})^k e^{-(N-k)\underline{\lambda} T}=\varepsilon_2>0. \tag{3.4.37}$$

Si l'instant de l'apparition de la r-ième panne $t_r<T$, alors on trouve la limite supérieure de l'équation

$$\sum_{k=0}^{r-1} C_N^k (1-e^{-\bar{\lambda} T})^k e^{-(N-k)\bar{\lambda} T}+1-F(\bar{\lambda} S(t_r), \bar{\lambda} T)=\varepsilon_1, \tag{3.4.38}$$

et la limite inférieure de l'équation

$$F(\underline{\lambda} S(t_r), \underline{\lambda} T)=\varepsilon_2, \tag{3.4.39}$$

où $S(t_r)$ désigne le temps global de fonctionnement des éléments à l'instant t_r.

Comparant (3.4.36), (3.4.37) avec les formules du § 1.6 pour les limites de l'intervalle de confiance du paramètre p de la distri-

bution binomiale et notant que $\lambda = \frac{1}{T} \ln \frac{1}{1-p}$, nous obtenons que pour le cas $t_r > T$

$$\underline{\lambda} = \frac{\underline{\Delta}'(d)}{T}, \quad \overline{\lambda} = \frac{\overline{\Delta}'(d)}{T}.$$

Les valeurs de $\underline{\Delta}'(d)$ et $\overline{\Delta}'(d)$ sont rapportées dans la table 8 de l'annexe. Pour le cas $t_r \leqslant T$ on doit disposer d'une table des solutions des équations (3.4.38) et (3.4.39).

Si pour la valeur choisie de r du plan $[N, B, (r, T)]$ le rapport $\frac{r}{N} < 0,1$, les plans $[N, V, (r, T)]$ et $[N, B, (r, T)]$ sont pratiquement équivalents; de même les plans $[N, V, r]$ et $[N, B, r]$ sont aussi équivalents, puisque le nombre d'éléments à remplacer ne constitue qu'une faible part de leur nombre total. C'est pourquoi, en première approximation, on peut estimer pour construire les intervalles de confiance que les essais ont été réalisés non pas suivant le plan $[N, B, (r, T)]$, mais suivant le plan $[N, V, (r, T)]$. Pour cette même raison, les intervalles de confiance construits en se basant sur les plans $[N, B, T]$ et $[N, V, T]$ sont pratiquement équivalents, si seulement le nombre observé $d(T)$ d'éléments tombés en panne est notablement inférieur au nombre total N d'éléments simultanément soumis à l'essai, $\frac{d(T)}{N} < 0,1$.

Les formules principales de ce paragraphe sont réunies dans la table 6 de l'annexe.

§ 3.5. Intervalles et domaines de confiance. Cas de nombreux paramètres *

Nous avons indiqué au début du paragraphe précédent qu'il est parfois insuffisant de caractériser les différents indices de fiabilité uniquement à l'aide des estimations ponctuelles. Ces raisonnements restent également en vigueur pour le cas de nombreux paramètres inconnus. Si les instants des pannes sont des variables aléatoires, dont les fonctions de répartition dépendent, suivant une loi connue, de plusieurs paramètres, alors les indices numériques de fiabilité (la probabilité de fonctionnement sans défaillance au cours du temps T, le temps moyen s'écoulant jusqu'à la première panne, etc.) sont des fonctions bien déterminées des valeurs de ces paramètres. Un grand nombre de problèmes se posent alors. Pour montrer la grande diversité des positions de ces problèmes, nous noterons trois voies différentes impliquant nécessairement la résolu-

* Une partie du matériel exposé dans ce paragraphe exige une préparation mathématique spéciale.

tion des problèmes multiparamétriques. Premièrement, pour un grand nombre d'éléments la fonction de répartition de l'instant d'apparition de la panne dépend de deux ou d'un plus grand nombre de paramètres. Nous avons rapporté au § 1.4 diverses familles de fonctions de répartition dépendant de plusieurs paramètres: la loi de Weibull, la loi normale et la loi lognormale, etc. La structure des données statistiques, sur la base desquelles on doit construire l'intervalle de confiance pour la fonction donnée des valeurs inconnues des paramètres, peut correspondre à l'un des plans décrits au § 3.1. Une situation plus complexe se présente dans la deuxième voie quand on réalise les essais des éléments (ou des systèmes) composés de plusieurs parties, dont les pannes entraînent la mise hors service de l'élément tout entier.

Si, par exemple, les pannes de ces parties composantes sont mutuellement indépendantes et si la fonction de répartition de l'instant de la panne pour la i-ième partie est égale à $F_i(t, \alpha_i, \beta_i)$, autrement dit dépend de deux paramètres, alors la probabilité de fonctionnement sans défaillance d'un tel élément au cours du temps T est $R(T) = \prod_{i=1}^{N} [1 - F_i(T, \alpha_i, \beta_i)]$. Ici N désigne le nombre de parties composantes de l'élément. Nous voyons ainsi que l'importante caractéristique numérique de la fiabilité $R(T)$ est une fonction de $2N$ valeurs inconnues des paramètres. Notons que dans cette situation le nombre des plans possibles du déroulement des essais peut être notablement augmenté par rapport aux plans décrits au § 3.1. En effet, l'instant où l'on arrête les essais peut dépendre du fait, dans quelles parties composantes de l'élément se sont produites les pannes. Enfin, les problèmes multiparamétriques apparaissent lors de la prévision des indices de fiabilité d'un système composé de nombreux blocs différents. Il faut alors se baser sur les données statistiques obtenues séparément pour chaque type de blocs composant le système. Il est, par exemple, intéressant de construire l'intervalle de confiance pour la probabilité de fonctionnement sans défaillance $R(T)$ au cours du temps T, quand les blocs tombent en panne indépendamment et que la probabilité de fonctionnement sans défaillance du i-ième bloc est égale à $P_i = R_i(T)$. Si m désigne le nombre des différents types de blocs et $k_i - 1$ le nombre des blocs de réserve du même type (réserve chargée) entrant dans la composition du système, alors

$$R(T) = \prod_{i=1}^{m} [1 - (1 - P_i)^{k_i}]. \qquad (3.5.1)$$

On suppose que les essais des blocs du i-ième type ont été réalisés conformément à l'un des plans possibles, par exemple $[N_i, B, T]$. Si l'on estime que le rôle des paramètres est joué par les m valeurs

inconnues $P_i = R_i(T)$, on est de nouveau conduit au problème de la construction de l'intervalle de confiance pour une fonction de nombreuses valeurs inconnues des paramètres. Il pourrait sembler au premier abord que ce problème peut être aisément ramené au cas d'un seul paramètre inconnu $P_i = R_i(T)$. Pour cela il faut simplement trouver les intervalles de confiance $(\underline{P}_i, \overline{P}_i)$ séparément pour chacun des N paramètres $P_i = R_i(T)$, puis choisir $(\underline{R}, \overline{R})$ en tant qu'intervalle de confiance l'intervalle de $R(T)$, où

$$\underline{R} = \prod_{i=1}^{m} [1-(1-\underline{P}_i)^{k_i}], \qquad \overline{R} = \prod_{i=1}^{m} [1-(1-\overline{P}_i)^{k_i}].$$

Notons que si le coefficient de confiance des intervalles $(\underline{P}_i, \overline{P}_i)$ est égal à α_i, le coefficient de confiance de R n'est pas inférieur à $\alpha = \prod_{i=1}^{m} \alpha_i$. Toutefois, α s'avère trop petit, même pour les petites valeurs de m. Par exemple, si $m = 10$, $\alpha_i = 0{,}9$, alors $\alpha = (0{,}9)^{10} \approx 0{,}35$. Par conséquent, nous pouvons seulement affirmer qu'en moyenne sur 100 intervalles de confiance ainsi construits non moins de 35 d'entre eux contiendront la valeur véritable de la probabilité $R(T)$. La réduction à un nombre moindre de paramètres effectuée de cette manière s'avère ainsi peu intéressante.

Intervalles de confiance dans le cas d'une chaîne d'éléments reliés en série. Considérons les cas les plus simples de la construction d'un intervalle de confiance pour la probabilité de fonctionnement sans défaillance du système composé de m éléments de l types, reliés en série. Le nombre d'éléments du i-ième type entrant dans le système est égal à m_i, $i = 1, \ldots, l$, $\sum_{i=1}^{l} m_i = m$. On suppose que les pannes des éléments ont lieu indépendamment les unes des autres et que la panne de l'un d'entre eux entraîne la panne de tout le système. Désignons par $R_i(T)$ la probabilité de fonctionnement sans défaillance des éléments du i-ième type au cours du temps T. La probabilité $R(T)$ de fonctionnement sans défaillance du système s'exprime par la formule

$$R(T) = \prod_{i=1}^{l} R_i(T)^{m_i} = e^{\sum_{i=1}^{l} m_i \ln R_i(T)}. \tag{3.5.2}$$

Comme habituellement $R_i(T) \approx 1$, en utilisant la relation $\ln R_i(T) \approx -[1-R_i(T)]$, on peut également, au lieu de (3.5.2), utiliser lors des calculs la formule approchée

$$R(T) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{l} m_i [1-R_i(T)]\right\}. \tag{3.5.2'}$$

Tenant compte de la dépendance monotone $R(T)$ de $\sum_{i=1}^{l} m_i \ln R_i(T)$, on peut ramener le problème de la recherche de l'intervalle de confiance inférieur de $R(T)$ au problème équivalent de la recherche de l'intervalle de confiance supérieur pour la somme $\sum m_i \ln R_i(T)$ de fonctions convexes.

La construction de l'intervalle de confiance dépend notablement du fait, quelles sont les données statistiques relatives aux paramètres inconnus $R_i(T)$ dont nous disposons. Supposons que les éléments du i-ième type sont soumis à l'essai conformément au plan $[N_i, B, (T)]$, $i = 1, \ldots, l$, et que l'on a enregistré d_i pannes. Si les éléments sont suffisamment sûrs et que N_i est grand ($N_i > 20$), on peut estimer que les d_i suivent une loi de distribution poissonienne de paramètre $\lambda_i = N_i [1 - R_i(T)]$. On utilise alors respectivement au lieu de la formule (3.5.2) la formule (3.5.2′).

Considérons deux espaces: l'espace des résultats des essais $(d_1, \ldots, d_l)$ et l'espace des paramètres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$. Comme les valeurs $d_1, \ldots, d_l$ suivent une distribution de Poisson, leur somme $d = d_1 + \ldots + d_l$ suit également une distribution de Poisson de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_l$. Si $\Delta_\alpha(d)$ sont les quantiles de la distribution de Poisson (la table 7 de $\Delta_\alpha(d)$ est donnée dans l'annexe), l'affirmation $\{\lambda_1 + \ldots + \lambda_l \leqslant \Delta_\alpha(d)\}$ est équivalente à l'affirmation $\{d_1 + \ldots + d_l \leqslant d_i(\lambda_1 + \ldots + \lambda_l)\}$, où $d_i(\lambda)$ est déterminée de la condition

$$\sum_{k=0}^{d(\lambda)+1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \geqslant 1 - \alpha \geqslant \sum_{k=0}^{d(\lambda)} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

D'après la construction de $\Delta_\alpha(d)$ nous avons

$$\mathbf{P}\{\lambda_1 + \ldots + \lambda_l \leqslant \Delta_{1-\alpha}(d)\} \geqslant \alpha. \tag{3.5.3}$$

A la base de (3.5.3) considérons dans l'espace des paramètres définis par les conditions

$$\lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \leqslant \Delta_{1-\alpha}(d), \quad d = d_1 + \ldots + d_l. \tag{3.5.4}$$

Si l'on considère, sur l'ensemble défini par les inégalités (3.5.4), le maximum de la fonction $\varphi = -\sum_{i=1}^{l} m_i \ln R_i(T)$

$$\bar{\varphi} = \max\left[-\sum_{i=1}^{l} m_i \ln R_i(T)\right], \tag{3.5.5}$$

nous aurons pour les événements

$$\{\bar{\varphi} = \max \sum_{i=1}^{l} m_i \ln R_i(T) \geqslant \varphi = \sum_{i=1}^{l} m_i \ln R_i(T)\} \supseteq$$
$$\supseteq \{\lambda_1 + \ldots + \lambda_l \leqslant \Delta_{1-\alpha}(d)\}. \tag{3.5.6}$$

Comme la probabilité de l'événement $\{\lambda_1 + \ldots + \lambda_l \leqslant \Delta_{1-\alpha}(d)\}$ n'est pas inférieure à α, nous avons a fortiori, en tenant compte de (3.5.6), $\mathbf{P}\{\overline{\varphi} > \varphi\} \geqslant \alpha$.

On peut prendre en qualité de limite inférieure de confiance de $R(T)$ la valeur $\underline{R}(T) = \exp\{-\overline{\varphi}\}$. Le problème de la recherche de la limite inférieure de confiance est ainsi ramené à celui de la recherche du maximum de la fonction (3.5.5) pour les limitations (3.5.4). Si l'on utilise l'approximation (3.5.2′), alors (3.5.5) est remplacée par la condition

$$\overline{\varphi} \cong \max \sum_{i=1}^{l} m_i (1 - R_i(T)). \tag{3.5.7}$$

Le maximum (3.5.7) sous les conditions (3.5.4) peut aisément être trouvé sous forme explicite. Nous avons ici

$$\overline{\varphi} = \Delta_{1-\alpha}(d) \max_{1 \leqslant i \leqslant l} \frac{m_i}{N_i}. \tag{3.5.8}$$

Partant de la formule (3.5.8), nous obtenons que la limite inférieure de confiance de la probabilité $R(T)$ de fonctionnement sans défaillance avec coefficient de confiance non inférieur à α est égale à

$$\underline{R}(T) = \exp\left\{-\left[\max_{1 \leqslant i \leqslant l} \frac{m_i}{N_i}\right] \Delta_{1-\alpha}(d_1 + \ldots + d_l)\right\}. \tag{3.5.9}$$

La limite inférieure de confiance construite d'après la formule (3.5.9) ne donnera pas une bonne approximation de $R(T)$ pour toutes les valeurs des paramètres $\lambda_i = N_i[1 - R_i(T)]$. Dans les cas où l'on dispose d'un matériel statistique important, λ_i et, respectivement, d_i sont grands, on peut utiliser l'approximation normale, proposée dans l'article de R. Mirni et A. Soloviev [11]. Remplaçant λ_i par les estimations d_i et tenant compte du fait que $\sum_{i=1}^{l} \frac{m_i}{N_i} d_i$ suit une loi de distribution normale, on peut affirmer avec une probabilité proche de α que

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{m_i}{N_i} \lambda_i \leqslant \sum_{i=1}^{l} \frac{m_i}{N_i} d_i + u_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{l} \frac{m_i^2}{N_i} \frac{d_i}{N_i} \left(1 - \frac{d_i}{N_i}\right)},$$

où u_α est le quantile respectif de la distribution normale (cf. table 3 de l'annexe).

La limite inférieure de confiance pour la probabilité $R(T)$ est ainsi de la forme

$$\underline{R}(T) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{l} \frac{m_i}{N_i} d_i - u_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{l} \frac{m_i^2}{N_i} \frac{d_i}{N_i} \left(1 - \frac{d_i}{N_i}\right)}\right\}. \tag{3.5.10}$$

En qualité d'un second exemple considérons le cas de la construction de la limite inférieure de confiance pour la probabilité de fonctionnement sans défaillance, donnée par la formule (3.5.2), quand $R_i(T) = e^{-\lambda_i T}$. Ainsi, nous avons ici

$$R(T) = e^{-\sum_{i=1}^{l} m_i \lambda_i T}.$$

Nous supposerons que les données relatives aux valeurs inconnues des paramètres λ_i sont obtenues conformément aux plans d'expériences $[N_i, B, r_i]$. Supposons encore que les valeurs des temps globaux de fonctionnement des éléments sont $S_B(t_{r_i}) = S_i$, $i = 1, \ldots, l$. Les S_i sont des statistiques exhaustives. Notant que $2\lambda_i S_i$ suit une distribution du χ^2 à $2r_i$ degrés de liberté et que lors de l'addition des variables aléatoires obéissant à une loi de distribution du χ^2, les degrés de liberté s'ajoutent, nous obtenons

$$\mathbf{P}\{2 \sum_{i=1}^{l} \lambda_i S_i < \chi^2_{\alpha}(2 \sum_{i=1}^{l} r_i)\} = \alpha,$$

où $\chi^2_{\alpha}(n)$ est le quantile de la distribution du χ^2 à n degrés de liberté (cf. table 4 de l'annexe). L'événement

$$2 \sum_{i=1}^{l} \lambda_i S_i < \chi^2_{\alpha}(2 \sum_{i=1}^{l} r_i), \quad \lambda_i \geqslant 0, \tag{3.5.11}$$

peut être considéré comme des inégalités imposées aux paramètres λ_i ayant une probabilité α d'être réalisées. Si l'on considère le maximum de la fonction

$$\bar{\psi} = \max \sum_{i=1}^{l} m_i \lambda_i \tag{3.5.12}$$

sur l'ensemble défini par les inégalités (3.5.11), il est évident que nous aurons

$$\{\bar{\psi} = \max \sum_{i=1}^{l} m_i \lambda_i \geqslant \sum_{i=1}^{l} m_i \lambda_i\} \supseteq \{2 \sum_{i=1}^{l} \lambda_i S_i < \chi^2_{\alpha}(2 \sum_{i=1}^{l} r_i)\}.$$

Nous en tirons

$$\mathbf{P}\{R(T) = e^{-\sum_{i=1}^{l} m_i \lambda_i T} \geqslant R(T) = e^{-\bar{\psi} T}\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\bar{\psi} \geqslant \sum_{i=1}^{l} m_i \lambda_i\} \geqslant \mathbf{P}\{2 \sum_{i=1}^{l} \lambda_i S_i < \chi^2_{\alpha}(2 \sum_{i=1}^{l} r_i)\} = \alpha.$$

Le problème de la recherche de la limite inférieure de l'intervalle de confiance de $R(T)$ est ainsi ramené au problème de la recherche

du maximum de la fonction (3.5.12) pour les limitations du type des inégalités (3.5.11). La réponse est trouvée sous forme explicite:

$$\bar{\psi} \leqslant \left(\max_{1\leqslant i\leqslant l} \frac{m_i}{S_i}\right)\left\{\frac{\chi_\alpha^2\,(2\sum_{i=1}^{l} r_i)}{2}\right\}.$$

Ainsi, la limite inférieure de l'intervalle de confiance avec un coefficient de confiance non inférieur à α est

$$\underline{R}(T) = \exp\left\{-\left(\max_{1\leqslant i\leqslant l} \frac{m_i}{S_i}\right)\frac{\chi_\alpha^2\,(2\sum_{i=1}^{l} r_i)}{2}\,T\right\}.$$

Pour de grandes valeurs de r_i on peut utiliser l'approximation normale pour les estimations $\hat{\lambda}_i = \frac{r_i-1}{S_i}$. Ici en remplaçant λ_i par les estimations $\hat{\lambda}_i$, nous avons avec une probabilité proche de α

$$\sum_{i=1}^{l} m_i\lambda_i \leqslant \sum_{i=1}^{l} m_i\frac{r_i-1}{S_i} + u_\alpha\sqrt{\sum_{i=1}^{l} m_i^2\frac{r_i-1}{S_i^2}}.$$

Ainsi, la formule approchée pour la limite inférieure de l'intervalle de confiance avec un coefficient de confiance α est de la forme

$$\underline{R}(T) = \exp\left\{-\left[\sum_{i=1}^{l} m_i\frac{r_i-1}{S_i} + u_\alpha\sqrt{\sum_{i=1}^{l} m_i^2\frac{r_i-1}{S_i^2}}\right]T\right\}. \quad (3.5.12')$$

Méthode générale de construction des intervalles de confiance. Formulons maintenant dans le plan le plus général la position du problème relatif à la construction des intervalles de confiance dans le cas de nombreux paramètres inconnus.

Soit $X = \{x\}$ l'espace des données statistiques. Les résultats des épreuves sont les points x de cet espace. On donne sur cet espace une famille des mesures de probabilité $\mathrm{P}_\theta\{x\}$ dépendant de la valeur d'un paramètre multidimensionnel $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N) \in \Omega$, où Ω est l'ensemble de toutes les valeurs possibles du paramètre θ; on se donne également une fonction numérique connue $\varphi(\theta)$. On demande de construire d'après les résultats connus x des épreuves l'intervalle de confiance $(\underline{\varphi}(x), \bar{\varphi}(x))$ tel que pour tout $\theta \in \Omega$ on ait

$$\mathrm{P}_\theta\{\underline{\varphi}(x) < \varphi(\theta) < \bar{\varphi}(x)\} \geqslant \alpha.$$

Si α est le plus grand des nombres vérifiant cette inégalité, il est appelé *coefficient de confiance* de l'intervalle de confiance $(\underline{\varphi}(x), \overline{\varphi}(x))$. Dans le cas contraire on dit qu'on a construit un intervalle de confiance avec un coefficient de confiance *non inférieur à* α.

Nous allons illustrer sur les deux exemples suivants la position du problème et la méthode de solution.

Exemple 1 (position du problème). Les essais des éléments sont conduits d'après le plan $[N, B, N]$. La fonction de répartition des instants des pannes $F(t, \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$, où $\Phi(t)$ est la fonction de répartition de la loi normale. Les valeurs inconnues des paramètres sont

$$\theta_1 = \mu, \quad \theta_2 = \sigma, \quad \Omega = \{-\infty < \theta_1 < +\infty, \quad 0 \leqslant \sigma < \infty\}.$$

Les statistiques exhaustives pour les paramètres μ, σ sont

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i, \quad S^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$$

(cf. § 1.6), c'est pourquoi l'espace X se compose des points $x = (\bar{x}, S)$, $-\infty < \bar{x} < +\infty$, $S \geqslant 0$.

La famille des mesures $\mathbf{P}_\theta(x)$ est une famille de distributions conjointes des statistiques $\bar{x}$ et S^2. On demande de construire l'intervalle de confiance $(\underline{\varphi}(\bar{x}, S), 1)$ pour la fonction $\varphi(\theta) = \varphi(\mu, \sigma) = 1 - \Phi\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right)$, autrement dit la probabilité de fonctionnement sans défaillance de l'élément dans l'intervalle de temps $(0, T)$.

Exemple 2. Le système comporte k_i blocs du i-ième type, $i = 1, \ldots, N$. La probabilité $R(T)$ de fonctionnement sans défaillance du système est donnée par la formule (3.5.1), où les probabilités de fonctionnement sans défaillance du i-ième bloc sont $P_i = R_i(T)$. Les essais des blocs du i-ième type sont conduits suivant le plan $[N_i, B, T]$. Comme la statistique exhaustive pour P_i est le nombre $d_i(T)$ d'éléments tombés en panne au cours du temps T de la conduite des essais, on choisit en qualité d'espace X l'ensemble des vecteurs à N dimensions $X = (d_1, \ldots, d_N)$, où $d_i = 0, 1, \ldots, N_i$ est égal au nombre d'éléments du i-ième type, tombés en panne durant les essais. Le paramètre inconnu est $\theta = (P_1, \ldots, P_N)$, $\Omega = \{0 \leqslant P_i \leqslant 1, i = 1, \ldots, N\}$. Comme on suppose que les instants des pannes des divers éléments sont indépendants les uns des autres, les $d_i(T)$ suivent une distribution binomiale, et la famille des mesures probabilistes dans l'espace X est donnée par la formule

$$\mathbf{P}_\theta\{x\} = \prod_{i=1}^{N} \mathbf{P}_\theta\{d_i(T) = d_i\} = \prod_{i=1}^{N} C_{N_i}^{d_i} (1 - P_i)^{d_i} P_i^{N-d_i}.$$

On demande de construire la limite inférieure de l'intervalle de confiance pour $\varphi(\theta) = R(T)$, autrement dit pour la probabilité de fonctionnement sans défaillance.

La méthode générale de construction de l'intervalle de confiance est une généralisation naturelle de la méthode pour le cas d'un seul paramètre inconnu que nous avons exposée au § 1.6. Nous choisissons en qualité de variable aléatoire, dont la distribution dépend de la valeur inconnue du paramètre $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$, l'estimation $\hat{\varphi}(x)$ pour la valeur de la fonction donnée $\varphi(\theta)$. On considère ensuite l'espace $\mathfrak{E}$ des points $(\theta_1, \ldots, \theta_N, \hat{\varphi}(x))$. A chaque point $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N)$ de l'axe des valeurs $\hat{\varphi}$ on fait correspondre un ensemble $G(\theta)$ tel que

$$\mathrm{P}\{\hat{\varphi} \in G(\theta)\} \geqslant \alpha. \tag{3.5.13}$$

Le système d'ensembles $G(\theta)$ est construit de telle façon que l'inégalité (3.5.13) ne puisse être améliorée pour toutes les valeurs de θ, et que la valeur de la probabilité $\mathrm{P}\{\hat{\varphi} \in G(\theta)\}$ soit le plus près possible de α. Si la fonction de répartition de l'estimation $F_\theta(x) = \mathrm{P}\{\hat{\varphi}(\theta) < x\}$ est continue, et le paramètre θ est à une dimension, on choisit en qualité d'ensemble $G(\theta)$ l'intervalle $(\underline{G}(\theta), \overline{G}(\theta))$, où

$$F_\theta(\overline{G}(\theta)) = 1 - \varepsilon_1, \quad F_\theta(\underline{G}(\theta)) = \varepsilon_2, \quad \alpha = 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Si l'on considère maintenant le sous-ensemble $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{E}$ des points $(\theta_1, \ldots, \theta_N, \hat{\varphi})$ pour lesquels $\hat{\varphi} \in G(\theta)$, il découle de (3.5.13) que

$$\mathrm{P}\{(\theta, \hat{\varphi}) \in \mathfrak{F}\} \geqslant \alpha. \tag{3.5.14}$$

Fixons maintenant la valeur $\hat{\varphi}$ et isolons dans l'ensemble Ω des valeurs possibles du paramètre θ le sous-ensemble $H(\hat{\varphi}) \subset \Omega$ (fig. 3.5.1), formé uniquement des points pour lesquels $\hat{\varphi} \in G(\theta)$. En vertu de la construction l'événement $\{\hat{\varphi} \in G(\theta)\}$ est équivalent à l'événement $(\theta, \hat{\varphi}) \in \mathfrak{F}$. Comme les probabilités des événements équivalents coïncident, nous obtenons, compte tenu de (3.5.14), que

$$\mathrm{P}\{\theta \in H(\hat{\varphi})\} \geqslant \alpha. \tag{3.5.15}$$

A chaque valeur de l'estimation $\hat{\varphi}$ nous faisons correspondre les variables aléatoires $\underline{\varphi}(\hat{\varphi}) = \inf\limits_{\theta \in H(\hat{\varphi})} \varphi(\theta)$, $\overline{\varphi} = \sup\limits_{\theta \in H(\hat{\varphi})} \varphi(\theta)$. Généralement parlant, l'affirmation suivant laquelle $\underline{\varphi}(\hat{\varphi})$ et $\overline{\varphi}(\hat{\varphi})$ sont des variables aléatoires exige une démonstration spéciale, toutefois, il en sera ainsi dans tous les cas intéressants en pratique. L'évé-

nement $\theta \in H(\hat{\varphi})$ implique l'événement $\{\underline{\varphi}(\hat{\varphi}) < \varphi(\theta) < \overline{\varphi}(\hat{\varphi})\}$, de sorte que nous obtenons de (3.5.15)

$$\mathbf{P}\{\underline{\varphi}(\hat{\varphi}) < \varphi(\theta) < \overline{\varphi}(\hat{\varphi})\} \geqslant \mathbf{P}\{\theta \in H(\hat{\varphi})\} \geqslant \alpha.$$

Nous avons ainsi construit l'intervalle de confiance avec un coefficient de confiance non inférieur à α.

Exemples. Utilisons cette méthode générale pour la résolution des problèmes que nous avons posés aux exemples 1 et 2.

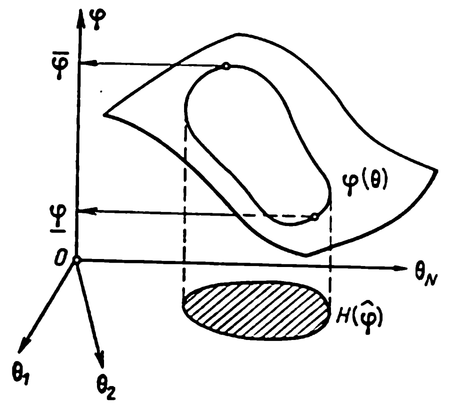


Fig. 3.5.1

Pour le cas de l'exemple 1 prenons en qualité d'estimation non biaisée de $\varphi_T(\mu, \sigma)$ l'estimation non biaisée établie par A. Kolmogorov [12]

$$\hat{\varphi}(x, S) = 1 - F\left(\frac{T - \bar{x}}{\sqrt{N}S}\right), \tag{3.5.16}$$

où

$$F(y) = \int_{-\infty}^{y} f_N(t)\,dt;$$

$$f_N(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)\sqrt{N-1}}\left(1 - \frac{t^2}{N-1}\right)^{\frac{N}{2}},$$

si $|t| \leqslant \sqrt{N-1}$; $f_N(t) = 0$, si $|t| > \sqrt{N-1}$. Comme $F(y)$ est une fonction monotone de y, il découle de (3.5.16) que l'estimation $\hat{\varphi}(\bar{x}, S)$ est aussi une fonction monotone des valeurs de la statistique $\frac{T-\bar{x}}{S}\sqrt{N}$. C'est pourquoi les intervalles de confiance construits à partir de l'estimation $\hat{\varphi}(\bar{x}, S)$ ou de la statistique $\frac{T-\bar{x}}{S}\sqrt{N}$ coïncident, et nous pouvons prendre $\frac{T-\bar{x}}{S}\sqrt{N}$ au lieu de la statistique $\hat{\varphi}$. En effet, si l'on utilise la méthode des seuils avec les nombres ε_1, ε_2, $\alpha = 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$, les ensembles correspondants $H(\hat{\varphi}(\bar{x}, S))$ et $H'\left(\frac{T-\bar{x}}{S}\sqrt{N}\right)$ coïncident. Le numérateur et le dénominateur de la statistique $\hat{\varphi} = \frac{T-\bar{x}}{S}\sqrt{N}$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes. La statisti-

que $\frac{T-\bar{x}}{\sigma}\sqrt{N}$ suit une distribution normale de moyenne $\delta = \frac{T-\mu}{\sigma}\sqrt{N}$ et de variance unité, et $\frac{S^2}{\sigma^2}$ suit une distribution du χ^2 à $(N-1)$ degrés de liberté. Ainsi, la statistique $\hat{\varphi}$ suit une distribution non centrée de Student (cf. § 1.3) de paramètre $\delta = \frac{T-\mu}{\sigma}\sqrt{N}$ et à $(N-1)$ degrés de liberté. Désignons par p

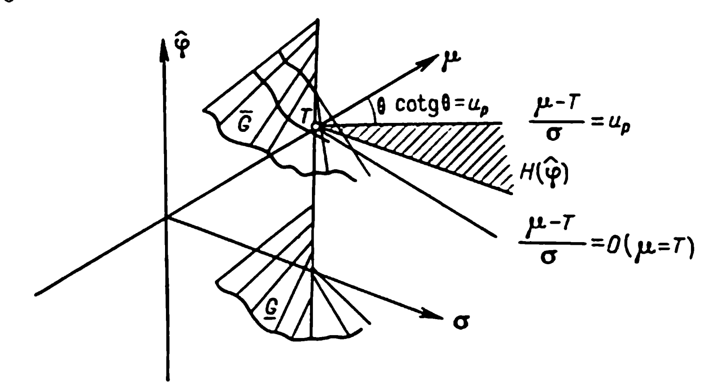


Fig. 3.5.2

la probabilité d'absence de pannes dans l'intervalle $(0, T)$; $p = 1 - \Phi\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right)$; c'est pourquoi en utilisant les notations usuelles et la formule des quantiles de la distribution normale, nous obtenons que pour tous les points de la demi-droite $(\sigma > 0)$

$$\frac{\mu - \mathrm{T}}{\sigma} = u_p \tag{3.5.17}$$

les valeurs de la probabilité cherchée sont égales à p. Pour différentes valeurs de $0 \leqslant p \leqslant 1$ ces demi-droites forment un faisceau issu du point $(0, T)$. En particulier, à la demi-droite $T = \mu$, $\sigma \geqslant 0$ correspond la valeur $p = 0{,}5$. Aux demi-droites formant un angle de pente $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{cotg}\theta = u_p$ (fig. 3.5.2) correspondent les valeurs $p > 0{,}5$. Les ensembles $G(\theta)$, $\theta = (\mu, \sigma)$ sont identifiés avec les intervalles $(\underline{y}, \bar{y})$, où $F_{N-1}(\bar{y}, \delta) = 1 - \varepsilon_1$, $F_{N-1}(\underline{y}, \delta) = \varepsilon_2$, $\alpha = 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ et $F_{N-1}(\bar{y}, \delta)$ est la fonction de répartition de la loi non centrée de Student à $(N-1)$ degrés de liberté et avec un biais égal à δ. Les valeurs de $\underline{y}$ et $\bar{y}$ sont alors identiques le long des demi-droites $\frac{T-\mu}{\sigma}\sqrt{N} = \delta = \text{const}$, de sorte que l'ensemble $\mathfrak{F}$ est l'ensemble des points compris entre deux surfaces

réglées $\overline{G}$ et $\underline{G}$ (cf. fig. 3.5.2). Supposons que l'on connaisse la valeur de la statistique $\hat{\varphi} = \frac{T - \bar{x}}{S} \sqrt{N}$; dans ce cas l'ensemble $H(\hat{\varphi}) \subset \subset \Omega$ est formé des points $\theta = (\mu, \sigma)$, pour lesquels $\bar{\delta}(\hat{\varphi}) < \delta = \frac{T-\mu}{\sigma} \sqrt{N} < \delta(\hat{\varphi})$, où $\underline{\delta}(\hat{\varphi})$ et $\bar{\delta}(\hat{\varphi})$ sont déterminées comme les solutions des équations

$$F_{N-1}(\hat{\varphi}, \bar{\delta}(\hat{\varphi})) = 1 - \varepsilon_1, \qquad F_{N-1}(\hat{\varphi}, \underline{\delta}(\hat{\varphi})) = \varepsilon_2. \qquad (3.5.18)$$

Pour résoudre ces équations on peut élaborer des tables correspondantes. Ainsi, les frontières de l'ensemble $H(\hat{\varphi})$ sont les deux rayons

$$\frac{\mu - T}{\sigma} = -\frac{\underline{\delta}(\hat{\varphi})}{\sqrt{N}}, \qquad \frac{\mu - T}{\sigma} = -\frac{\bar{\delta}(\hat{\varphi})}{\sqrt{N}}. \qquad (3.5.19)$$

Notons que $-\frac{\underline{\delta}(\hat{\varphi})}{\sqrt{N}} < -\frac{\bar{\delta}(\hat{\varphi})}{\sqrt{N}}$. C'est pourquoi nous obtenons de (3.5.17) que les valeurs $\underline{p}(\hat{\varphi})$ et $\bar{p}(\hat{\varphi})$ sont déterminées des équations

$$u_{\bar{p}(\hat{\varphi})} = -\frac{\bar{\delta}(\hat{\varphi})}{\sqrt{N}}, \qquad u_{\underline{p}(\hat{\varphi})} = -\frac{\underline{\delta}(\hat{\varphi})}{\sqrt{N}}. \qquad (3.5.20)$$

Dans notre cas les événements $\{\underline{p}(\hat{\varphi}) < p < \bar{p}(\hat{\varphi})\}$ et $\{\theta \in H(\hat{\varphi})\}$ sont équivalents, de sorte que

$$\mathbf{P}\{\underline{p}(\hat{\varphi}) < p < \bar{p}(\hat{\varphi})\} = \mathbf{P}\{\theta \in H(\hat{\varphi})\} = \alpha. \qquad (3.5.21)$$

L'intervalle de confiance $(\underline{p}, \bar{p})$ est ainsi construit en deux étapes. Tout d'abord on calcule à partir des équations (3.5.18) les valeurs des limites de l'intervalle de confiance pour un biais δ, puis en partant de (3.5.20) d'après la table des quantiles de la loi normale (cf. table 3 de l'annexe) on trouve les valeurs cherchées de $\underline{p}$ et $\bar{p}$.

Pour le problème formulé dans le second exemple nous ne pouvons obtenir une réponse exacte sous forme explicite que pour le cas particulier, où au cours des essais effectués suivant le plan $[N_i, B, T]$ on n'a pas observé de pannes, autrement dit $d_i(T) = 0$. La solution du problème dans ce cas particulier a été trouvée pour la première fois par R. Mirni. Ce résultat sembla tout d'abord aux auteurs de ce livre tellement inattendu qu'ils doutèrent de son exactitude.

Comme les estimations non biaisées et efficaces pour les probabilités de fonctionnement sans défaillance $R_i(T)$ sont les rapports

$\frac{N_i - d_i(T)}{N_i}$, l'estimation efficace de $R(T)$ donnée par la formule (3.5.1) est

$$\hat{\varphi} = \prod_{i=1}^{N} \left[1 - \left(\frac{d_i(T)}{N_i} \right)^{k_i} \right]; \tag{3.5.22}$$

$\hat{\varphi}$ prend une quantité finie de valeurs. Numérotons ces valeurs dans l'ordre de décroissance $r_1 = 1 > r_2 > r_3 > \ldots$ L'espace $\mathfrak{S}$ se compose des points (θ, x), où $\theta = (p_1, \ldots, p_N)$, $x = r_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Soit $r(\alpha, \theta)$ le plus petit des nombres r_i vérifiant la condition

$$\mathrm{P}\{\hat{\varphi} \leqslant r(\alpha, \theta)\} \geqslant \alpha; \tag{3.5.23}$$

nous prenons alors en qualité d'ensemble $G(\theta)$ l'ensemble de toutes les valeurs $r_i \leqslant r(\alpha, \theta)$. La fonction $r(\alpha, \theta)$ est une fonction en escalier dont l'allure générale est montrée sur la figure 3.5.3. Nous avons de (3.5.23)

Fig. 3.5.3

$$\mathrm{P}\{\hat{\varphi} \leqslant r(\alpha, \theta)\} = 1 - \sum_{r_i > r(\alpha, \theta)} \mathrm{P}\{\hat{\varphi} = r_i\} =$$

$$= 1 - \sum{}' \mathrm{P}\{d_i = l_i, \ i = 1, \ldots, N\} = 1 - \sum{}' \prod C_{N_i}^{l_i} (1 - P_i)^{l_i} P_i^{N_i - l_i},$$

où la sommation $\sum'$ est étendue à tous les vecteurs $(l_1, \ldots, l_N)$ tels que les valeurs de l'estimation $\hat{\varphi}$ dans la formule (3.5.22) soient égales aux nombres $r_i > r(\alpha, \theta)$. L'ensemble $H(\hat{\varphi})$ se compose des points $\theta = (P_1, \ldots, P_N)$ vérifiant les conditions $0 \leqslant P_i \leqslant 1$ et la condition

$$\sum{}'' \prod_{i=1}^{N} C_N^{l_i} (1 - P_i)^{l_i} P_i^{N_i - l_i} > 1 - \alpha, \tag{3.5.24}$$

où la sommation $\sum''$ est étendue à tous les vecteurs $(l_1, \ldots, l_N)$ tels que les valeurs de l'estimation d'après la formule (3.5.22), où l'on doit poser $d_i(T) = l_i$, soient égales aux nombres r_i. Les r_i sont alors non inférieurs à la valeur $\hat{\varphi}$ obtenue d'après la formule (3.5.22) à partir des données des essais. Comme la fonction $\varphi(\theta) = R(T)$ définie par la formule (3.5.1) est une fonction monotone croissante de ses arguments P_i, alors la limite $\underline{\varphi}(\hat{\varphi}) = \inf \varphi(\theta)$ est atteinte sur la frontière du domaine $H(\hat{\varphi})$, qui est définie à l'appui

de (3.5.24) par l'équation

$$\sum'' \prod_{i=1}^{N} C_N^{l_i} (1-P_i)^{l_i} P_i^{N-l_i} = 1-\alpha, \quad \text{où } 0 \leqslant P_i \leqslant 1. \quad (3.5.25)$$

Le problème de la construction de l'intervalle de confiance inférieur $(\varphi(\hat{\varphi}), 1)$ avec un coefficient de confiance non inférieur à α est ainsi ramené au problème de la recherche du minimum de la fonction $\varphi(\theta) = R(T)$ sur l'hypersurface donnée par l'équation (3.5.25). Dans le cas particulier, où le système se compose de N blocs différents (tous les $k_i = 1$) et où l'on n'observe pas de pannes au cours des essais (tous les $d_i(T) = 0$), $\hat{\varphi} = 1$ et $\sum''$ ne comprend qu'un seul terme. L'équation (3.5.25) se met alors sous la forme

$$\prod_{i=1}^{N} P_i^{N_i} = 1-\alpha. \quad (3.5.26)$$

On peut montrer que la limite inférieure $\underline{\varphi}$ de la fonction

$$\varphi(\theta) = R(T) = \prod_{i=1}^{N} P_i \quad (3.5.27)$$

sous la condition (3.5.26) est égale à $(1-\alpha)^{\varkappa}$, où $\varkappa = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} \frac{1}{N_i}$. Tenant compte du fait qu'en l'absence de pannes chez les N éléments soumis à l'essai l'intervalle de confiance inférieur $(\underline{\varphi}, 1)$ avec un coefficient de confiance α est déterminé de la relation $\underline{\varphi} = (1-\alpha)^{\frac{1}{N}}$, nous pouvons formuler le résultat obtenu sous la forme suivante.

Si l'on sait qu'au cours des essais des éléments de différents types réalisés suivant le plan $[N_i, B, T]$ on n'a pas observé de pannes, la limite inférieure de confiance pour la probabilité de fonctionnement sans défaillance du système au cours du temps T, définie par la formule (3.5.27), est, avec un coefficient de confiance α, égale à la limite inférieure de confiance, avec un même coefficient de confiance, calculée pour les éléments du i-ième type, pour lesquels $N_i = \min(N_1, \ldots, N_n)$.

Domaines de confiance. En conclusion de ce paragraphe faisons quelques remarques succinctes en ce qui concerne la méthode de construction des domaines (régions) de confiance que l'on peut utiliser pour l'estimation unidimensionnelle de plusieurs paramètres inconnus. La position du problème est analogue au problème que nous venons de considérer de la construction d'un intervalle de confiance pour $\varphi(\theta_1, \ldots, \theta_N)$. Nous supposons que l'on a un espace $X = \{x\}$ dont les points correspondent aux résultats des essais. Sur cet espace est donnée une famille des mesures de probabilité $\mathbf{P}_\theta$, dépendant des valeurs d'un paramètre vectoriel $\theta =$

$= (\theta_1, \ldots, \theta_N) \in \Omega$, où Ω est l'ensemble de toutes les valeurs possibles du paramètre θ. Si à chaque valeur $x \in X$ on fait correspondre le sous-ensemble $H(x)$ tel que

$$\mathbf{P}_\theta \{\theta \in H(x)\} \geqslant \alpha, \tag{3.5.28}$$

les sous-ensembles $H(x)$ sont appelés *domaines*, ou *régions*, *de confiance*. Si on ne peut améliorer l'inégalité (3.5.28) en augmentant α, cette valeur de α est appelée coefficient de confiance du domaine de confiance $H(x)$; dans le cas contraire on dit que le coefficient de confiance *n'est pas inférieur à* α. Faisons maintenant correspondre à chaque valeur $\theta \in \Omega$ un ensemble $G(\theta) \subseteq X$ tel que

$$\mathbf{P}_\theta \{x \in G(\theta)\} \geqslant \alpha. \tag{3.5.29}$$

Fixons la valeur x et déterminons l'ensemble $H(x)$ comme l'ensemble de tous les points θ pour lesquels $x \in G(\theta)$. Les événements $\{x \in G(\theta)\}$ et $\{\theta \in H(x)\}$ sont équivalents, car chacun d'eux implique l'autre, de sorte que leurs probabilités coïncident. Tenant compte de (3.5.29), nous obtenons que pour les ensembles construits $H(x)$ les inégalités (3.5.28) sont vérifiées. De plus, si pour au moins une valeur de θ l'inégalité (3.5.29) se transforme en égalité, alors pour cette même valeur de θ l'inégalité (3.5.28) se transforme en égalité; c'est pourquoi dans ce cas α est le coefficient de confiance pour l'ensemble $H(x)$.

Illustrons la méthode générale de construction des domaines de confiance sur un exemple simple. Supposons que la fonction de répartition $F(t)$ de l'instant de la panne soit normale avec des valeurs inconnues de la moyenne μ et de la variance σ^2. Les essais sont conduits suivant le plan $[N, B, N]$. Les statistiques exhaustives sont

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i, \qquad s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (t_i - \bar{t})^2,$$

où t_i sont les instants d'apparition des pannes. Choisissons en qualité d'espace X l'ensemble des points du plan $(\bar{x}, s)$, $-\infty < \bar{x} < +\infty$, $s \geqslant 0$; Ω est l'ensemble des points $\theta = (\mu, \sigma)$, $-\infty < \mu < +\infty$, $\sigma > 0$. Soient α_1 et α_2 des nombres positifs tels que le coefficient de confiance donné $\alpha = \alpha_1\alpha_2$.

Si maintenant on fait correspondre à chaque point $\theta = (\mu, \sigma)$ (cf. fig. 3.5.4) l'ensemble $G(\theta)$ qui est un rectangle $x_1 < \bar{x} < x_2$, $s_1 < s < s_2$, où x_i et s_i sont déterminés à partir des conditions

$$\mathbf{P}_\theta \{x_1 < \bar{x} < x_2\} = \alpha_1, \qquad \mathbf{P}_\theta \{s_1 < s < s_2\} = \alpha_2,$$

alors, en tenant compte du fait que $\bar{x}$ et s sont mutuellement indépendants, nous obtenons

$$\mathbf{P}\{(\bar{x}, s) \in G(\theta)\} = \mathbf{P}\{x_1 < \bar{x} < x_2\} \mathbf{P}\{s_1 < s < s_2\} = \alpha_1\alpha_2 = \alpha. \tag{3.5.30}$$

Ici $\bar{x}$ suit une distribution normale de moyenne μ et de variance $\frac{\sigma^2}{N}$; $\frac{s^2(N-1)}{\sigma^2}$ suit une distribution du χ^2 à $(N-1)$ degrés de liberté, de sorte que

$$\mathbf{P}_\theta\left\{-u_{\frac{1+\alpha_1}{2}}<\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\sqrt{N}<u_{\frac{1+\alpha_1}{2}}\right\}=$$

$$=\mathbf{P}_\theta\left\{\mu-u_{\frac{1+\alpha_1}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}<\bar{x}<\mu+u_{\frac{1+\alpha_1}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}=\alpha_1,$$

$$\mathbf{P}_\theta\left\{\chi^2_{\frac{1-\alpha_2}{2}}(N-1)<\frac{s^2(N-1)}{\sigma^2}<\chi^2_{\frac{1+\alpha_2}{2}}(N-1)\right\}=$$

$$=\mathbf{P}_\theta\left\{\sqrt{\frac{\chi^2_{\frac{1-\alpha_2}{2}}(N-1)}{N-1}}\,\sigma<s<\sqrt{\frac{\chi^2_{\frac{1+\alpha_2}{2}}(N-1)}{N-1}}\,\sigma\right\}=\alpha_2.$$

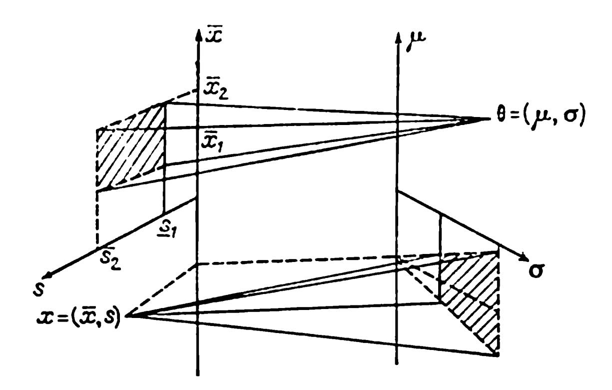


Fig. 3.5.4

Par conséquent, le rectangle $G(\theta)$ est défini par les inégalités

$$\left.\begin{array}{c}\mu-u_{\frac{1+\alpha_1}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{N}}<\bar{x}<\mu+u_{\frac{1+\alpha_1}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{N}},\\ \sqrt{\frac{\chi^2_{\frac{1-\alpha_2}{2}}(N-1)}{N-1}}\,\sigma<s<\sqrt{\frac{\chi^2_{\frac{1+\alpha_2}{2}}(N-1)}{N-1}}\,\sigma.\end{array}\right\}\quad(3.5.31)$$

Résolvant les inégalités (3.5.31) par rapport à μ et σ, nous obtenons les domaines de confiance cherchés $H(x)$, avec le coefficient de confiance α, sous forme de trapèzes dont les points (μ, σ)

vérifient les conditions (cf. [14])

$$\bar{x} - u_{\frac{1+\alpha_1}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu < \bar{x} + u_{\frac{1+\alpha_1}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{N}},$$

$$\sqrt{\frac{N-1}{\chi^2_{\frac{1+\alpha_2}{2}}(N-1)}}\, s < \sigma < \sqrt{\frac{N-1}{\chi^2_{\frac{1-\alpha_2}{2}}(N-1)}}\, s.$$

On peut construire, à l'aide des méthodes que nous venons d'exposer, divers systèmes d'intervalles et de domaines de confiance. Ainsi, par exemple, à chaque estimation $\hat{\varphi}$ correspondra son propre système d'intervalles de confiance. Nous dirons que le système d'intervalles de confiance $C_1 = \{\underline{\varphi}(\hat{\varphi}_1(x)), \overline{\varphi}(\hat{\varphi}_1(x))\}$ (de domaines de confiance $\{H_1(x)\}$) est *préférable* au système $C_2 = \{\underline{\varphi}(\hat{\varphi}_2(x)), \overline{\varphi}(\hat{\varphi}_2(x))\}$, $(\{H_2(x)\})$, si pour chaque valeur de $x \in H$ on a

$$\underline{\varphi}(\hat{\varphi}_2(x)) \leqslant \underline{\varphi}(\hat{\varphi}_1(x)), \quad \overline{\varphi}(\hat{\varphi}_1(x)) \leqslant \overline{\varphi}(\hat{\varphi}_2(x)),$$
$$H_1(x) \subseteq H_2(x),$$

où pour au moins une valeur de x les inégalités strictes sont vérifiées ($H_1(x) \subset H_2(x)$ et $H_1(x)$ et $H_2(x)$ ne sont pas vides), et les coefficients de confiance α coïncident pour les deux systèmes. On dit que le système d'intervalles de confiance $C = \{\underline{\varphi}(\hat{\varphi}(x)), \overline{\varphi}(\hat{\varphi}(x))\}$ (de domaines de confiance $H(x)$) est *admissible*, s'il n'existe pas de système d'intervalles de confiance, qui lui est préférable. Le problème se pose de construire un critère pour déterminer si un système donné d'intervalles (de domaines) de confiance est admissible. Si l'on dispose de deux systèmes admissibles d'intervalles (de domaines) de confiance C_1 et C_2, dont les coefficients de confiance sont identiques, on peut alors les comparer à l'aide de diverses caractéristiques probabilistes, par exemple, à l'aide de la longueur moyenne de l'intervalle de confiance (dans le cas des domaines de confiance à l'aide de la longueur moyenne du diamètre du domaine de confiance, etc.). Si l'on a choisi un indice probabiliste de qualité du système d'intervalles (de domaines) de confiance, le problème se pose de rechercher un système admissible tel que cet indice soit le meilleur. Un large champ d'activité s'ouvre ainsi, dont les résultats sont susceptibles d'une application immédiate. Le but de ce présent chapitre était précisément d'attirer l'attention des mathématiciens sur ces questions, dont nous n'avons fait qu'effleurer les principales orientations des recherches éventuelles.

Chapitre 4

VÉRIFICATION DES HYPOTHÈSES DE FIABILITÉ

§ 4.1. Notions générales de la théorie de la vérification des hypothèses statistiques

Notions principales. Le présent paragraphe joue un rôle auxiliaire dans le chapitre consacré à la vérification des hypothèses de fiabilité. Nous formulons sans donner de démonstration, mais en citant des ouvrages connus, divers théorèmes que nous utiliserons dans les paragraphes suivants.

Les principales notions en théorie de la vérification des hypothèses statistiques sont celles d'hypothèses *principale* et *concurrente*. Pour simplifier notre exposé, nous supposerons que l'espace $X = \{x\}$ des résultats des essais ne dépend pas de la décision que nous allons prendre. L'hypothèse suivant laquelle le résultat des essais est aléatoire est équivalente à l'hypothèse suivant laquelle il existe dans l'espace X une distribution des probabilités P associée à tel ou tel résultat des essais. Dans la plupart des cas la forme de P est inconnue, on sait uniquement que P appartient à une certaine classe de distributions des probabilités. Désignons cette classe par $\mathcal{P}$ et les distributions des probabilités qui lui appartiennent par P_θ, où θ est le paramètre * permettant de distinguer les distributions, et par Ω l'ensemble des valeurs possibles du paramètre θ.

Ainsi, l'affirmation $P_\theta \in \mathcal{P}$ est équivalente à l'affirmation $\theta \in \Omega$. Par exemple, si les essais sont conduits suivant le plan $[N, B, N]$, l'espace des résultats des essais $X = \{x\}$ se compose des points de l'espace à N dimensions $x = (x_1, \ldots, x_N)$, x_i désignant l'instant où se produit la panne du i-ième élément. Supposons que les pannes sont mutuellement indépendantes et suivent une distribution lognormale avec des paramètres inconnus μ et σ^2 (cf. chapitre 1). La famille $\mathcal{P}$ des distributions des probabilités est alors donnée par les densités de probabilités de la forme

$$p_\theta(x) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x_i \sigma} e^{-\frac{(\ln x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{4.1.1}$$

Le rôle du paramètre θ appartient ici aux couples (μ, σ^2), $-\infty < \mu < +\infty$, $\sigma^2 > 0$.

Ainsi, l'espace des valeurs des paramètres, ou l'espace des paramètres Ω, se compose dans l'exemple considéré des points du demi-

* Généralement parlant, θ est un vecteur. Ainsi, pour la loi normale $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

plan (μ, σ^2): $-\infty < \mu < +\infty$, $\sigma^2 \geqslant 0$. L'espace des paramètres Ω peut posséder une structure complexe. Il en sera ainsi dans tous les cas, où la classe $\mathcal{P}$ peut inclure les distributions des probabilités de nombreux types.

On appelle *hypothèse H* toute affirmation relative à la forme des distributions des probabilités P_θ. Si l'on a formulé une hypothèse, la classe de toutes les distributions possibles des probabilités se divise en deux sous-classes. Dans l'une de ces sous-classes entrent

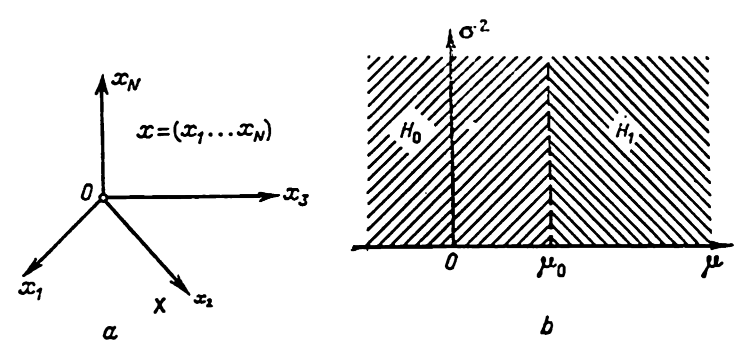


Fig. 4.1.1

toutes les distributions de P_θ, possédant la propriété formulée dans l'hypothèse, et dans l'autre toutes les autres distributions, qui ne possèdent pas cette propriété. L'espace des valeurs des paramètres Ω se divise ainsi en deux sous-ensembles disjoints Ω_0 et Ω_1, $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$. Convenons d'appeler H_0 hypothèse *principale* ou *initiale* et l'hypothèse complémentaire H_1 hypothèse *concurrente*. Il peut exister, bien entendu, des problèmes pour lesquels on formule plusieurs hypothèses s'excluant mutuellement. Nous nous bornerons principalement au cas de la vérification de deux hypothèses H_0 et H_1. Dans l'exemple rapporté des essais de N éléments avec une distribution lognormale du temps de fonctionnement sans défaillance on peut formuler diverses hypothèses. Par exemple, l'hypothèse principale H_0 peut consister en ce que $\mu < \mu_0$ et σ^2 est quelconque. Dans ce cas l'hypothèse concurrente H_1 correspond aux valeurs des paramètres $\mu \geqslant \mu_0$, $\sigma^2 > 0$ (fig. 4.1.1,*b*).

Après avoir décrit l'espace $X = \{x\}$ des résultats des épreuves, défini la classe $\mathcal{P}$ des distributions des probabilités et formulé les hypothèses, on pose le problème de la construction d'un *critère* (ou test) pour vérifier la conformité des résultats de l'expérience avec l'une des hypothèses.

On entend par critère (ou test) un système de règles de traitement des résultats des épreuves, sur la base duquel on accepte (il est préférable de dire: on vérifie) l'une des hypothèses et l'on rejette

les autres. Si la valeur de x est connue, on accepte pour la majorité des critères une hypothèse définie H_i, $i = i(x)$. De tels critères sont dits *non randomisés*. Un critère non randomisé est déterminé par la définition d'un ensemble *critique* X_{cr}, qui représente une partie de l'espace X des résultats des épreuves. Si le résultat des épreuves $x \in X_{cr}$, alors on rejette l'hypothèse H_0 ; si par contre $x \notin X_{cr}$ (le symbole $\notin$ signifie la non-appartenance), on adopte l'hypothèse H_0. Il s'avère utile en certains cas de considérer les critères pour lesquels $i(x)$ est une variable aléatoire pour un x fixé. De tels critères sont appelés *randomisés*.

Exemples de critères. La forme des critères utilisés dépend notablement de la classe $\mathcal{P}$ et des hypothèses H_i. On distingue assez nettement deux groupes principaux de problèmes. On compte dans le premier groupe les problèmes liés à la vérification de la forme de la famille de distributions servant à décrire les probabilités de fonctionnement sans défaillance. Les problèmes typiques qui se posent ici sont de la forme : « vérifier l'hypothèse H_0 suivant laquelle la probabilité de fonctionnement sans défaillance suit une loi de distribution lognormale », etc. L'hypothèse H_0 est ici constituée par toute une classe de distributions. Le rôle d'hypothèses concurrentes appartient ici encore à des classes de distributions. Dans le second groupe entrent les problèmes liés à la vérification des valeurs concrètes des paramètres déterminant la distribution. On suppose ici que la forme de la distribution, son appartenance à une certaine famille sont données et on ne demande que de vérifier les valeurs des paramètres. Le problème correspondant à la figure 4.1.1,*b* se rapporte au second groupe. Le § 4.2 est entièrement consacré au cas, où l'on vérifie l'hypothèse suivant laquelle la probabilité de fonctionnement sans défaillance suit une loi exponentielle. Les problèmes que l'on considère dans ce paragraphe se rapportent au premier groupe. Aux §§ 4.3 et 4.4 on considère les critères de vérification des hypothèses relatives aux valeurs des paramètres de la distribution exponentielle. Ce sont des exemples typiques des problèmes du second type.

Dans la majorité des problèmes du premier groupe on procède de la manière suivante. On recherche une statistique $S(x)$, c'est-à-dire une fonction du résultat des épreuves, telle que sa distribution reste inchangée quelle que soit la valeur du paramètre $\theta \in \Omega_0$ entrant dans l'hypothèse principale H_0. On inclut dans l'ensemble critique X_{cr} les points x pour lesquels $|S(x)| > S_\alpha$. On trouve la valeur S_α de la condition

$$P_0(|S(x)| > S_\alpha) \leqslant \alpha, \tag{4.1.2}$$

où $\theta \in \Omega_0$. Comme la distribution de $S(x)$ ne dépend pas, si l'hypothèse est vraie, du paramètre θ, on peut omettre l'indice θ dans le premier membre de cette inégalité. On peut interpréter le nombre

α comme la probabilité de rejeter à tort l'hypothèse H_0, alors qu'elle est vraie. Rapportons quelques exemples de critères du premier type.

Critère du χ^2

a) *Cas non paramétrique.* Supposons que les résultats de l'épreuve ne peuvent être que les événements $A_1, \ldots, A_r$, dont les probabilités $p_1, \ldots, p_r$ sont données et $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$, $p_i > 0$. Si au cours de N épreuves indépendantes l'événement A_i s'est réalisé N_i fois, la statistique

$$T(N_1, \ldots, N_r) = \sum_{i=1}^{r} \frac{(N_i - Np_i)^2}{Np_i} \tag{4.1.3}$$

suit, pour des grandes valeurs de N, la distribution du χ^2 à $(r-1)$ degrés de liberté. Cela signifie que

$$\mathrm{P}\{T < \chi_p^2(r-1)\} \approx p, \tag{4.1.4}$$

où $\chi_p^2(n)$ est trouvé de la condition

$$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\chi_p^2(n)} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{n}{2}-1}\, dt = p. \tag{4.1.5}$$

On donne dans la table 4 de l'annexe les valeurs de $\chi_p^2(n)$ pour $1-p = 0{,}001$; $0{,}01$; $0{,}05$; $0{,}1$ $(0{,}1)$ $0{,}9$; $n = 1$ (1) 30. On adopte ainsi l'hypothèse initiale H_0 suivant laquelle les probabilités des événements A_i sont égales aux nombres donnés p_i, quand $T(N_1, \ldots, N_r) < \chi_{1-\alpha}^2(r-1)$, et on la rejette dans le cas contraire. La probabilité de l'erreur de première espèce est approximativement égale à α, cf. § 1.6.

b) *Cas paramétrique.* La position du problème est la même que dans le cas non paramétrique, mais on suppose ici que les probabilités $p_i = p_i(\theta_1, \ldots, \theta_s)$, $s < r-1$, où $\theta_1, \ldots, \theta_s$ sont les valeurs inconnues des paramètres. Soient $\hat{\theta}_i$ les estimations que l'on obtient en résolvant les équations

$$\frac{\partial T(N_1, \ldots, N_r)}{\partial \theta_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, s, \tag{4.1.6}$$

où la statistique $T(N_1, \ldots, N_r)$ est déterminée d'après la formule (4.1.3). Introduisons les notations $\hat{p}_i = p_i(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_s)$. Dans ce cas la statistique

$$\hat{T}(N_1, \ldots, N_r) = \sum_{i=1}^{r} \frac{(N_i - N\hat{p}_i)^2}{N\hat{p}_i} \tag{4.1.7}$$

suit une loi de distribution du χ^2 à $(r - s - 1)$ degrés de liberté. Ainsi, on accepte l'hypothèse H_0 consistant en ce que $p_i = p_i(\theta_1, \ldots, \theta_r)$, si et seulement si $\hat{T}(N_1, \ldots, N_r) < \chi^2_{1-\alpha}(r - s - 1)$, où α est la probabilité de l'erreur de première espèce.

Le critère du χ^2 est exposé en détail dans de nombreux ouvrages de statistique mathématique (cf. [6]). Certains cas d'essais de fiabilité peuvent être ramenés au cas polynomial, qui est à la base du critère du χ^2. Supposons que l'on soumette aux essais N éléments que l'on ne remplace pas quand ils tombent en panne, en poursuivant les essais jusqu'à l'instant T; dans nos notations ce cas correspond à l'utilisation d'un plan du type $[N, B, T]$. Divisons l'intervalle $(0, T)$ en $(r - 1)$ intervalles $\Delta_1 = [0, T_1]$, $\Delta_2 = [T_1, T_2]$, $\ldots, \Delta_{r-1} = [T_{r-2}, T_{r-1}]$, où $T_{r-1} = T$, et posons le r-ième intervalle égal à $\Delta_r = [T_{r-1}, +\infty]$. Si l'on désigne par A_i l'événement, consistant en ce que la panne de l'élément se produit dans l'intervalle Δ_i, et par N_i le nombre des éléments tombés en panne dans l'intervalle Δ_i, $i = 1, \ldots, r$, nous sommes conduits au schéma polynomial que nous venons de décrire.

Critère F de Fisher

Si ξ_1 et ξ_2 sont deux variables aléatoires mutuellement indépendantes, dont les densités de probabilité sont

$$p_i(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{\beta_i^{\alpha_i} x^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-\beta_i x}, & x > 0, \quad i = 1, 2, \end{cases} \tag{4.1.8}$$

alors la fonction de répartition de la variable $\zeta = \frac{\xi_1}{\xi_2}$ s'exprime aisément à l'aide de la fonction bêta incomplète [4]:

$$J(x, r, s) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \int_0^x z^{r-1}(1-z)^{s-1}\,dz.$$

On peut démontrer que

$$\mathbf{P}\left\{\zeta = \frac{\xi_1}{\xi_2} \leqslant z\right\} = J\left(\frac{\beta_1 z}{\beta_1 z + \beta_2}, \alpha_1, \alpha_2\right). \tag{4.1.9}$$

La fonction de la forme (4.1.9) est appelée *fonction de répartition de Fisher* à n_1 et n_2 *degrés de liberté*, si

$$\alpha_1 = \frac{n_1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{n_2}{2}, \quad \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}.$$

On a donné dans l'annexe les valeurs des quantiles de la distribution de Fisher avec un nombre pair de degrés de liberté $f_{0,995}(n_1, n_2)$ et $f_{0,99}(n_1, n_2)$

$$\mathbf{P}\left\{\zeta = \frac{n_2\xi_1}{n_1\xi_2} < f_{0,995}(n_1, n_2)\right\} = 0{,}995. \tag{4.1.10}$$

Le critère F est appliqué dans les cas, où l'on peut trouver une statistique $S(x)$ dont la distribution coïncide, pour toutes les valeurs de θ formant l'hypothèse initiale H_0, avec la distribution de Fisher à n_1 et n_2 degrés de liberté. On peut déduire aisément de la formule (4.1.9) que $f_p(n_1, n_2) = f_{1-p}^{-1}(n_2, n_1)$. Ainsi, l'événement consistant en ce que

$$\{f_{\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2) < S(x) < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)\} \tag{4.1.11}$$

est équivalent à l'événement

$$\begin{cases} S(x) < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2), \\ S^{-1}(x) < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2, n_1). \end{cases} \tag{4.1.12}$$

Ainsi, les probabilités des événements (4.1.11) et (4.1.12) coïncident et sont égales à $1 - \alpha$ quand l'hypothèse H_0 est vraie. La formule (4.1.12) permet d'utiliser les tables avec seulement les valeurs $f_p(n_1, n_2)$, où p est proche de l'unité.

L'application du critère de Fisher est réalisée d'après le schéma suivant. On calcule la statistique $S(x)$ suivant une loi de F à n_1 et n_2 degrés de liberté, quand l'hypothèse H_0 est vraie. On accepte cette hypothèse si et seulement si $S(x) < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)$ et $S^{-1}(x) < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2, n_1)$. Dans ce cas l'erreur de première espèce est égale à α. Un exemple d'application du critère F est donné au § 4.2.

Pour les critères analogues aux critères du χ^2 et F un trait caractéristique est l'absence d'une description des hypothèses concurrentes. Ces critères assurent une grandeur donnée de la probabilité de l'erreur de première espèce, mais il faut également être sûr que sont petites les probabilités d'un jugement erroné sur la validité de l'hypothèse H_0 quand elle est fausse. Il existe toujours des hypothèses concurrentes pour lesquelles le critère utilisé ne réagit pas dans ce sens que l'on accepte avec une grande probabilité l'hypothèse initiale H_0, tandis qu'elle est fausse. Un exemple de ce genre pour le cas de l'utilisation du critère de Wilcoxon est exposé au § 4.5.

Critère de A. Kolmogorov de vérification du type de distribution d'après de petits échantillons

Pour obtenir des données suffisamment justes sur la forme de la loi de distribution du temps de fonctionnement sans défaillance, il est nécessaire, en règle générale, de soumettre aux essais un grand nombre d'éléments du même type. On peut rencontrer en pratique des cas, où les essais ne sont effectués que par petits groupes. De tels essais sont souvent séparés par de grands intervalles de temps, de sorte qu'il est difficile de s'attendre à ce que la probabilité de fonctionnement sans défaillance coïncide pour les divers groupes d'élé-

ments. On ne peut pas conclure avec certitude sur l'appartenance des distributions des probabilités de fonctionnement sans défaillance d'un groupe d'éléments à un type déterminé de familles de lois de distribution, car la taille du groupe n'est pas élevée. On peut toutefois, en utilisant le procédé proposé par A. Kolmogorov, vérifier avec un degré élevé de certitude l'appartenance des groupes d'éléments à un même type de familles de lois de distribution. Le critère est basé sur le lemme élémentaire suivant.

Lemme 4.1.1. *Si la fonction de répartition* $F(t) = \mathrm{P}\{\xi < t\}$ *de la variable aléatoire* ξ *est continue, la variable aléatoire* $\eta = F(\xi)$ *suit une distribution uniforme sur l'intervalle* $[0, 1]$.

La *démonstration* découle des relations

$$\mathrm{P}\{\eta < x\} = \mathrm{P}\{\xi < F^{-1}(x)\} = F\{F^{-1}(x)\} = x,$$

où $F^{-1}(x)$ est la fonction inverse de $F(t)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Le critère de Kolmogorov de vérification d'après les petits échantillons ne peut être utilisé que dans le cas, où il existe une statistique $S(x_i)$ (x_i est le résultat des essais du i-ième groupe), dont la distribution $F_{s,i}(t)$ ne dépend pas des valeurs concrètes des paramètres déterminant la fonction de répartition de fonctionnement sans défaillance. On suppose dans ce cas que l'hypothèse initiale H_0, suivant laquelle la fonction de répartition du temps de fonctionnement sans défaillance des éléments appartient à une famille donnée, est vraie. Utilisant le lemme 4.1.1 nous obtenons que les variables aléatoires

$$F_{s,1}(S(x_1)), \ldots, F_{s,k}(S(x_k)) \tag{4.1.13}$$

sont mutuellement indépendantes, uniformément distribuées dans l'intervalle $[0, 1]$ si l'hypothèse H_0 est vraie. Ici k désigne le nombre de groupes d'éléments que l'on doit soumettre à l'essai. Le problème de la vérification de l'hypothèse H_0 est ainsi ramené à un problème standard de vérification de l'hypothèse suivant laquelle k points aléatoires sont distribués uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$.

Ce procédé peut être utilisé, par exemple, pour la vérification de l'hypothèse relative à la forme exponentielle de la probabilité de fonctionnement sans défaillance d'après les résultats des essais périodiques de fiabilité des petits groupes d'éléments. Supposons que les essais du i-ième groupe sont conduits d'après le plan $[N_i, B, r_i]$, $r_i \geqslant 2$, $i = 1, \ldots, k$. Soit $r_i = r_i' + r_i''$, $r_i' r_i'' > 0$, $S'_{B,i}$, $S''_{B,i}$ les valeurs du temps global de fonctionnement dans les intervalles $(0, t_{r_i'})$ et $(t_{r_i'}, t_{r_i})$. En utilisant le fait que les variables aléatoires $(N - i + 1)(t_i - t_{i-1})$ sont mutuellement indépendantes et que leurs densités de probabilité sont de la forme $\lambda e^{-\lambda t}$, on démontre aisément que les statistiques

$$S_i = S_i(t_1, \ldots, t_{r_i}) = \frac{r_i'' S'_{B,i}}{r_i' S''_{B,i}} \tag{4.1.14}$$

suivent une loi de distribution de F à $2r_i'$ et $2r_i''$ degrés de liberté et ne dépendent pas de la grandeur du paramètre λ. Toutes ces affirmations sont valables pour le cas, où l'hypothèse H_0 est vraie, autrement dit, quand les probabilités de fonctionnement sans défaillance dans le i-ième groupe sont égales à $R_i(t) = e^{-\lambda_i t}$. Si l'on désigne par $F_{n_1, n_2}(x)$ la fonction de répartition de Fisher à n_1 et n_2 degrés de liberté, il faut, pour vérifier l'hypothèse initiale H_0, vérifier que les variables aléatoires

$$F_{2r_1', 2r_1''}(S_1), \ldots, F_{2r_k', 2r_k''}(S_k)$$

sont mutuellement indépendantes et uniformément distribuées dans l'intervalle [0, 1].

Fonction de puissance d'un critère. La caractéristique numérique la plus importante du critère est la *fonction de puissance* $W(\theta)$. La fonction de puissance est égale à la probabilité de rejeter l'hypothèse initiale H_0, quand la valeur du paramètre déterminant la forme de la distribution des probabilités dans l'espace des résultats des épreuves X est égale à θ. Dans le cas où le critère est non randomisé

$$W(\theta) = \mathbf{P}\{x \in X_{cr} \mid \theta\}. \quad (4.1.15)$$

Si à l'hypothèse H_0 correspond un ensemble de valeurs des paramètres Ω_0 et $\theta \in \Omega_0$, alors $W(\theta)$ est égale à la probabilité de rejeter à tort l'hypothèse H_0. Dans le cas où l'hypothèse H_0 est composée (composite), autrement dit, quand Ω_0 contient plus d'un seul point θ, l'erreur de première espèce α est déterminée d'après la formule

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Omega_0} W(\theta). \quad (4.1.16)$$

Considérons un **exemple.** Supposons que les essais de fiabilité sont conduits d'après le plan $[N, B, T]$. Au cours des essais on n'enregistre que le nombre $d(T)$ d'éléments tombés en panne avant l'instant T. Ainsi, l'espace des résultats des épreuves est $X = \{0, 1, \ldots, N\}$. Si l'on suppose que les pannes des éléments sont indépendantes les unes des autres, alors $d(T)$ est une variable aléatoire, suivant une loi de distribution binomiale

$$\mathbf{P}\{d(T) = d \mid \theta\} = C_N^d [1-\theta]^d \theta^{N-d}. \quad (4.1.17)$$

Le rôle du paramètre θ est ici joué par la probabilité de fonctionnement sans défaillance au cours du temps T. Comme $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, alors $\Omega = [0, 1]$. Supposons que l'hypothèse H_0 consiste en ce que la probabilité de fonctionnement sans défaillance $\theta \geqslant \theta_0$, $\Omega_0 = \{\theta \geqslant \theta_0\}$ et l'hypothèse H_1 en ce que $\theta < \theta_0$. Choisissons en qualité d'ensemble critique du critère distinguant ces deux hypothèses $X_{cr} = \{c+1, c+2, \ldots, N\}$. Ainsi; si $d(T) > c$, l'hypothèse

H_0 est rejetée, si $d(T) \leqslant c$, alors H_0 est acceptée. Nous obtenons des formules (4.1.16) et (4.1.17) que la fonction de puissance de ce critère est

$$W(\theta)=\sum_{d(T)=c+1}^{N} C_N^{d(T)}(1-\theta)^{d(T)}\theta^{N-d(T)}. \qquad (4.1.18)$$

On montre aisément que la fonction de puissance, donnée par la formule (4.1.18), est monotone décroissante (fig. 4.1.2,*a*). Tenant

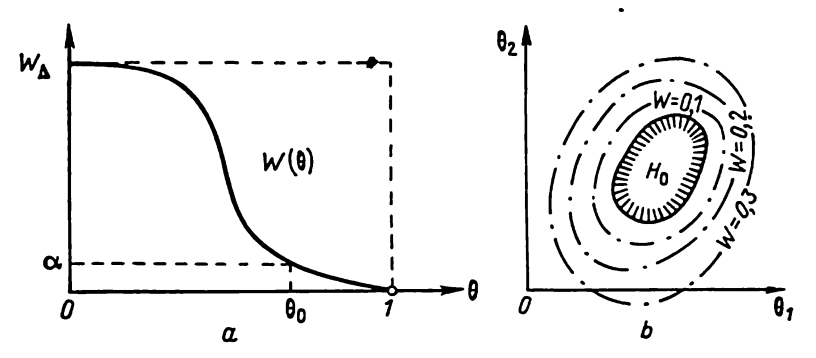


Fig. 4.1.2

compte de cette variation monotone, nous trouvons de la formule (4.1.17) que l'erreur de première espèce est

$$\alpha=\sum_{d=c+1}^{N} C_N^d(1-\theta_0)^d\theta_0^{N-d}. \qquad (4.1.19)$$

Si l'on se donne la valeur de l'erreur de première espèce α, la valeur du nombre c est égale au plus petit des nombres entiers c' pour lesquels

$$\alpha \geqslant \sum_{d=c'+1}^{N} C_N^d(1-\theta_0)^d\theta_0^{N-d}.$$

D'autres exemples de critères et leurs fonctions de puissance sont donnés aux §§ 4.3 et 4.4.

Dans les cas où le paramètre θ déterminant la forme de la distribution des probabilités est bidimensionnel, $\theta=(\theta_1, \theta_2)$, il est commode de représenter la fonction de puissance $W(\theta_1, \theta_2)$ sur le plan (θ_1, θ_2) sous forme des isolignes $W(\theta_1, \theta_2)=p$, où p parcourt diverses valeurs, par exemple $p=0{,}05$; 0,1 (0,1) 0,9; 0,95 (cf. fig. 4.1.2,*b*). Comparant les fonctions de puissance de divers critères, on peut choisir les meilleurs critères. Supposons que l'on puisse conduire les essais suivant un plan soit du type Π_1, soit du type Π_2. A chacun de ces plans correspond un critère. Les fonctions de puissance des critères pour les plans Π_1 et Π_2 sont respectivement égales à $W_1(\theta)$

et $W_2(\theta)$. S'il s'avère que pour l'ensemble des valeurs des paramètres Ω_0, correspondant à l'hypothèse initiale H_0, nous avons $W_2(\theta) \leqslant \leqslant W_1(\theta)$ et, pour $\theta \notin \Omega_0$, nous avons $W_2(\theta) \geqslant W_1(\theta)$ (fig. 4.1.3,*a*), alors le critère pour le plan Π_2 est meilleur que celui pour le plan Π_1. Cela découle du fait que les probabilités de rejeter à tort l'hypothèse H_0, quand cette hypothèse est vraie, ou de l'accepter à tort, quand

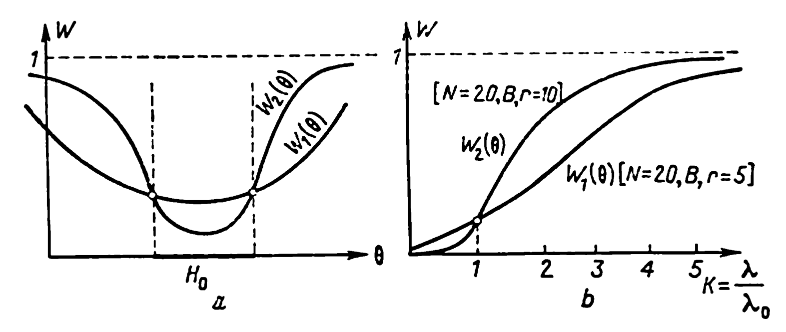


Fig. 4.1.3

elle est fausse, sont plus petites pour le critère du plan Π_2. Si l'analyse économique ou la vérification des autres indices des plans Π_1, Π_2 montre qu'ils sont approximativement équivalents, il faut alors utiliser le plan Π_2.

Considérons un **exemple numérique.** Si la probabilité de fonctionnement sans défaillance au cours du temps t est égale à $e^{-\lambda t}$, $\theta = \lambda$, alors, comme nous le montrerons au § 4.3, pour les plans

$$\Pi_1 = [N = 20,\ B,\ r = 5] \text{ et } \Pi_2 = [N = 20,\ B,\ r = 10],$$

quand $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$, $H_1 = \{\lambda > \lambda_0\}$ et l'erreur de première espèce $\alpha = 0{,}05$, les fonctions de puissance des critères recommandés sont respectivement égales à

$$W_1(\lambda) = 1 - L_4\left(1{,}970\,\frac{\lambda}{\lambda_0}\right), \quad W_2(\lambda) = 1 - L_9\left(5{,}425\,\frac{\lambda}{\lambda_0}\right). \tag{4.1.20}$$

Les graphiques de ces fonctions de puissance sont donnés sur la figure 4.1.3. Il apparaît de la comparaison des fonctions de puissance que le critère du plan Π_2 est plus efficace que le critère du plan Π_1. L'instant de l'arrêt des essais pour le plan Π_1 coïncide avec le moment t_5 d'apparition de la cinquième panne, alors que pour le plan Π_2 il coïncide avec le moment t_{10} d'apparition de la dixième panne. La durée moyenne des essais pour Π_1 est égale à $\sum_{d=0}^{4} (20 - d)^{-1}\lambda^{-1} = 0{,}2795\,\lambda^{-1}$ et pour Π_2 à $\sum_{d=0}^{9} (20 - d)^{-1}\lambda^{-1} = 0{,}6688\,\lambda^{-1}$.

Ainsi, pour le plan le plus efficace Π_2 le temps moyen de déroulement des essais est 2,4 fois plus grand que pour le plan Π_1. Si le temps de déroulement des essais n'est pas un facteur limitatif, il faut utiliser le plan Π_2.

Il peut s'avérer que les fonctions de puissance de divers critères, correspondant à divers plans, coïncident. Dans de tels cas il faut utiliser les critères pour lesquels les autres indices (par exemple le temps moyen de déroulement des essais) sont meilleurs.

Critère du rapport de vraisemblance. Pour les critères du second groupe, quand la forme de la distribution des probabilités P_θ est connue et que seule la valeur du paramètre θ est inconnue, le cas le plus simple est celui d'une hypothèse initiale simple et d'une hypothèse concurrente simple. Les hypothèses H_0, H_1 sont dites *simples*, quand les ensembles de paramètres Ω_0 et Ω_1 qui leur correspondent ne contiennent chacun qu'un seul point θ_0, θ_1. Les indices les plus importants du critère sont alors l'erreur de première espèce $W(\theta_0)$ et l'erreur de seconde espèce $1 - W(\theta_1)$. L'erreur de seconde espèce est égale à la probabilité de rejeter à tort l'hypothèse concurrente H_1 quand elle est vraie. L'une des voies possibles de recherche de critères optimaux est la suivante. On recherche parmi les critères possédant une erreur de première espèce $W(\theta_0) \leqslant \alpha$ celui qui possède la plus grande puissance $W(\theta_1)$ ou la plus petite erreur de seconde espèce $1 - W(\theta_1)$. Le résultat le plus fondamental dans ce sens est le théorème de Neumann-Pearson. Chaque critère peut être caractérisé par la probabilité $\mathfrak{p}(x)$ de rejeter l'hypothèse H_0, où x est le résultat des épreuves.

Théorème 4.1.1 (de Neumann-Pearson). *Supposons que les deux hypothèses, l'hypothèse initiale H_0 et l'hypothèse concurrente H_1, soient simples et que les mesures de probabilité qui leur correspondent aient les densités de probabilité $p_0(x)$ et $p_1(x)$ *. On a alors l'affirmation suivante.*

1. *Pour vérifier l'hypothèse H_0 contre l'hypothèse H_1, il existe un critère défini par la fonction de probabilité $\mathfrak{p}(x)$ de rejeter l'hypothèse initiale et tel que l'erreur de première espèce est*

$$\int_X \mathfrak{p}(x)\, p_0(x)\, dx = \alpha, \tag{4.1.21}$$

où

$$\mathfrak{p}(x) = \begin{cases} 1, & p_1(x) > k p_0(x), \\ 0, & p_1(x) < k p_0(x), \quad k > 0. \end{cases} \tag{4.1.22}$$

2. *Si le critère vérifie les conditions* (4.1.21) *et* (4.1.22) *pour un certain $k > 0$, c'est le critère le plus puissant pour vérifier les hypothèses H_0, H_1 et l'erreur de première espèce est égale à α.*

* Dans le cas général ce sont des densités par rapport à une certaine mesure μ ; les formules sont valables en remplaçant dx par $\mu(dx)$.

3. *Si* $\psi(x)$ *est le critère le plus puissant avec une erreur de première espèce ne dépassant pas* α, *alors la condition* (4.1.22) *est vérifiée pour un certain* $k > 0$. *La condition* (4.1.21) *est vérifiée si seulement il n'existe pas de critère non randomisé dont l'erreur de première espèce est inférieure à* α *et l'erreur de seconde espèce est nulle.*

Le lecteur s'intéressant à la question trouvera la démonstration du théorème de Neumann-Pearson dans le livre de Lehman [1].

Il découle de la formule (4.1.22) que dans le cas, où $\mathbf{P}\{p_i(x) = kp_0(x)\} = 0$, $i = 0, 1$, le critère le plus puissant n'est pas randomisé. Le domaine critique de ce critère est alors déterminé par l'équation

$$X_C = \left\{x : \frac{p_1(x)}{p_0(x)} > C\right\}, \tag{4.1.23}$$

où C est choisi de manière que l'erreur de première espèce soit égale à α. Dans le cas où les densités $p_0(x) = p(x \mid \theta_0)$, $p_1(x) = p(x \mid \theta_1)$, où $p(x \mid \theta)$ est la famille paramétrique avec une statistique exhaustive $S(x)$, nous avons conformément au critère de factorisation (cf. § 1.6)

$$p(x \mid \theta) = g(S(x), \theta)\, h(x). \tag{4.1.24}$$

Nous obtenons de (4.1.23) et (4.1.24) que

$$X_C = \left\{S(x) : \frac{g(S(x), \theta_1)}{g(S(x), \theta_0)} > C\right\} = X_C(\theta_0, \theta_1). \tag{4.1.25}$$

Le domaine critique pour le critère le plus puissant s'exprime ainsi en fonction des statistiques exhaustives. Nous dirons que des deux critères K_1 et K_2 de fonctions de puissance $W_1(\theta)$ et $W_2(\theta)$, ayant des erreurs de première espèce identiques, le critère K_1 est *uniformément plus puissant* que le critère K_2, si

$$W_1(\theta) \geqslant W_2(\theta), \qquad \theta \in \Omega_1,$$

et si $W_1(\theta) > W_2(\theta)$ pour une valeur au moins de θ. Si le critère K_1 est uniformément plus puissant que n'importe quel autre critère avec une même erreur de première espèce, il est dit *critère uniformément le plus puissant*. En règle générale, les critères uniformément les plus puissants n'existent pas. Toutefois, pour le cas particulier, où la probabilité de fonctionnement sans défaillance $R(t) = e^{-\lambda t}$ et où l'on utilise les plans du type V ou du type $[N, B, r]$, les critères uniformément les plus puissants existent. Nous parlerons en détail de ces critères au § 4.3. Les conditions suffisantes d'existence d'un critère uniformément le plus puissant sont données par le théorème suivant.

Théorème 4.1.2. *Si le domaine critique* $X_C(\theta_0, \theta_1)$ *donné par la formule* (4.1.25) *ne dépend pas des valeurs du paramètre* θ_1, *il existe alors un critère uniformément le plus puissant. Il en sera ainsi quand*

$$\frac{p(x \mid \theta_1)}{p(x \mid \theta_0)} = f(S(x)), \qquad (4.1.26)$$

où $f(y)$ *est une fonction non décroissante ou non croissante de* y.

Il est parfois utile en certains cas d'utiliser des critères *bayesiens*, basés sur les notions de *fonction de risque* et de *probabilités a priori*. Nous renvoyons le lecteur, désirant connaître un exposé détaillé de la théorie, à la littérature consacrée aux fonctions de décision [2], [3], [12], [13], [14]. Au § 4.4 on a considéré deux exemples particuliers de critères de Bayes construits pour les problèmes de vérification des hypothèses relatives aux valeurs du paramètre λ de la distribution exponentielle. Nous donnons également dans ce paragraphe la définition de la fonction de risque et des probabilités a priori.

Comparaison des probabilités de fonctionnement sans défaillance des éléments de deux types. Considérons en conclusion de ce paragraphe le problème de la comparaison des probabilités de fonctionnement sans défaillance de deux types d'éléments ou de systèmes. Supposons que l'on a fabriqué deux lots expérimentaux d'éléments. La taille du premier lot est N_1, la taille du second lot est N_2. Les éléments ont été soumis à l'essai dans les conditions identiques au cours du temps T. Supposons encore que les pannes ont eu lieu indépendamment les unes des autres et que d_1 éléments sont tombés en panne dans le premier lot et d_2 dans le second. Supposons que l'indice principal de fiabilité est $R_i(T)$, la probabilité de fonctionnement sans défaillance de l'élément du i-ième lot au cours de la durée des essais. On demande de construire un critère permettant de vérifier ou de rejeter l'hypothèse H_0, suivant laquelle $R_1(T) = R_2(T)$. Si l'on rejette l'hypothèse H_0, on adopte l'une des deux hypothèses concurrentes $H_1 = \{R_1(T) < R_2(T)\}$ ou $H_2 = \{R_1(T) > R_2(T)\}$. L'erreur de première espèce α ne doit pas être supérieure à une valeur donnée. L'espace des résultats des essais $X = \{x\}$ se compose des points $x = (d_1, d_2)$, $d_i = 0, \ldots, N_i$. Pour fixer les idées nous estimerons que $N_1 \leqslant N_2$. Dans le cas contraire le second lot sera dit premier lot.

Les variables aléatoires d_1, d_2 sont mutuellement indépendantes et suivent une distribution binomiale. La probabilité de l'apparition du résultat (d_1, d_2) est donnée par la formule

$$\mathbf{P}\{x = (d_1, d_2)\} = \prod_{i=1,2} C_{N_i}^{d_i} [1 - R_i(T)]^{d_i} R_i(T)^{N_i - d_i}. \qquad (4.1.27)$$

Le rôle de l'ensemble des paramètres H est joué par les couples $R_1(T)$, $R_2(T)$; $0 \leqslant R_i(T) \leqslant 1$. Les hypothèses H_0, H_1, H_2 sont montrées sous forme de sous-ensembles de H sur la figure 4.1.4, et

les résultats des essais (d_1, d_2) sur la figure 4.1.5. Pour construire un critère avec un seuil de signification (ou une erreur de première espèce) ne dépassant pas α, nous procéderons de la manière suivante. Il découle de la formule (4.1.27) et du critère de factorisation que $d = d_1 + d_2$ est une statistique exhaustive quand l'hypothèse H_0

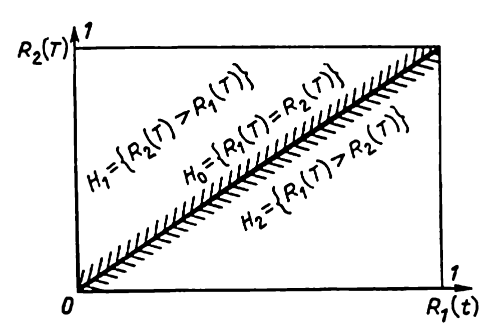


Fig. 4.1.4

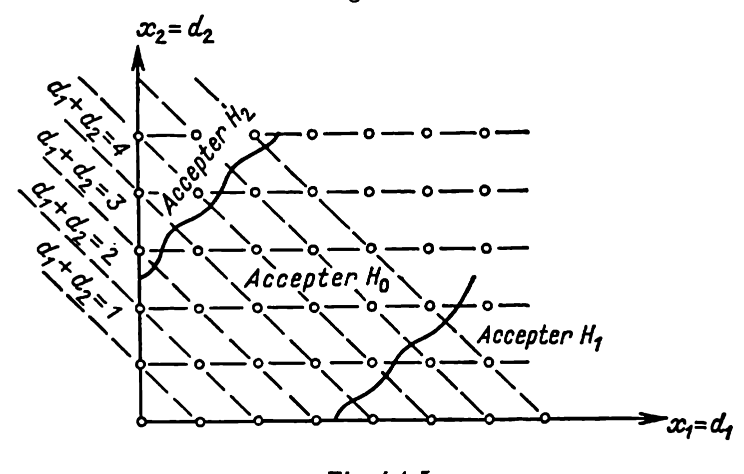


Fig. 4.1.5

est vraie. Nous avons alors de la formule des probabilités conditionnelles et de (4.1.27) que

$$\mathrm{P}\{x=(d_1, d_2) \mid d_1+d_2=d\}=\frac{C_{N_1}^{d_1} C_{N_2}^{d_2}}{\sum\limits_{k_1+k_2=d} C_{N_1}^{k_1} C_{N_2}^{k_2}}=\frac{C_{N_1}^{d_1} C_{N_2}^{d_2}}{C_{N_1+N_2}^{d}}, \quad (4.1.28)$$

si seulement l'hypothèse H_0 est vraie. On voit de la formule (4.1.28) que ces probabilités conditionnelles s'expriment en fonction des probabilités de la distribution hypergéométrique, dont les propriétés

sont étudiées en détail au chapitre 7. Notant que $\mathbf{P}\{x=(d_1, d_2) \mid d_1+ d_2 = d\}$ ne dépend pas de la valeur $R_1(T) = R_2(T)$, nous inclurons dans le domaine critique X_{cr} les points $(0, d)$, $(1, d-1)$, ..., $(d', d-d')$ et les points $(d'', d-d'')$, $(d''+1, d-d''-1)$, ..., $(d, 0)$, pour lesquels

$$\begin{cases} p' = \sum\limits_{d_1+d_2=d,\ d_1=0}^{d'} \dfrac{C_{N_1}^{d_1} C_{N_2}^{d_2}}{C_{N_1+N_2}^{d}} \leqslant \dfrac{\alpha}{2} < \sum\limits_{d_1+d_2=d,\ d_1=0}^{d'+1} \dfrac{C_{N_1}^{d_1} C_{N_2}^{d_2}}{C_{N_1+N_2}^{d}}, \\ p'' = \sum\limits_{d_1+d_2=d,\ d_1=d''}^{d} \dfrac{C_{N_1}^{d_1} C_{N_2}^{d_2}}{C_{N_1+N_2}^{d}} \leqslant \dfrac{\alpha}{2} < \sum\limits_{d_1+d_2=d,\ d_1=d''-1}^{d} \dfrac{C_{N_1}^{d_1} C_{N_2}^{d_2}}{C_{N_1+N_2}^{d}}. \end{cases} \qquad (4.1.29)$$

Si l'hypothèse H_0 est vraie, la probabilité P_0 de tomber dans le domaine critique ne dépasse pas, compte tenu de (4.1.27) à (4.1.30), la valeur α. En effet, pour toute valeur $R_1(t) = R_2(t)$ on a

$$P_0 = \sum_{d=0}^{N_1+N_2} \mathbf{P}\{d \mid R_1(T) = R_2(T)\}\, \mathbf{P}\{(d_1, d_2) \in X_{cr} \mid d_1+d_2 = d\} =$$
$$= \sum_{d=0}^{N_1+N_2} \mathbf{P}\{d \mid R_1(T) = R_2(T)\} \cdot (p' + p'') \leqslant$$
$$\leqslant \alpha \sum_{d=0}^{N_1+N_2} \mathbf{P}\{d \mid R_1(T) = R_2(T)\} = \alpha. \qquad (4.1.30)$$

Le critère avec un seuil de signification non supérieur à α pour vérifier l'hypothèse $H_0 = \{R_1(T) = R_2(T)\}$ contre les hypothèses concurrentes $H_1 = \{R_1(T) < R_2(T)\}$ et $H_2 = \{R_1(T) > R_2(T)\}$ est décrit par le système suivant de règles. Si les résultats des essais sont donnés par le couple (d_1, d_2), alors on trouve des formules (4.1.29) et (4.1.30) les valeurs d' et d''. S'il s'avère que $d' < d_1 < d''$, alors on accepte l'hypothèse H_0. Dans le cas où $d_1 \leqslant d'_1$, on rejette l'hypothèse H_0 et on accepte l'hypothèse H_1 ; si par contre $d_1 \geqslant d''$, alors on rejette l'hypothèse H_0 et on accepte l'hypothèse H_2. Lors des essais des éléments hautement fiables la probabilité de panne $R_i(T)$ est faible. Dans de tels cas il s'avère que $\frac{d_i}{N_i} \leqslant 1$ si seulement N_i est grand. Le calcul des valeurs d' et d'' d'après les formules (4.1.29) et (4.1.30) est fort laborieux. Notant que dans le cas où

$$\frac{d_i}{N_i} \ll 1, \quad C_{N_i}^{d_i} \left(\frac{N_i^{d_i}}{d_i!}\right)^{-1} \approx 1,$$

nous obtenons de (4.1.28) la formule approchée

$$\mathbf{P}\{x = (d_1, d_2) \mid d_1 + d_2 = d\} = \frac{N_1^{d_1} N_2^{d_2} (d_1+d_2)!}{d_1!\, d_2!\, (N_1+N_2)^d} =$$
$$= C_{d_1+d_2}^{d_1} \left(\frac{N_1}{N_1+N_2}\right)^{d_1} \left(\frac{N_2}{N_1+N_2}\right)^{d_2}. \qquad (4.1.31)$$

La distribution hypergéométrique est ainsi remplacée par la distribution binomiale. Si l'on introduit les notations $b_d^{d_1}(p) = C_d^{d_1} p^{d_1} (1 - p)^{d-d_1}$, on peut conformément à (4.1.31) utiliser au lieu de (4.1.29) et (4.1.30), pour trouver d' et d'', les équations

$$p' = \sum_{d_1+d_2=d,\ d_1=0}^{d'} b_d^{d_1}(p) \leqslant \frac{\alpha}{2} < \sum_{d_1+d_2=d,\ d_1=0}^{d'+1} b_d^{d_1}(p), \quad (4.1.32)$$

$$p'' = \sum_{d_1+d_2=d,\ d_1=d''}^{d} b_d^{d_2}(p) \leqslant \frac{\alpha}{2} < \sum_{d_1+d_2=d,\ d_1=d''-1}^{d} b_d^{d_2}(p), \quad (4.1.33)$$

où $p = \frac{N_1}{N_1+N_2}$, $N_1 \leqslant N_2$. On a rapporté à la table 9 de l'annexe les nombres d', d'' trouvés à partir de l'approximation binomiale pour le cas, où $\alpha = 0{,}1$ et $d_1 + d_2 = 0(1)30$.

Dans le cas où d_1, d_2 sont grands et le rapport $\frac{d_i}{N_i} > 0{,}1$, on peut utiliser le fait que les fréquences $\frac{d_i}{N_i}$ suivent une distribution proche de la distribution normale. Il est ici commode d'utiliser la transformation $y = 2 \arcsin \sqrt{x}$, dont les tables sont présentées dans le livre de Y. Yanko [4]. On peut montrer que les $\xi_i = 2 \arcsin \sqrt{\frac{d_i}{N_i}}$, $i = 1, 2$, suivent une distribution proche de la normale, avec des moyennes égales à $2 \arcsin \sqrt{[1 - R_i(T)]}$ et des variances égales à $\frac{1}{N_i}$. Comme ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes, leur différence suivra, dans le cas où l'hypothèse H_0 est vraie, une distribution normale de moyenne égale à zéro et de variance égale à $\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} = \frac{N_1+N_2}{N_1 N_2}$. Il en découle que la variable aléatoire

$$Q(d_1, d_2) = \left(2 \arcsin \sqrt{\frac{d_1}{N_1}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{d_2}{N_2}}\right) \cdot \sqrt{\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}} \quad (4.1.34)$$

suit une distribution proche de la normale, avec une moyenne zéro et une variance unité. Ainsi, si $R_1(T) = R_2(T)$, alors

$$\mathrm{P}\{|Q(d_1, d_2)| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\} \approx \alpha, \quad (4.1.35)$$

où $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile de la distribution normale. Le critère approché que nous avons obtenu consiste en ce que l'hypothèse $H_0 = \{R_1(T) = R_2(T)\}$ est rejetée chaque fois que $|Q(d_1, d_2)| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Illustrons l'utilisation de la table 9 de l'annexe à l'aide d'un exemple. On a soumis à l'essai deux lots d'éléments. Le premier lot comportait 500 éléments, dont 5 sont tombés en panne, le second lot 250 éléments, dont 10 sont tombés en panne. Dans nos notations $N_1 = 250$, $N_2 = 500$, $d_1 = 10$, $d_2 = 5$, $\frac{N_1}{N_1+N_2} = \frac{1}{3}$. Nous trouvons de la table 9 de l'annexe pour la valeur $d = d_1 + d_2 = 15$ que $d' = 1$, $d'' = 9$. Comme $d_1 = 10 > d'' = 9$, nous rejetons l'hypothèse de l'égalité des probabilités R_i (T) de fonctionnement sans défaillance et nous acceptons l'hypothèse $H_1 = \{R_1(T) < R_2(T)\}$.

§ 4.2. Vérification de l'hypothèse de la distribution exponentielle du temps de fonctionnement sans défaillance

Au § 4.3 nous décrivons les critères qui permettent de distinguer efficacement les hypothèses sur les valeurs de l'intensité λ des éléments ou des systèmes soumis à l'essai. Ces critères dépendent fortement de l'hypothèse suivant laquelle la probabilité de fonctionnement sans défaillance au cours du temps t est égale à $e^{-\lambda t}$. Dans cette hypothèse les formules des estimations ponctuelles et d'intervalle, rapportées aux §§ 3.3 et 3.4, sont vraies. Le problème se pose de vérifier l'hypothèse suivant laquelle la probabilité de fonctionnement sans défaillance $R(t) = e^{-\lambda t}$.

Nous rapportons plus bas divers critères de vérification de cette hypothèse. La diversité des critères que nous donnons ici bas est une nécessité de principe. En effet, en qualité d'hypothèses concurrentes de l'hypothèse initiale $R(t) = e^{-\lambda t}$ on peut rencontrer diverses distributions (par exemple, la distribution de Weibull, la distribution lognormale, etc., cf. ch. 1). Chaque critère concret peut distinguer, avec un niveau élevé de certitude et pour un nombre limité de données relatives aux essais de fiabilité, la distribution exponentielle d'un nombre restreint d'autres distributions. On peut ainsi rencontrer des distributions concurrentes du temps de fonctionnement sans défaillance, qui diffèrent notablement de la distribution exponentielle. Néanmoins, les résultats du traitement des données suivant le critère utilisé seront conformes d'une manière erronée à l'hypothèse présumant le caractère exponentiel de la probabilité $R(t)$ de fon.tionnement sans défaillance. Pour éviter de telles erreurs on recommande de vérifier l'hypothèse du caractère exponentiel d'après plusieurs critères. Nous citons plus bas divers critères pour vérifier l'hypothèse $R(t) = e^{-\lambda t}$. Les auteurs ont abondamment puisé à cette fin dans l'article récapitulatif d'Epstein [5].

Papier à échelle exponentielle. Utilisant l'approche générale pour la construction des papiers probabilistes exposée au § 3.2,

on peut construire un papier à échelle exponentielle des probabilités. Sur ce papier la famille des fonctions de répartition

$$F(t)=\begin{cases} 1-e^{-\lambda(t-a)} & \text{pour } t\geqslant a,\\ 0 & \text{pour } t<a \end{cases} \qquad (4.2.1)$$

est représentée sous forme de demi-droites $y = \lambda(x - a)$, $x \geqslant a$. Pour construire ce papier on utilise le fait que lors de l'application $x = t$, $y = -\ln(1 - F)$ des points de la demi-bande (t, F),

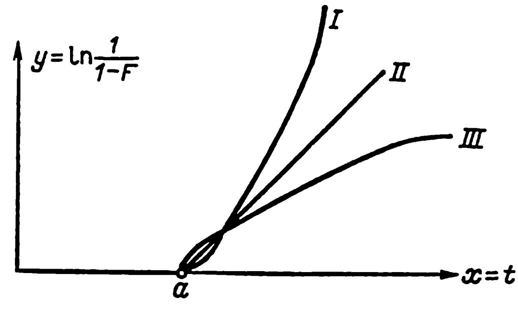


Fig. 4.2.1

$t \geqslant a$, $0 \leqslant F \leqslant 1$, dans le plan (x, y) les courbes de la forme $(t, F(t))$, où $F(t)$ est donnée par la formule (4.2.1), se transforment en demi-droites $y = \lambda(x - a)$, $x \geqslant a$. On obtient la distribution exponentielle dans le cas particulier, où $a = 0$. En vertu du théorème de Glivenko la fonction de distribution empirique doit être proche de la fonction de distribution théorique. Construisant l'image de la fonction de distribution empirique on doit rejeter l'hypothèse du caractère exponentiel de la distribution dans les cas, où le graphique de cette fonction empirique s'écarte notablement du rayon de la droite $y = \lambda x$, $x \geqslant 0$, passant par l'origine des coordonnées. Il est alors utile d'avoir en vue que la famille triparamétrique des distributions de Weibull pour laquelle

$$F(t)=\begin{cases} 1-e^{-\lambda(t-a)^p} & \text{pour } t\geqslant a,\\ 0 & \text{pour } t<a, \end{cases} \qquad (4.2.2)$$

donne sur le papier à échelle exponentielle des probabilités des courbes de la forme $y = \lambda(t - a)^p$. Sur la figure 4.2.1 on a représenté les graphiques de ces courbes; le cas I correspond à $p > 1$, le cas II à $p = 1$ et le cas III à $p < 1$. Conformément au tableau qualitatif représenté sur la figure 4.2.1, on doit rejeter l'hypothèse suivant laquelle la fonction de distribution est de la forme (4.2.1) en faveur de l'hypothèse suivant laquelle la distribution est de la forme donnée par la formule (4.2.2), quand la fonction empirique

de distribution, portée sur le papier fonctionnel, a sa convexité orientée vers le haut ($p < 1$) ou vers le bas ($p > 1$).

La construction de la fonction empirique de distribution est effectuée de différentes façons en fonction du type du plan d'expériences utilisé.

Si les essais des N éléments étaient effectués d'après un plan du type B et si les instants d'apparition des pannes sont $t_1, t_2, \ldots$ $\ldots, t_d$, le premier procédé de construction consiste en ce que la fonction empirique est donnée par la formule

$$F^{(1)}_{\text{emp}}(t) = \frac{d(t)}{N}, \tag{4.2.3}$$

où $d(t)$ est le nombre de pannes ayant eu lieu avant l'instant t. Lors d'une telle construction nous ne connaissons qu'une partie de la fonction empirique de distribution, si $d < N$. Dans le cas, où l'on utilise le second procédé, on calcule les valeurs S_i des temps globaux de fonctionnement sans défaillance dans les intervalles entre les pannes $S_1 = Nt_1$, $S_2 = (N-1)(t_2 - t_1)$, $\ldots$, $S_d = (N - d + 1)(t_d - t_{d-1})$. Nous avons démontré plus haut que les valeurs S_i sont des variables aléatoires indépendantes dont la fonction de répartition est de la forme (4.2.1), où $a = 0$. La fonction empirique est construite d'après la formule

$$F^{(2)}_{\text{emp}}(t) = \frac{d(t)}{d}, \tag{4.2.4}$$

où $d(t)$ est le nombre de $S_i < t$ et d est le nombre global de pannes observées.

Au cours des essais du type V on peut également utiliser ces procédés. Pour le premier procédé on ne calcule que les instants $t'_1, t'_2, \ldots, t'_d$ d'apparition des premières pannes, autrement, si la i-ième cellule du stand était au début des essais occupée par un élément qui est tombé en panne à l'instant t_{i_1}, les instants des pannes des autres éléments, qui viendront occuper cette cellule, ne sont pas pris en considération. Compte tenu des instants $t'_1, \ldots, t'_{d'}$, la fonction empirique est construite d'après la formule (4.2.3). Pour le second procédé on prend en considération tous les instants d'apparition des pannes $t_1, \ldots, t_d$. Comme dans le cas des plans du type V le flux des instants des pannes est poissonien d'intensité $N\lambda$, les variables aléatoires $S_1 = Nt_1$, $S_2 = N(t_2 - t_1)$, $\ldots$, $S_d = N(t_d - t_{d-1})$ ont une fonction de distribution de la forme (4.2.2), où $a = 0$. La fonction empirique de distribution est construite d'après la formule (4.2.4).

Nous avons cité ces divers procédés de construction parce que chacun d'eux est dans une mesure différente sensible aux diverses hypothèses concurrentes. Les courbes présentées sur la figure 4.2.1 pour l'hypothèse de la forme (4.2.2) se rapportent uniquement au premier procédé de construction.

Exemple. Supposons que les essais ont été conduits conformément au plan $[N = 49, B, N = 49]$. Les instants des pannes des éléments soumis à l'essai sont rapportés dans la table 4.2.1 ; cf. également [5].

Table 4.2.1

1,2	13,7	38,9	72,4	102,8	151,6	203,0
2,2	15,1	47,9	73,6	108,5	152,6	204,3
4,9	15,2	48,4	76,8	128,7	164,2	229,5
5,0	23,9	49,3	83,8	133,6	166,8	253,1
6,8	24,3	53,2	95,1	144,1	178,6	304,1
7,0	25,1	55,6	97,9	147,6	185,2	341,7
12,1	35,8	62,7	99,6	150,6	187,1	354,4

Pour construire la fonction empirique, on peut utiliser la formule (4.2.3). Notons toutefois que pour les plans du type $[N, B, r]$ on a $\mathrm{M}F(t_i) = \frac{i}{N+1}$, si $i \leqslant r$, $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Nous avons adopté le plan $[N, B, N]$, alors au lieu de la formule (4.2.3) nous pouvons utiliser une formule quelque peu modifiée

$$F^{(1)}_{\mathrm{emp}}(t) = \frac{d(t)}{N+1}, \quad t_d < t < t_{d+1}. \tag{4.2.3'}$$

Calculant les valeurs $l_i = -\ln\left[1 - \frac{i}{N+1}\right]$, nous construisons sur le papier à échelle exponentielle des probabilités le graphique de la fonction empirique. La forme du graphique obtenu est représentée sur la figure 4.2.2. La concordance avec l'hypothèse sur le caractère exponentiel de la distribution est très bonne.

Critère du χ^2 pour la vérification du caractère exponentiel. Bornons-nous à deux exemples d'utilisation du critère du χ^2 pour vérifier le caractère exponentiel de la distribution. Supposons que les essais étaient effectués conformément au plan $[N, B, T]$. Le nombre observé des pannes est élevé ($d(t) \geqslant 20$). Soient $t_1, \ldots, t_{d(t)}$ les instants des pannes. Comme nous l'avons déjà indiqué au chapitre 2,

les variables aléatoires $\omega_i = \frac{S_B(t_i)}{S_B(T)}$, où $S_B(T)$ désigne la valeur du temps global de fonctionnement à l'instant t, forment un échantillon ordonné $d(t)$ de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées dans l'intervalle [0, 1]. Partageons l'intervalle [0, 1] en k parties égales, alors en moyenne $\frac{d(T)}{k}$ points ω_i parmi $d(T)$

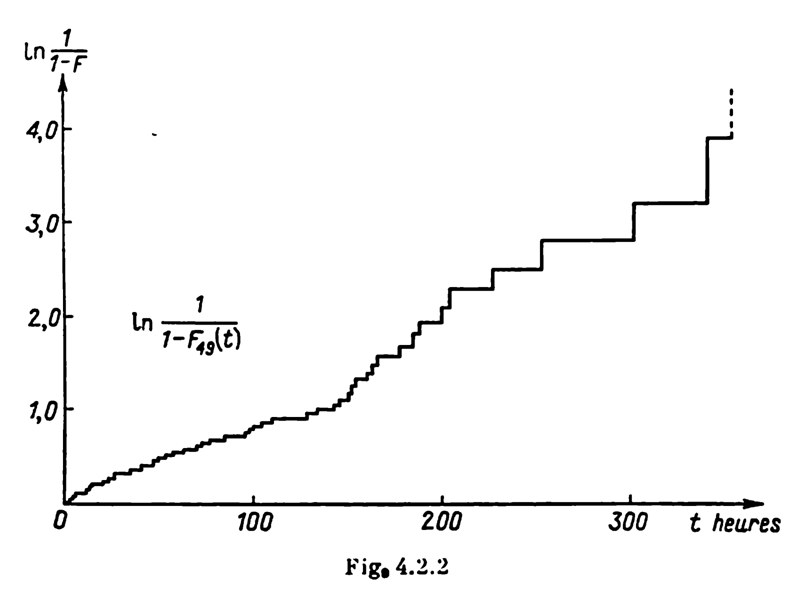


Fig. 4.2.2

tombent dans chacun de ces k intervalles. Soit d_i le nombre observé de points ω_i tombés dans le i-ième intervalle. Comme on sait

$$\Psi_T = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(d_i - \frac{d(T)}{k}\right)^2}{\frac{d(T)}{k}} \tag{4.2.5}$$

(cf. § 1.6) la statistique suit une distribution proche du χ^2 à $(k - 1)$ degrés de liberté, si seulement les nombres d_i sont suffisamment grands. L'hypothèse du caractère exponentiel de la distribution est rejetée avec un seuil de signification α, s'il s'avère que $\Psi_T > \chi^2_{1-\alpha}(k-1)$. Si l'on utilise le plan $[N, B, r]$, les valeurs des temps globaux de fonctionnement $S_B(t_i)$ peuvent être considérées comme les valeurs de $r-1$ variables aléatoires indépendantes, uniformément distribuées dans l'intervalle $[0, S(t_r)]$. Si l'on introduit la notation $\omega_i = \left[\frac{S_B(t_i)}{S_B(t_r)}\right]$, $i = 1, 2, \ldots, r-1$, et d_i pour le nombre de points

ω_i tombés dans l'intervalle $\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right]$, la statistique

$$\Psi_r = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left[d_i - \frac{r-1}{k}\right]^2}{\frac{r-1}{k}} \qquad (4.2.6)$$

suit une distribution proche du χ^2 à $(k-1)$ degrés de liberté, si seulement les nombres d_i sont suffisamment grands.

Les formules analogues à (4.2.5) et (4.2.6) sont également applicables aux plans du type $[N, V, T]$. Il faut seulement tenir compte du fait que, lors de l'utilisation du plan $[N, V, T]$, $\omega_i = \frac{t_i}{T}$, et lors de l'utilisation du plan $[N, V, r]$, $\omega_i = \frac{t_i}{t_r}$, $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, r-1$, où t_i sont les instants d'apparition des pannes. Si les essais sont conduits d'après le plan $[N, B, (r, T)]$ ou $[N, V, (r, T)]$, la formule (4.2.5) est utilisée quand $t_r > T$ et la formule (4.2.6), quand $t_r < T$.

On peut trouver un exposé des questions générales liées à l'utilisation du critère du χ^2 dans l'ouvrage de Cochran [6]. La table des valeurs des quantiles $\chi_p^2(k)$ est donnée dans l'annexe 4.

Critère de Kolmogorov. Comme habituellement, $S_B(t)$ et $S_V(t)$ sont égales aux valeurs du temps global de fonctionnement lors de l'utilisation des plans du type B ou V. Si t^* est l'instant de l'arrêt des essais, $d = d(t^*)$ le nombre total des pannes observées, alors en cas d'utilisation des plans $[N, B, T]$, $[N, B, r]$, les points

$$\omega_i = \frac{S_B(t_i)}{S_B(T)}, \quad i = 1, 2, \ldots, d(T);$$
$$\omega_i = \frac{S_B(t_i)}{S_B(t_r)}, \quad i = 1, \ldots, r-1, \qquad (4.2.7)$$

constituent l'échantillon ordonné correspondant à un échantillon indépendant de taille $d(t^*)$, égale à $d(T)$ ou à $r-1$, de variables aléatoires uniformément distribuées dans l'intervalle $[0, 1]$. Lors de l'utilisation du plan $[N, B, (r, T)]$ les points ω_i, calculés d'après la formule supérieure (4.2.7), quand $t_r > T$, et la formule inférieure, quand $t_r < T$, possèdent des propriétés analogues. Des échantillons ordonnés analogues sont formés également par des points

$$\omega_i = \frac{t_i}{T}, \quad i = 1, 2, \ldots, d(T); \quad \omega_i = \frac{t_i}{t_r}, \quad i = 1, 2, \ldots, r-1, \qquad (4.2.8)$$

que l'on calcule en utilisant des plans du type $[N, V, T]$, $[N, V, r]$, $[N, V, (r, T)]$. Ainsi, la fonction théorique de distribu-

tion est $F(\omega)=\omega$, $0\leqslant\omega\leqslant 1$, et la fonction empirique est

$$F_{\text{emp}}(\omega)=\frac{i}{d^*}, \quad \omega_i\leqslant\omega<\omega_{i+1}, \tag{4.2.9}$$

où d^* est soit égal à $d(T)$, si $t^*=T$, soit égal à $r-1$, si $t^*=r$. A. Kolmogorov a étudié le comportement asymptotique de

$$D_{d^*}=\sup_{0\leqslant\omega\leqslant 1}|F_{\text{emp}}(\omega)-\omega|=\max_{1\leqslant i\leqslant d^*}\left\{\left|\frac{i-1}{d^*}-\omega_i\right|, \left|\frac{i}{d^*}-\omega_i\right|\right\}. \tag{4.2.10}$$

Il a montré que

$$\lim_{d^*\to\infty}\mathbf{P}\{\sqrt{d^*}D_{d^*}<y\}=\begin{cases}0 & \text{pour } y<0,\\ K(y)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2y^2}, & y\geqslant 0.\end{cases} \tag{4.2.11}$$

Les valeurs de la fonction $K(y)$ sont données dans la table 15 de l'annexe.

On calcula par la suite certains quantiles des variables aléatoires D_n, données par la formule (4.2.10). Dans la table 16 de l'annexe sont données les valeurs de $D_{n\alpha}$, $\alpha=0{,}2$; $0{,}1$; $0{,}05$; $0{,}02$; $0{,}01$ et $n=1\,(1)\,100$. Les nombres $D_{n\alpha}$ vérifient la condition

$$\mathbf{P}\{D_n>D_{n\alpha}\}=\alpha. \tag{4.2.12}$$

Le critère de Kolmogorov pour la vérification du caractère exponentiel du temps de fonctionnement consiste en ce qui suit. Suivant le type du plan utilisé on calcule d'après les formules (4.2.7) et (4.2.8) les valeurs des points ω_i. On trouve ensuite d'après la formule (4.2.10) la valeur D_{d^*}. Si $d^*>100$, on effectue la normalisation en multipliant par $\sqrt{d^*}$. L'hypothèse du caractère exponentiel du temps de fonctionnement sans défaillance est rejetée avec le seuil de signification α, si $\sqrt{d^*}D_{d^*}>K_{1-\alpha}$; ici $K(k_p)=p$, autrement dit, k_p est le quantile d'ordre p de la distribution de Kolmogorov. Si $d^*\leqslant 100$, alors on effectue la comparaison avec les nombres $D_{n\alpha}$ de la table 16 de l'annexe. L'hypothèse du caractère exponentiel de la distribution est rejetée avec le seuil de signification α, si $D_{d^*}>D_{d^*,\alpha}$; dans le cas contraire on accepte cette hypothèse.

Critères basés sur les statistiques homogènes $\bar{\omega}$ et v. Soient $t_1, t_2, \ldots, t_d$ les instants d'apparition des pannes, enregistrées au cours des essais. Nous dirons que la statistique $f=f(t_1, \ldots, t_d)$ est *homogène*, si sa valeur pour tout $\lambda>0$ vérifie la condition

$$f(\lambda t_1, \ldots, \lambda t_d)=f(t_1, \ldots, t_d). \tag{4.2.13}$$

Il découle de la condition (4.2.13) que dans le cas, où la probabilité de fonctionnement sans défaillance suit une distribution exponentielle, la distribution de la statistique $f(t_1, \ldots, t_d)$ ne dépend pas de λ. Si l'on calcule à l'avance la table des quantiles f_{d_p} tels que

$$\mathbf{P}\{f(t_1, \ldots, t_d) \leqslant f_{d_p} \mid d(t^*) = d\} = p,$$

on peut construire un critère pour vérifier le caractère exponentiel. Le critère correspondant au seuil de signification α consiste en ce que l'hypothèse du caractère exponentiel est rejetée, si $f > f_{d,1-\alpha}$, et acceptée, si $f \leqslant f_{d,1-\alpha}$. En fait, tous les critères du présent paragraphe sont construits d'après ce principe. Nous nous bornerons toutefois ici à indiquer seulement deux statistiques: $\overline{\omega}$ et v. Ces deux statistiques sont données par les formules

$$\overline{\omega} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{2n\overline{x}}, \quad v = \frac{\overline{x}}{s}, \tag{4.2.14}$$

où $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$. La statistique $\overline{\omega}$ est appelée *statistique de Sherman* [7], [8]. Si l'on remplace x_i par le temps global de fonctionnement dans l'intervalle séparant la $(i-1)$-ième de la i-ième panne, on peut aisément se convaincre que les deux statistiques vérifient la condition d'homogénéité et que l'on peut les utiliser pour vérifier l'hypothèse du caractère exponentiel. Les auteurs ne connaissent pas de tables des quantiles ou des fonctions de répartition de ces statistiques. On peut montrer que dans le cas, où les valeurs de x_i sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes avec une fonction de répartition $F(t) = 1 - e^{-t}$, alors quand $n \to \infty$, le vecteur aléatoire bidimensionnel

$$\{\sqrt{n}(\overline{x} - 1, \quad \sqrt{n}(s^2 - 1))\}$$

suit une distribution normale de moyennes zéro et de matrice des variances-covariances $\| c_{ij} \|$, $c_{11} = 1$, $c_{22} = 8$, $c_{12} = c_{21} = 2$. Utilisant le lemme asymptotique du § 1.6, où $H(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y}}$, nous obtenons que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{v_n < 1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz. \tag{4.2.15}$$

Ainsi, s'il s'avère que $n \gg 1$ et $|\sqrt{n}(v_n - 1)| > u_{\frac{\alpha}{2}}$ où $u_{\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile de la distribution normale, alors l'hypothèse sur la forme exponentielle de la probabilité de fonctionnement sans défaillance

doit être rejetée. Bartholomeu [8] a étudié l'efficacité asymptotique relative des critères basés sur les statistiques $\bar{\omega}$ et v, quand le rôle d'hypothèses concurrentes était joué par la distribution gamma et la distribution de Weibull. Toutefois, dans cette étude l'efficacité était comprise dans un sens plus étroit, local, quand les valeurs des paramètres de la distribution gamma et de la distribution de Weibull variaient de telle sorte que ces distributions donnaient également à la limite la distribution exponentielle.

Critère F pour vérifier la constance de la fonction de risque de pannes. On sait (cf. chapitre 2) que l'affirmation suivant laquelle la probabilité de fonctionnement sans défaillance $R(t) = e^{-\lambda t}$ est équivalente à la condition que la fonction de risque des pannes $\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \lambda$. On peut considérer en qualité d'hypothèses concurrentes celles pour lesquelles $\lambda(t)$ est soit une fonction monotone décroissante, soit une fonction monotone constante de t. Supposons que les essais sont conduits soit d'après le plan $[N, B, r]$, soit d'après le plan $[N, V, r]$. Dans le premier cas nous calculons les valeurs s_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ du temps global de fonctionnement entre les pannes d'après les formules $s_i = (N - i + 1)(t_i - t_{i-1})$, $t_0 = 0$, $i = 1, \ldots, r$, dans le second cas d'après les formules $s_i = N(t_i - t_{i-1})$. Dans les deux cas s_i sont des variables aléatoires indépendantes dont les fonctions de répartition sont $1 - e^{-\lambda t}$. Il en découle que $2\lambda s_i$ suit une distribution du χ^2 à deux degrés de liberté. Soit $r = r_1 + r_2$, où $r_1 > 0$, $r_2 > 0$; il découle alors de la formule (4.1.9) que la variable aléatoire

$$\varphi(r_1, r_2) = \frac{r_2 \sum_{i=1}^{r_1} s_i}{r_1 \sum_{i=r_1+1}^{r} s_i} \tag{4.2.16}$$

suit une distribution de F à $\nu_1 = 2r_1$ et $\nu_2 = 2r_2$ degrés de liberté. Soit $f_p(\nu_1, \nu_2)$ le quantile d'ordre p de la distribution de F.

Le critère F correspondant au seuil de signification α pour l'hypothèse $H_0 = \{h(t) = \lambda\}$ contre l'hypothèse concurrente $H_1 = \{h(t) \neq \text{const}, h(t)$ soit croît, soit décroît$\}$ est décrit par le système suivant de règles.

On accepte l'hypothèse H_0, si

$$\psi(r_1, r_2) = \max\{\varphi(r_1, r_2), [\varphi(r_1, r_2)]^{-1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(r_1, r_2) < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(r_1, r_2), \\ [\varphi(r_1, r_2)]^{-1} < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(r_2, r_1); \end{array} \right. \tag{4.2.17}$$

dans le cas contraire cette hypothèse est rejetée. S'il s'avère que $\psi(r_1, r_2) = \varphi(r_1, r_2) > f_{1-\frac{\alpha}{2}}(r_1, r_2)$, on accepte l'hypothèse concurrente, suivant laquelle $\lambda(t)$ décroît. Si par contre $\psi(r_1, r_2) = [\varphi(r_1, r_2)]^{-1} > f_{1-\frac{\alpha}{2}}(r_2, r_1)$, on accepte l'hypothèse concurrente suivant laquelle $\lambda(t)$ croît.

Considérons un **exemple numérique**. Supposons que les essais étaient conduits conformément au plan $[N = 100, B, r = 6]$. Les instants des pannes étaient $t_1 = 3$, $t_2 = 9$, $t_3 = 16$, $t_4 = 34$, $t_5 = 48$, $t_6 = 70$. Les valeurs des temps globaux de fonctionnement étaient alors respectivement $s_1 = 300$, $s_2 = 594$, $s_3 = 686$, $s_4 = 1358$, $s_5 = 1344$, $s_6 = 2090$. Soit $r_1 = r_2 = 3$, alors

$$\varphi(3, 3) = \frac{300 + 594 + 686}{1746 + 1344 + 2090} \approx (3{,}3)^{-1}.$$

Comme $\varphi < 1$, on a $\psi(3, 3) = [\varphi(3, 3)]^{-1} \approx 3{,}3$. Nous trouvons alors d'une table analogue à la table 11 de l'annexe que $f_{0,9}(6, 6) = 3{,}055 < \varphi^{-1}(3, 3) = 3{,}3$. Ainsi l'hypothèse H_0 doit être rejetée si le seuil de signification $1 - \alpha = 0{,}9$. Notons toutefois que $f_{0,95}(6, 6) = 4{,}284$. Ainsi, si nous avions choisi le seuil de signification $1 - \alpha = 0{,}95$, alors l'hypothèse H_0 aurait dû être acceptée. Quel comportement adopter, s'il est évident que le choix $\alpha = 0{,}1$ est très conventionnel ?

On peut raisonner de la manière suivante. On est en présence d'une tendance de décroissance de la fonction de risque des pannes $\lambda(t)$. Toutefois, le nombre de données obtenues par suite des essais est nettement insuffisant. En d'autres termes, « les essais ont été arrêtés à l'instant le plus intéressant ». Nous décidons de poursuivre les essais jusqu'à $r = 10$. La poursuite des essais nous donne $t_7 = 108$, $t_8 = 147$, $t_9 = 204$, $t_{10} = 264$. Les valeurs des temps globaux de fonctionnement sont respectivement égales à $s_7 = 3572$, $s_8 = 3627$, $s_9 = 5244$, $s_{10} = 6000$. Supposons maintenant que $r_1 = 5$ et $r_2 = 5$. Ici $\varphi(5, 5) = (6{,}5)^{-1}$. Ainsi, $\varphi(5, 5) \approx 6{,}5$; $f_{0,975}(10, 10) = 3{,}717 < 6{,}5$, de sorte que l'hypothèse $H_0 = \{\lambda(t) = \lambda\}$ doit être rejetée en faveur de l'hypothèse suivant laquelle $\lambda(t)$ est une fonction monotone décroissante. Le degré de certitude relatif au rejet de l'hypothèse H_0 s'est nettement élevé.

Critère du χ^2 pour vérifier la constance de la fonction de risque des pannes. Nous avons souligné dans notre exposé du critère de Kolmogorov que dans le cas, où l'hypothèse $H_0 = \{\lambda(t) = \lambda > 0\}$ est vraie, les points ω_i, $i = 1, \ldots, d^*$ calculés d'après les formules (4.2.7) ou (4.2.8) peuvent être considérés comme un échantillon ordonné prélevé sur d^* variables aléatoires indépendantes $\xi_1, \ldots, \xi_{d^*}$, dont chacune est uniformément distribuée dans l'intervalle $[0, 1]$. Comme $-2 \ln \xi_i$ suit une distribution du χ^2 à deux

degrés de liberté, la fonction

$$\gamma_{d^*} = -2 \sum_{i=1}^{d^*} \ln \omega_i = -2 \sum_{i=1}^{d^*} \ln \xi_i \qquad (4.2.18)$$

suit une distribution du χ^2 à 2 d^* degrés de liberté. Si l'on utilise le plan de l'un des types $[N, B, r]$, $[N, B, T]$, $[N, V, r]$, etc., on peut alors, d'après la formule correspondante (4.2.7) ou (4.2.8), calculer les valeurs des points ω_i et puis, d'après la formule (4.2.18), la valeur de la statistique γ_{d^*}. S'il s'avère que $\gamma_{d^*} > \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2d^*)$ (a) ou que $\gamma_{d^*} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2d^*)$ (b), où $\chi^2_p(2d^*)$ sont des quantiles d'ordre p de la distribution du χ^2 à $2d^*$ degrés de liberté, l'hypothèse $H_0 = \{\lambda(t) = \lambda\}$ sera rejetée et dans le cas (b) on adoptera l'hypothèse suivant laquelle $\lambda(t)$ est monotone croissante, et dans le cas (a) que $\lambda(t)$ est monotone décroissante. Epstein recommande également dans son article [5] d'utiliser le critère de Bartlett pour vérifier la constance de la variance.

Critère de Fisher pour vérifier la compatibilité de l'hypothèse sur le caractère exponentiel avec la présence d'un grand intervalle entre les pannes. Il peut arriver parfois que l'un des éléments soumis à l'essai fonctionne sans défaillance pendant un très grand intervalle de temps. Il peut arriver également que lors des essais du système on rencontre un très grand intervalle de temps de fonctionnement sans défaillance. Le critère de Fisher [9] que nous allons exposer peut être utilisé pour vérifier la compatibilité de la présence d'un tel intervalle avec l'hypothèse relative au caractère exponentiel de la distribution du temps de fonctionnement sans défaillance.

La statistique

$$\eta_{d^*} = \frac{\max\limits_{1 \leq i \leq d^*} x_i}{\sum\limits_{i=1}^{d^*} x_i} \qquad (4.2.19)$$

est homogène. Par conséquent, si les x_i sont mutuellement indépendants et suivent une distribution exponentielle $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, alors la distribution de η_n ne dépend pas de λ. Fisher [9] a montré que

$$\mathbf{P}\{\eta_n > g\} = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} C_n^k (1 - kg)^{n-1}. \qquad (4.2.20)$$

On a présenté dans la table 13 de l'annexe les valeurs de $g_\alpha(n)$, $\alpha = 0{,}05$, telles que $\mathbf{P}\{\eta_n > g_\alpha(n)\} = \alpha$, $n = 5\,(5)\,50$.

Comme nous l'avons maintes fois précisé plus haut lors de l'utilisation des plans pour lesquels l'instant d'interruption des essais $t^* = t_r$ ou $t^* = T$, les valeurs des temps globaux de fonctionnement S_i dans les intervalles (t_{i-1}, t_i) entre deux pannes consécutives

sont des variables aléatoires indépendantes, dont les fonctions de répartition sont $1 - e^{-\lambda t}$. Il en découle que, quand l'hypothèse $H_0 = \{\lambda(t) = \lambda > 0\}$ est vraie, on a

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\max\limits_{1 \leq i \leq d^*} S_i}{S^*} > g_\alpha(d^*) \mid d(t^*) = d^*\right\} = \alpha, \qquad (4.2.21)$$

où S^* est la valeur du temps global de fonctionnement à l'instant t^* d'interruption des essais, et $d^* = r$, si $t^* = t_r$. Si $t^* = T$, alors $S^* = S(t_{d(T)})$ et $d^* = d(T)$. Les valeurs de S_i sont calculées d'après les formules

$$S_i = \begin{cases} (N - i + 1)(t_i - t_{i-1}) & \text{pour les plans du type } B, \\ N(t_i - t_{i-1}) & \text{pour les plans du type } V. \end{cases} \qquad (4.2.22)$$

Le critère de Fisher correspondant au seuil de signification α consiste en ce que l'hypothèse $H_0 = \{\lambda(t) = \lambda > 0\}$ est rejetée, quand $\max\limits_{1 \leq i \leq d^*} \frac{S_i}{S^*} > g_\alpha(d^*)$; dans le cas contraire l'hypothèse H_0 est acceptée.

Considérons un **exemple numérique** d'utilisation de ce critère. Supposons que l'on enregistre les pannes se manifestant dans un calculateur électronique. Les résultats de l'enregistrement sont les suivants: $t_1 = 16$, $t_2 = 39$, $t_3 = 45$, $t_4 = 55$, $t_5 = 305$, $t_6 = 319$, $t_7 = 325$, $t_8 = 345$, $t_9 = 376$, $t_{10} = 420$. Comme on ne soumet à l'essai qu'un seul échantillon et que les pannes qui apparaissent sont éliminées, on peut estimer que les essais sont conduits conformément à un plan du type $[N = 1, V, r = 10]$. D'après la formule (4.2.22) nous trouvons $S_1 = 16$, $S_2 = 13$, $S_3 = 6$, $S_4 = 10$, $S_5 = 250$, $S_6 = 14$, $S_7 = 6$, $S_8 = 20$, $S_9 = 31$, $S_{10} = 44$. Calculant la statistique figurant sous le signe de probabilité dans la formule (4.2.21), nous obtenons que

$$\frac{\max\limits_{1 \leq i \leq 10} S_i}{S(t_{10})} = \frac{250}{420} = 0{,}59 > g_{0.05}(10);$$

ainsi l'hypothèse sur le caractère exponentiel de la distribution des intervalles doit être rejetée.

L'apparition d'un grand intervalle entre les pannes peut être liée au fait que l'hypothèse $H_0 = \{\lambda(t) = \lambda > 0\}$ n'est pas vraie. Toutefois, il peut y avoir d'autres causes inattendues. Dans le cas présent il s'est avéré que l'opérateur enregistrant les pannes était en vacances, de sorte que les pannes n'avaient pas été enregistrées. Cet exemple est intéressant en ce sens qu'il attire l'attention des chercheurs sur la nécessité d'une analyse préliminaire plus soigneuse de la qualité des données obtenues.

Critère de Hartley de vérification de la compatibilité de l'hypothèse sur le caractère exponentiel avec la présence d'un grand et

d'un petit intervalle entre les pannes. Pour vérifier la compatibilité de la présence d'un grand et d'un petit intervalle entre les pannes on peut utiliser le critère proposé par Hartley [10]. Hartley a étudié la distribution de la statistique homogène

$$h(r,\ n)=\frac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} x_i}, \qquad (4.2.23)$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une distribution du χ^2 à r degrés de liberté. Pour diverses valeurs de r et n il a calculé des tables des valeurs critiques $h_\alpha\ (r,\ n)$ pour lesquelles

$$\mathbf{P}\{h(r,\ n) > h_\alpha(r,\ n)\}=\alpha,$$

où $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}01$. La table 12 des valeurs de ces quantiles est donnée dans l'annexe. Si l'on désigne par S_i les valeurs des temps globaux de fonctionnement calculées d'après les formules (4.2.22) et par d^* le nombre de pannes s'étant produites au cours des essais, alors la statistique

$$h(2,\ d^*)=\frac{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant d^*} S_i}{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant d^*} S_i} \qquad (4.2.24)$$

suit une distribution coïncidant avec celle de la statistique donnée par la formule (4.2.23), où $r = 2$, $n = d^*$. Cela découle directement du fait que les $2\lambda S_i$ sont mutuellement indépendantes et suivent une distribution du χ^2 à deux degrés de liberté. Ainsi, le critère de Hartley appliqué au problème de la vérification de l'hypothèse du caractère exponentiel de la probabilité de fonctionnement sans défaillance est décrit par le système de règles suivant. Si la valeur de la statistique, calculée d'après la formule (4.2.23), est telle que $h\ (2,\ d^*) > h_{1-\alpha}\ (2,\ d^*)$, alors l'hypothèse $H_0 = \{\lambda\ (t) = \lambda > 0\}$ doit être rejetée. Dans le cas contraire cette hypothèse est vérifiée. Les valeurs des quantiles $h_\alpha\ (2,\ n)$ pour les petites valeurs $\alpha = 0{,}05\ (0{,}01)$ données dans la table 12 peuvent servir à vérifier l'hypothèse H_0, quand le rôle d'hypothèse concurrente est joué par des distributions proches des distributions régulières.

§ 4.3. Critère de vérification des hypothèses relatives aux valeurs du paramètre de la distribution exponentielle

Supposons que l'on puisse estimer que la probabilité de fonctionnement sans défaillance est égale à $e^{-\lambda t}$, où $\lambda \geqslant 0$ est la valeur *inconnue* du paramètre λ. Dans les problèmes de fiabilité le plus grand intérêt représente la vérification des hypothèses composées du type $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$, $H_1 = \{\lambda > \lambda_0\}$, où λ_0 est une valeur *fixée* du para-

mètre. La valeur λ_0 est choisie de telle sorte que quand $\lambda \leqslant \lambda_0$, on peut estimer que la production (les éléments, les systèmes, etc.) est fiable, et pour les valeurs $\lambda > \lambda_0$ non fiable ou insuffisamment sûre. On peut se représenter également une position plus large du problème, quand on est en présence de plusieurs hypothèses, par exemple $H'_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$, $H'_1 = \{\lambda_0 < \lambda < \lambda_1\}$, $H'_2 = \{\lambda \geqslant \lambda_1\}$. Ici H'_0 correspond aux éléments hautement fiables, H'_1 aux éléments de fiabilité moyenne, et H'_2 aux éléments insuffisamment fiables. Nous nous bornerons uniquement au cas de la construction des critères de vérification de deux hypothèses $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$, $H_1 = \{\lambda > \lambda_0\}$. Le critère sera alors construit sur la base du théorème 4.1.1 (Neumann-Pearson). La forme du critère dépend notablement du plan suivant lequel on conduit les expériences de fiabilité. Nous estimerons qu'à l'instant initial N éléments sont soumis à l'essai. L'un des schémas les plus généraux de planification des expériences consiste en ce que l'on se donne au préalable un système de règles, déterminant l'instant t^* d'arrêt des essais. On suppose alors que l'instant d'arrêt des essais dépend seulement des instants $t_i \leqslant t^*$, où se produisent les pannes des éléments, autrement dit, t^* est une grandeur ne dépendant pas du futur. Dans ce cas les statistiques exhaustives seront $d(t^*)$, le nombre des éléments tombés en panne à l'instant d'arrêt t^*, et $S(t^*)$, le temps global de fonctionnement. Pour les plans du type V (cf. chapitre 3)

$$S_V(t^*) = Nt^*, \qquad (4.3.1)$$

et pour les plans du type B

$$S_B(t^*) = t_1 + \ldots + t_{d(t^*)} + [N - d(t^*)]\, t^*. \qquad (4.3.2)$$

L'espace $X = \{x\}$ des résultats des essais se compose de la suite des instants $t_i \leqslant t^*$ des pannes s'étant produites avant l'instant d'arrêt, autrement dit, $x = (t_1, \ldots, t_{d(t^*)}, t^*)$. La fonction de vraisemblance en cas d'utilisation des plans du type V sera alors donnée par la relation

$$p(t_1, \ldots, t_{d(t^*)}, t^* \mid \lambda) = (N\lambda)^{d(t^*)} e^{-\lambda S_V(t^*)}, \qquad (4.3.3)$$

où la valeur $S_V(t^*)$ est trouvée d'après la formule (4.3.1). Dans le cas de l'application des plans du type B on a

$$p\{t_1, \ldots, t_{d(t^*)}, t^* \mid \lambda\} = \\ = \lambda^{d(t^*)} N(N-1) \ldots [N - d(t^*) + 1]\, e^{-\lambda S_B(t^*)}, \qquad (4.3.4)$$

la valeur $S_B(t^*)$ étant calculée d'après la formule (4.3.2).

Nous obtenons de (4.3.3) et (4.3.4) que le rapport de vraisemblance est

$$\frac{p(x \mid \lambda_1)}{p(x \mid \lambda_0)} = \exp\left[d(t^*)\left(\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) - (\lambda_1 - \lambda_0)\, S(t^*)\right], \qquad (4.3.5)$$

où $\lambda_1 > \lambda_0$. Il découle ainsi de (4.3.5) que le domaine critique est choisi dans la famille des ensembles de la forme

$$X_c = \left\{ d(t^*),\ S(t^*) : d(t^*) \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) - (\lambda_1 - \lambda_0) S(t^*) > c \right\}. \quad (4.3.6)$$

Comme il découle du théorème de Neumann-Pearson, le critère dont le domaine critique entre dans la famille des ensembles définis par la formule (4.3.6) possède, pour une valeur donnée de l'erreur de première espèce correspondant à la valeur $\lambda = \lambda_0$, une erreur de seconde espèce minimale pour $\lambda = \lambda_1$ (partout dans ce qui suit $\lambda_1 > > \lambda_0$). Considérons maintenant les plans concrets d'essais de stand mentionnés au chapitre 3.

Plan du type $[N, V, T]$. Quand on utilise le plan $[N, V, T]$ l'instant d'arrêt des essais est $t^* = T$, autrement dit, il ne dépend pas du déroulement des essais. La statistique $S(t^*) = NT$ ne contient en elle-même aucune information sur le paramètre λ, puisque sa valeur peut être calculée avant le début des essais. C'est pourquoi nous trouvons de (4.3.6) que la famille des ensembles contenant le domaine critique est de la forme

$$X_c = \{d(T) > c\}. \quad (4.3.7)$$

Rappelons les notations employées au chapitre 3:

$$L_c(\lambda) = \sum_{d=0}^{c} \frac{\lambda^d}{d!} e^{-\lambda}, \qquad L_d(\Delta_\varepsilon(d)) = \varepsilon. \quad (4.3.8)$$

Rappelons encore que les valeurs $\Delta_\varepsilon(d)$ sont données dans la table 7 de l'annexe. Pour construire le critère ayant un seuil de signification non supérieur à α pour une valeur $\lambda = \lambda_0$, nous choisissons le plus petit $c > 0$ tel que

$$\mathbf{P}\{d(T) > c \mid \lambda_0\} = \sum_{d=c+1}^{\infty} \frac{(N\lambda_0 T)^d}{d!} e^{-N\lambda_0 T} = 1 - L_c(N\lambda_0 T) \leqslant \alpha.$$

Notant que $L_d(x)$ est une fonction décroissante de x, nous obtenons qu'il faut choisir en qualité de c le plus petit entier c pour lequel

$$N\lambda_0 T \leqslant \Delta_{1-\alpha}(c). \quad (4.3.9)$$

Le critère consiste ainsi en ce que le niveau d'acceptation c, trouvé de (4.3.9), est comparé au nombre observé de pannes $d(T)$. Si $d(T) \leqslant \leqslant c$, l'hypothèse $\lambda = \lambda_0$ ou $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$ est acceptée, et l'hypothèse $H_1 = \{\lambda > \lambda_0\}$ rejetée. Remarquant encore que la deuxième condition du théorème 4.1.2 est remplie, nous obtenons que le critère trouvé est uniformément le plus puissant. La fonction de puissance est alors égale à la probabilité de rejeter l'hypothèse. Quand

la valeur du paramètre est $\lambda > 0$, la fonction de puissance est donnée par la formule

$$W(\lambda) = 1 - L_c(N\lambda T). \tag{4.3.10}$$

$W(\lambda)$ est une fonction non décroissante de λ.

Si les paramètres déterminant le critère sont données et si la valeur $c = c(\alpha, T)$ est trouvée, on peut conduire les essais suivant un programme abrégé, en arrêtant les essais au moment t_{c+1} d'apparition de la $c + 1$-ième panne, si seulement $t_{c+1} < T$. L'hypothèse H_0 est alors rejetée. Pour une telle modification du plan nous passons en fait du plan $[N, V, T]$ au plan $[N, V, (c+1, T)]$, ce que l'on doit prendre en considération lors de la construction des estimations ponctuelles et d'intervalle du paramètre λ. Dans ce cas toutefois la fonction de puissance reste inchangée et est donnée par la formule (4.3.10).

Plan du type $[N, V, r]$. Les essais sont arrêtés au moment t_r, où se produit la r-ième panne. Comme $t^* = t_r$, alors $d(t_r) = r$ et la statistique $d(t^*)$ devient triviale. Toute l'information sur le paramètre λ est contenue dans le temps global de fonctionnement $S_V(t_r)$, dont la distribution est donnée (cf. § 3.3) par la formule

$$\mathbf{P}\{\lambda S_V(t_r) < X \mid \lambda\} = \int_0^X \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-t}\, dt = 1 - L_{r-1}(x). \tag{4.3.11}$$

La famille des ensembles X_c dans la formule (4.3.6) est équivalente à la famille

$$\{S_V(t_r) < S\}.$$

Prenant en considération (4.3.11), nous trouvons un S_α pour lequel

$$\mathbf{P}\{S_V(t_r) < S_\alpha \mid \lambda_0\} = 1 - L_{r-1}(\lambda_0 S_\alpha) = \alpha. \tag{4.3.12}$$

Nous avons de l'équation (4.3.12) en utilisant les notations (4.3.8)

$$S_\alpha = \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}. \tag{4.3.13}$$

Les conditions du théorème (4.1.2) sont de nouveau remplies, c'est pourquoi le critère correspondant au plan $[N, V, r]$ avec un niveau de signification α est uniformément le plus puissant. La fonction de puissance du critère est

$$W(\lambda) = \mathbf{P}\{S_V(t_r) < S_\alpha\} = 1 - L_{r-1}\left(\Delta_{1-\alpha}(r-1)\frac{\lambda}{\lambda_0}\right). \tag{4.3.14}$$

Plan du type $[N, V, (r, T)]$. Si au cours des essais suivant le plan $[N, V, (r, T)]$ il s'avère que $t_r > T$, alors $t^* = T$ et la statistique $S(t^*) = NT$ est triviale. Si par contre $t_r \leqslant T$, alors $t^* = t_r$ et la statistique triviale est $d(t^*) = r$. La famille des ensembles critiques est de la forme (4.3.6).

Considérons sur le plan (x, y) les points $(d(t), S_V(t))$. A l'instant d'arrêt des essais $t^* = \min(t_r, T)$, les valeurs $(d(t^*), S_V(t^*))$ sont situées sur la droite $d = r$, $S_V(t) = Nt_r < NT$, si $t_r < T$ ou dans l'un des points situés verticalement $d(T) = 0, 1, \ldots, r-1$ et $S_V(t^*) = NT$, si $t_r \geqslant T$. Les états possibles sont représentés sur la figure 4.3.1 par la droite $y = r$ et par des petits cercles. Sur le plan (x, y) la famille des domaines critiques est représentée par l'ensemble des points $(d(t^*), S_V(t^*))$ situés plus haut que la droite $\left(\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) y - (\lambda_1 - \lambda_0) x = k$, où $\lambda_1 > \lambda_0$. Quand k décroît, la probabilité qu'a l'état final $(d(t^*), S_V(t^*))$ de tomber dans ce domaine critique est une fonction non décroissante. Deux cas sont alors possibles. Dans le premier $k = k_1$ est grand, et le domaine critique se compose seulement des points du segment formant une partie du segment $d(t^*) = r$, $0 \leqslant S_V(t^*) \leqslant NT$. Dans le second cas $k = k_2$ est petit $(k_2 < k_1)$, et le domaine critique comprend tous les points du segment $d(t^*) = r$, $0 \leqslant S(t^*) \leqslant NT$ et des points $(d(T); NT)$, où $d(T) > c$. Ces deux cas sont montrés sur la figure 4.3.1. A $k = k_1$ correspond la droite l_1 et à $k = k_2$ la droite l_2. Lors du choix du domaine critique, déterminant le critère avec un niveau de signification non supérieur à α, on doit procéder de la manière suivante. Si

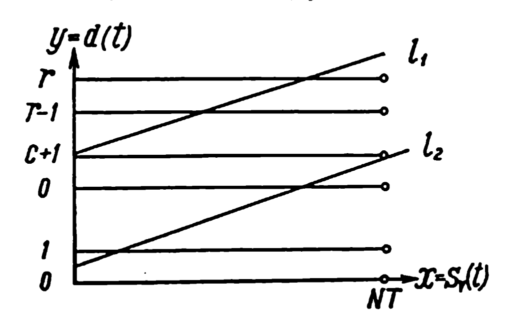


Fig. 4.3.1

$$\mathbf{P}\{t_r < T \mid \lambda_0\} = 1 - L_{r-1}(N\lambda_0 T) \geqslant \alpha,$$

alors nous trouvons le nombre S_α pour lequel

$$\mathbf{P}(S_V(t_r) < S_\alpha \mid \lambda_0) = 1 - L_{r-1}(\lambda_0 S_\alpha) = \alpha. \qquad (4.3.15)$$

La formule (4.3.15) est équivalente à la relation $S_\alpha = \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}$.

S'il s'avère que $\mathbf{P}\{t_r < T \mid \lambda_0\} < \alpha$, alors nous incluons dans le domaine critique une partie des points $d(T) > c$, $S_V(t) = NT$, où $c < r - 1$. On peut aisément remarquer que l'événement, consistant en ce que soit $t_r < T$, soit $d(T) > c$, est équivalent à l'événement $d(T) > c$. Par conséquent, le nombre d'acceptation c est trouvé à partir de la condition

$$\mathbf{P}\{[t_r < T] \cup [t_r > T,\ d(T) > c]\} =$$
$$= \sum_{d=c+1}^{\infty} \frac{(N\lambda_0 T)^d}{d!} e^{-N\lambda_0 T} = 1 - L_c(N\lambda T) \leqslant \alpha. \qquad (4.3.16)$$

Le nombre c est alors choisi comme le plus petit entier vérifiant (4.3.16). Ainsi, le critère pour vérifier l'hypothèse $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$ avec un niveau de signification non supérieur à α consiste en ce qui suit. Si $S_\alpha = \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0} < NT$, alors les essais sont conduits jusqu'à l'instant $t^* = \min(t_r, T)$. S'il s'avère alors que $S_V(t_r) < S_\alpha$, nous rejetons l'hypothèse $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$ et nous acceptons l'hypothèse $H_1 = \{\lambda \geqslant \lambda_0\}$. Si, par contre, soit $t_r < T$ et $S_V(t_r) \geqslant S_\alpha$, soit $t_r > T$, nous acceptons l'hypothèse $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$. Si $S_\alpha > NT$, nous trouvons de la condition (4.3.16) le plus petit nombre entier c tel que $N\lambda_0 T \leqslant \Delta_{1-\alpha}(c)$. Nous poursuivons les essais jusqu'à l'instant $t^* = \min(t_r, T)$. Dans ce cas, si soit $t_r < T$, soit $t_r > T$ et $d(T) > c$, nous rejetons l'hypothèse $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$ et nous acceptons l'hypothèse concurrente $H_1 = \{\lambda \geqslant \lambda_0\}$. Si $t_r > T$ et $d(T) \leqslant c$, nous acceptons l'hypothèse $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$. Remarquant alors que nous n'avons nulle part utilisé la valeur $\lambda = \lambda_1$, entrant dans l'hypothèse concurrente, nous pouvons nous convaincre de la validité de la première partie du théorème 4.1.2. Le critère construit est ainsi uniformément le plus puissant parmi les critères non randomisés de niveau de signification non supérieur à α. La fonction de puissance de ce critère est donnée par la formule

$$W(\lambda) = \begin{cases} 1 - L_{r-1}\left(\Delta_{1-\alpha}(r-1)\frac{\lambda}{\lambda_0}\right), & \text{si } NT \geqslant \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}, \\ 1 - L_c(N\lambda T). & \text{si } NT < \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}. \end{cases} \tag{4.3.17}$$

On peut réaliser les essais suivant un programme simplifié sans modifier la fonction de puissance. En effet, si $NT > S_\alpha = \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}$, les essais sont arrêtés soit à l'instant $t' < t^* = \min(t_r, T)$, quand la valeur du temps global de fonctionnement est égale à S_α, si $d(t') < r$, soit à l'instant t_r, si $S_V(t_r) < S_\alpha$. Dans ce cas on utilise au lieu du plan $[N, V, (r, T)]$ le plan $[N, V, (r, HS_\alpha)]$, c'est-à-dire le plan pour lequel les observations sont réalisées soit jusqu'à l'instant t_r, soit jusqu'à l'instant $t' < t_r$ si le temps global de fonctionnement $S_V(t') = S_\alpha$. Dans le cas où $NT < S_\alpha$, on utilise au lieu du plan $[N, V, (r, T)]$ le plan $[N, V, (c, T)]$, où c est le plus petit des nombres entiers c tels que $N\lambda_0 T \leqslant \Delta_{1-\alpha}(c)$.

Plan du type $[N, V, (r, HS_0)]$. Comme nous l'avons indiqué, en certains cas le plan du type $[N, V, (r, T)]$ se ramène à un tel plan. Il convient toutefois de noter que de son côté le plan $[N, V, (r, HS_0)]$ est équivalent au plan $[N, V, (r, \frac{S_0}{N})]$, car l'instant $t' < t_r$ d'expiration du temps global de fonctionnement $S_V(t') = Nt' = S_0'$ donne l'instant de l'arrêt des essais $t' = T = \frac{S_0}{N}$.

Plan de type B. **Plan** $[N, B, T]$. Comme il découle de (4.3.4), les statistiques exhaustives $d(T)$ et $S_B(T)$ sont toutes les deux non triviales. La variable $d(T)$ suit une distribution binomiale

$$\mathbf{P}\{d(t)=d \mid \lambda\}=C_N^d(1-e^{-\lambda T})^d e^{-\lambda T(N-d)}. \quad (4.3.18)$$

Sous la condition que $d(T)=d>0$, $S_B(T)=\sum_{k=1}^{d} t_k+(N-d)T$, où $\zeta_d=\sum_{k=1}^{d} t_k$ est la somme de d valeurs des variables aléatoires indépendantes dont les fonctions de répartition ont pour densités $p(t)=\frac{\lambda e^{-\lambda T}}{1-e^{-\lambda T}}$ pour les valeurs $0<t<T$ et $p(t)=0$, quand $t>T$ ou $t<0$. La densité de probabilité $p(t \mid \lambda, d)$ de la fonction de répartition $S_B(t)$, sous la condition $d(T)=r$, peut être aisément trouvée en utilisant la transformation inverse de Fourier de la fonction caractéristique

$$\psi(z)=\mathbf{M}\exp(i\zeta_\alpha z)= \\ =\{\lambda[e^{(iz-\lambda)T}-1]\times \\ \times(iz-\lambda)^{-1}(1-e^{-\lambda T})^{-1}\}^r.$$

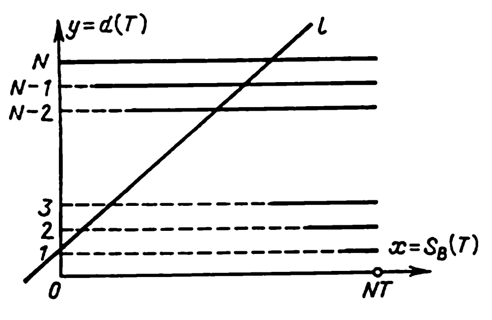


Fig. 4.3.2

Si l'on porte sur l'axe Ox les valeurs de $S_B(t)$ et sur l'axe Oy les valeurs de $d(T)$, alors à l'instant T les valeurs des statistiques exhaustives tomberont dans les intervalles des points (x, y), $x=0, \ldots, N$; $(N-x)T<y<NT$. Le domaine critique se compose des points vérifiant l'inégalité (4.3.6), c'est-à-dire situés plus haut que la droite l (fig. 4.3.2), donnée par l'équation

$$\left(\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)d(T)-(\lambda_1-\lambda_0)S_B(T)=k. \quad (4.3.19)$$

Soit $p(s \mid \lambda, d)$ la densité de probabilité conditionnelle du temps global de fonctionnement $S_B(t)$, quand $d(T)=d$; la constante k est alors trouvée de la condition

$$\sum_{d=1}^{N}\left[\int_{(N-d)T}^{R(d,k)} p(s \mid d, \lambda_0)\,ds\right]\cdot C_N^d[1-e^{-\lambda_0 T}]^d e^{-\lambda_0 T(N-d)}=\alpha, \quad (4.3.20)$$

où la limite $R(d, k)$ est déterminée comme il découle de (4.3.19) par la relation

$$R(d,k)=\max\left\{(N-d)T, \left[\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)d-k\right](\lambda_1-\lambda_0)^{-1}\right\}. \quad (4.3.21)$$

Le critère de niveau de signification α ainsi construit consiste en ce qu'à l'instant $t=T$ les essais sont arrêtés. Si

$$\left[\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\right] d(T)-(\lambda_1-\lambda_0) S_B(T)>k_\alpha, \qquad (4.3.22)$$

alors on rejette l'hypothèse $H_0=\{\lambda\leqslant\lambda_0\}$ et l'on accepte l'hypothèse concurrente. Dans le cas contraire on vérifie l'hypothèse $H_0=$ $=\{\lambda\leqslant\lambda_0\}$. Ce critère possède la plus grande puissance au point $\lambda=\lambda_1$, toutefois il n'est pas uniformément le plus puissant. La fonction de puissance de ce critère est déterminée par la formule

$$W(\lambda)=\sum_{d=1}^{N}\int_{(N-d)T}^{R(d,\,k_\alpha)} p(s\mid d,\lambda)\,ds\, C_N^d\,[1-e^{-\lambda T}]^d\, e^{-\lambda T(N-d)}. \quad (4.3.23)$$

On voit des formules (4.3.20) à (4.3.23) que l'utilisation de ce critère implique que l'on dispose de tables spéciales, qui ne sont pas élaborées à l'heure actuelle *. On peut proposer un critère simplifié (et notoirement plus faible que celui que nous venons de décrire) basé uniquement sur les valeurs de la statistique $d(T)$. On recommande ici de choisir le plus petit entier c de manière que

$$\sum_{d=c+1}^{N} C_N^d\,(1-e^{-\lambda_0 T})^d\, e^{-\lambda_0 T(N-d)}\leqslant\alpha.$$

L'hypothèse $H_0=\{\lambda\leqslant\lambda_0\}$ est rejetée en faveur de l'hypothèse concurrente, si $d(T)>c$. Si $d(T)\leqslant c$, l'hypothèse H_0 est acceptée.

Notons que sans modifier la fonction de puissance donnée par la formule (4.3.23), on peut réaliser les essais suivant un programme abrégé. L'instant de l'arrêt des essais t^* correspond à l'instant quand il devient évident que pour $t=T$ l'inégalité (4.3.22) ou l'inégalité inverse sera vérifiée. Dans le cas général, t^* dépend de la position de la droite l, et pour simplifier notre exposé nous omettrons la description des règles permettant de réduire la durée des essais sans modifier la fonction de puissance donnée par l'équation (4.3.23).

Plan du type $[N,B,r]$. Ici $t^*=t_r$, $d(t^*)=r$, autrement dit, la statistique est triviale, et $S_B(t_r)=\sum_{d=0}^{r} t_d+(N-d)\,t_r$ possède une fonction de répartition pour laquelle

$$\mathrm{P}\{S_B(t_r)<S\mid\lambda\}=\int_0^{\lambda S}\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}e^{-t}\,dt. \qquad (4.3.24)$$

* Comme l'ont montré les calculs numériques réalisés par Y. Béliaev, E. Tchépourine et T. Toporichtchéva, pour de *faibles* rapports $d(T)/N$ le gain obtenu en utilisant le couple de statistiques $\{d(T),\ S_B(T)\}$ est faible. Dans ce cas on peut obtenir de bons résultats en utilisant des critères randomisés analogues à (4.3.7), mais avec un choix aléatoire de c.

Le domaine critique est de la forme

$$S_B(t_r) < S_\alpha,$$

où conformément à (4.3.24) et (4.3.8) la valeur S_α est trouvée en tant que solution de l'équation

$$\int_0^{\lambda_0 S_\alpha} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-t}\, dt = 1 - L_{r-1}(\lambda_0 S_\alpha) = \alpha, \qquad (4.3.25)$$

autrement dit, $S_\alpha = \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}$. Ainsi, si $S_B(t_r) < \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}$, alors on rejette l'hypothèse $H_1 = \{\lambda_1 \leqslant \lambda_0\}$, si, par contre, $S_\alpha \geqslant \geqslant \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}$, alors on adopte l'hypothèse $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$. C'est un critère uniformément le plus puissant avec un niveau de signification α. La fonction de puissance est égale à

$$W(\lambda) = 1 - L_{r-1}\left(\Delta_{1-\alpha}(r-1)\frac{\lambda}{\lambda_0}\right). \qquad (4.3.26)$$

Au cours des essais suivant un programme abrégé on détermine t^* comme l'instant, où soit le temps global de fonctionnement atteint le niveau S_α et $t_r > t^*$, soit $t^* = t_r$ et $S_B(t_r) < S_\alpha$. Dans le premier cas on rejette l'hypothèse $H_1 = \{\lambda > \lambda_0\}$, dans le second cas on rejette l'hypothèse $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$. Notons qu'en cas d'une telle réduction, les essais sont réalisés conformément au plan $[N, V, (r, HS_\alpha)]$.

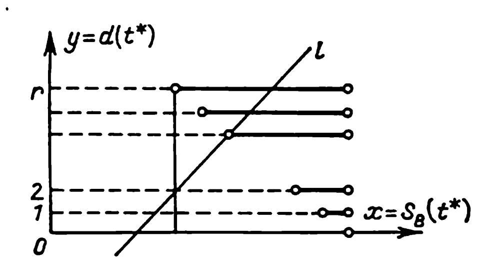


Fig. 4.3.3

Plan du type $[N, B, (r, T)]$. La construction du critère est analogue à celle que l'on utilisait dans le cas du plan $[N, B, T]$. L'instant de l'arrêt des essais est $t^* = \min(t_r, T)$, c'est pourquoi les valeurs possibles de $d(t^*)$, $S(t^*)$ coïncident avec les intervalles contenant les points de la forme (d, y), où $d = 0, \ldots, r$, $(N - d)T \leqslant \leqslant y \leqslant NT$. Notons que $\mathbf{P}\{d(t^*) = k \mid \lambda\} = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$, où $1 - p = e^{-\lambda T}$ et $k < r$, $\mathbf{P}\{d(t^*) = r \mid \lambda\} = \sum_{k=r}^{N} C_N^k p^k (1 - - p)^{N-k}$. Soit $p_B(s \mid d, \lambda)$ la densité de probabilité conditionnelle de $S_B(T^*)$ sous la condition $d(t^*) = d$. Le domaine critique se compose des points situés au-dessus de la droite l (fig. 4.3.3).

$$\left(\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) x - (\lambda_1 - \lambda_0)\, y = k.$$

La constante $k = k_\alpha$ est choisie de manière que pour $\lambda = \lambda_0$ la probabilité pour que les valeurs de $d(t^*), S_B(t^*)$ tombent plus haut que la droite l soit égale à α. Exprimant cette probabilité à l'aide des densités de probabilité conditionnelles $p_B(s \mid r, \lambda)$ et l'égalant à α, nous obtenons l'équation transcendante

$$\sum_{d=1}^{r} \int_{(N-d)T}^{R(k_\alpha,\, \alpha)} p_B(s \mid \lambda_0,\, d)\, ds\, \mathbf{P}\{d(t^*) = d\} = \alpha, \tag{4.3.27}$$

où

$$R(k_\alpha,\, \alpha) = \max\left[(N-\alpha)T,\ \left(\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0} - k_\alpha\right)(\lambda_1 - \lambda_0)^{-1}\right].$$

Ainsi, si la constante k_α est trouvée, on rejette l'hypothèse $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$ quand l'inégalité

$$\left(\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) d(t^*) - (\lambda_1 - \lambda_0)\, S_B(t^*) > k \tag{4.3.28}$$

est vérifiée. Si c'est l'inégalité inverse de (4.3.28) qui est vérifiée, alors on accepte l'hypothèse $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$. De même que le critère élaboré pour le plan $[N,\ B,\ T]$, le critère ainsi construit n'est pas uniformément le plus puissant. Il n'assure la plus petite erreur de seconde espèce qu'au point $\lambda = \lambda_1$. La fonction de puissance pour un tel critère est donnée par la formule

$$W(\lambda) = \sum_{d=1}^{r} \int_{(N-\alpha)T}^{R(\alpha,\, k_\alpha)} p_B(s \mid d,\, \lambda)\, dr \cdot \mathbf{P}\{d(t^*) = d \mid \lambda\}. \tag{4.3.29}$$

De même que dans le cas du plan $[N,\ B,\ T]$, on peut, sans modifier la fonction de puissance, réaliser les essais suivant un programme réduit, en les arrêtant à un instant tel que, quel que soit le déroulement ultérieur des essais, le signe de l'inégalité (4.3.28) ou de l'inégalité inverse ne puisse être modifié.

Plan du type $[N,\ B,\ (r,\ HS_0)]$. Pour les plans du type $[N,\ B,\ (r,\ HS_0)]$ l'instant de l'arrêt t^* coïncide soit avec l'instant t_r, soit avec l'instant, où pour la première fois la valeur du temps global de fonctionnement devient égale à un nombre donné S_0. Un cas particulier des plans de ce genre est le plan $[N,\ B,\ (N,\ HS_0)]$, correspondant à la valeur $r = N$. Quand on utilise le plan $[N,\ B,\ (N,\ HS_0)]$, l'instant t^* de l'arrêt des essais coïncide soit avec l'instant t_N de la panne du dernier des N éléments soumis à l'essai, soit avec l'instant, où pour la première fois la valeur du temps global de fonctionnement atteint le niveau donné S_0. Nous avons montré au § 3.3 du chapitre précédent que si l'on prend en qualité de paramètre temporel la valeur du temps global de fonctionnement, alors les « instants » des pannes, rapportés dans un tel « temps » et égaux

à $S_i = S_B(t_i)$, forment un flux de pannes de Poisson d'intensité λ. Nous supposons comme partout au § 4.3 que la probabilité du fonctionnement sans défaillance de chaque élément soumis à l'essai est égale à $e^{-\lambda t}$. Ainsi, le plan $[N, B, (r, HS_0)]$ est équivalent au plan $[N, V, (r, T)]$, où l'on doit considérer en qualité de paramètre temporel la valeur du temps global de fonctionnement et respectivement $T = \frac{S_0}{N}$. Nous obtenons ainsi, en reformulant le critère correspondant au plan $[N, V, (r, T)]$, un critère de la classe des critères non randomisés avec un seuil de signification non supérieur à α pour vérifier les hypothèses $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$ et $H_1 = \{\lambda > \lambda_0\}$. Ce critère est donné par le système suivant de règles.

Si $S_\alpha = \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0} < S_0$, nous poursuivons les essais jusqu'à l'instant $t^* = \min(t_r, t_0)$, où t_0 se trouve de la condition que la valeur du temps global de fonctionnement $S_B(t_0) = S_0$. Dans ce cas, si $t^* = t_r$ et $S_B(t_r) < S_\alpha$, l'hypothèse $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$ est rejetée. Dans les cas où $t^* = t_0$, l'hypothèse $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$ est acceptée. Il peut arriver que $S_\alpha = \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0} > S_0$. Dans ce cas il faut trouver le plus petit entier c, $(c < r)$ tel que $\lambda_0 S_0 = \Delta_{1-\alpha}(c)$. L'hypothèse $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$ est acceptée quand $t_r > t_0$ et $d(t_0) \leqslant c$. S'il s'avère que $t_0 < t_r$ et $d(t_0) > c$ ou $t_r < t_0$, alors l'hypothèse $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$ est rejetée.

La fonction de puissance de ce critère est donnée par la relation

$$W(\lambda) = \begin{cases} 1 - L_{r-1}\left[\frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)\lambda}{\lambda_0}\right], & S_0 \geqslant \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}, \\ 1 - L_c(S_0), & S_0 < \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}. \end{cases} \tag{4.3.30}$$

Considérons en conclusion les règles de réunion des résultats des essais de fiabilité obtenus pour une *planification multitype*. Il peut arriver que nous disposions de données sur les essais de fiabilité, réalisés dans diverses organisations suivant divers plans. Un cas typique de ce genre est fourni par les essais des éléments ou de systèmes coûteux. Le problème se pose de construire un critère avec un niveau donné de signification pour distinguer les hypothèses $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$ et $H_1 = \{\lambda > \lambda_0\}$ sur le paramètre déterminant la fiabilité de l'élément. Soit $X_i = \{x_i\}$ l'espace des résultats des essais, correspondant à l'utilisation d'un plan du type Π_i (par exemple l'un de ceux que nous avons considérés plus haut), $i = 1, \ldots, m$; $p_i(x \mid \lambda)$ est la densité de probabilités du résultat $x_i \in X_i$. Il est naturel de supposer que les résultats des essais $(x_1, \ldots, x_m)$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Dans cette hypothèse tout l'ensemble des essais $x = (x_1, \ldots, x_m)$ peut être considéré comme une variable aléatoire adoptant des valeurs dans l'espace

$X = X_1 \times \ldots \times X_m$, dont la densité de probabilité est $p(x \mid \lambda) = \prod_{i=1}^{m} p_i(x_i \mid \lambda)$. Nous pouvons maintenant utiliser la technique standard pour dégager les statistiques exhaustives et appliquer le critère du rapport de vraisemblance. Nous nous bornerons à l'analyse de deux exemples pour illustrer notre affirmation.

Supposons que dans l'établissement « i » on a soumis à l'essai N_i éléments, $i = 1, \ldots, m$. Les essais ont été réalisés d'après le plan $[N, V, T_i]$. On demande de construire un critère avec un seuil de signification non supérieur à α distinguant les hypothèses $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$ et $H_1 = \{\lambda > \lambda_0\}$. Nous obtenons de la formule (4.3.3) que la densité de probabilité $p(x \mid \lambda)$ de réunion de tous les résultats des essais est de la forme

$$p(x \mid \lambda) = \prod_{i=1}^{m} N_i^{d_i(T_i)} \lambda^{\sum_{i=1}^{m} d_i(T_i)} e^{-\lambda \sum_{i=1}^{m} N_i T_i}. \tag{4.3.31}$$

Il découle de la formule (4.3.31) que $D = \sum_{i=1}^{m} d_i(T_i)$ est une statistique exhaustive. Comme par hypothèse les $d_i(T_i)$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant une distribution de Poisson de paramètres $\lambda N_i T_i$, alors D suit également une distribution de Poisson de paramètre $\Lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda N_i T_i$. Conformément à (4.3.6) l'ensemble des domaines critiques est de la forme $(D > k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ On choisit en qualité de k le plus petit nombre entier c, pour lequel

$$\mathbf{P}\{D > c \mid \lambda_0\} = 1 - L_c\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_0 N_i T_i\Big) \leqslant \alpha. \tag{4.3.32}$$

Utilisant les notations (4.3.8) on peut écrire (4.3.32) sous la forme de l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_0 N_i T_i \leqslant \Delta_{1-\alpha} c. \tag{4.3.33}$$

Le critère est ainsi décrit par le système suivant de règles. L'hypothèse $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$ est rejetée, quand le nombre global de pannes D que l'on a observé dans tous les m établissements est supérieur au nombre c trouvé de la condition (4.3.33). Si, par contre, $D = c$, l'hypothèse $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$ est acceptée. Ce critère est uniformément le plus puissant dans la classe des critères non randomisés de seuil de signification non supérieur à α.

En qualité de dernier exemple considérons le cas de deux séries d'essais. Dans la première série on utilisait le plan $[N_1, B, r_1]$,

dans la seconde le plan $[N_2, B, T_2]$. La densité conjointe de probabilité des deux résultats des essais est de la forme

$$p(x \mid \lambda) = (N_1)_{r_1} (N_2)_{d_2(T_2)} \lambda^{r_1 + d_2(T_2)} \times e^{-\lambda [S_B^{(1)}(t_{r_1}) + S_B^{(2)}(T_2)]}, \quad (4.3.34)$$

où $(N)_m = N(N-1) \ldots (N-m+1)$.

Il découle de la formule (4.3.34) que pour $\lambda = \lambda_0$ la statistique exhaustive sera le couple $(d(T_2), S_B^{(1)}(t_{r_1}) + S_B^{(2)}(T_2))$, où $d(T_2)$ est le nombre de pannes dans la seconde série d'essais et $S_B^{(i)}(T_2)$ la valeur du temps global de fonctionnement à l'instant t dans la i-ième série d'essais. Prenant le logarithme du rapport de vraisemblance $\frac{p(x \mid \lambda_1)}{p(x \mid \lambda_0)}$, où $\lambda_1 > \lambda_0$, nous obtenons que le domaine critique est de la forme

$$\left(\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) d_2(T_2) - (\lambda_1 - \lambda_0) [S_B^{(1)}(t_r) + S_B^{(2)}(T_2)] > k_\alpha. \quad (4.3.35)$$

La valeur k_α est trouvée de la condition que pour $\lambda = \lambda_0$ la probabilité qu'a l'inégalité (4.3.35) d'être vérifiée doit être égale à α. Le critère construit consiste en ce que l'hypothèse $H_0 = \{\lambda \leqslant \lambda_0\}$ est rejetée, quand l'inégalité (4.3.35) est vérifiée, et acceptée, quand l'inégalité inverse de (4.3.35) est vérifiée. Ce critère donne une valeur minimale pour l'erreur de seconde espèce pour $\lambda = \lambda_1$. Toutefois il n'est pas uniformément le plus puissant.

§ 4.4. Critère progressif pour vérifier l'hypothèse sur la valeur du paramètre λ de la distribution exponentielle *

Dans les paragraphes précédents nous avons considéré des critères correspondant au cas, où les essais étaient effectués d'après des plans concrets des types B et V. Une autre approche pour la construction des critères, basée sur la notion de *fonction de risque*, est également possible. Malheureusement, dans la plupart des cas les critères construits ne présentent qu'une valeur pratique très relative. La cause en est que la construction de la fonction de risque exige la donnée des valeurs numériques des probabilités a priori et de la valeur des pertes qu'entraîne une décision erronée. La forme du critère dépend notablement de ces paramètres dont les valeurs ne peuvent être estimées qu'avec un degré élevé d'incertitude. Bien que la subjectivité du choix des paramètres influe notablement sur la forme du

* Le matériel exposé dans ce paragraphe s'écarte quelque peu du cadre de ce livre. Nous omettons les détails des démonstrations, de sorte que notre exposé présente un caractère heuristique. Dans un autre ouvrage que nous avons projeté pour compléter celui-ci, nous donnerons un exposé systématique des applications de la théorie des processus aléatoires dirigés aux problèmes de la théorie de la fiabilité.

critère obtenu et abaisse sa valeur pratique, la description de la classe des critères optimaux est utile à de nombreux égards. En certains cas les critères ainsi obtenus possèdent des propriétés très précieuses. L'un des aspects les plus attirants de cette théorie est le critère progressif du rapport de vraisemblance de Wald [2], [3]. Dans le présent paragraphe nous exposerons ce critère sur l'exemple de la vérification de l'hypothèse sur la valeur de l'intensité du flux de Poisson.

Considérons le problème de la construction du critère de vérification de deux hypothèses simples sur la valeur du paramètre λ du flux de pannes. Supposons que l'on ait soumis à l'essai N éléments, pour lesquels la probabilité de fonctionnement sans défaillance de chaque élément au cours du temps t est égale à $R(t) = e^{-\lambda t}$. L'hypothèse initiale H_0 consiste en ce que $\lambda = \lambda_0$ et l'hypothèse concurrente $H_1 = \{\lambda = \lambda_1\}$, $\lambda_1 > \lambda_0$. Si les essais sont conduits avec remplacement des éléments tombés en panne (plans du type V), alors le flux aléatoire des instants des pannes est poissonien d'intensité égale à $N\lambda_i$ (cf. § 3.2), quand l'hypothèse H_i est vraie. Si le remplacement des éléments tombés en panne n'est pas effectué (plans du type B), alors l'intensité des pannes varie (cf. § 3.2). Supposons que deux nombres soient donnés avant les essais: θ_0 la probabilité pour que l'hypothèse H_0 soit vraie et θ_1 la probabilité pour que l'hypothèse H_1 soit vraie; $\theta_0 + \theta_1 = 1$. Ces probabilités sont dites *probabilités a priori*. Par *critère* nous entendrons une règle d'après laquelle on détermine l'instant de l'arrêt des essais et où l'on accepte l'une des hypothèses H_i. Supposons que la probabilité d'adopter à tort l'hypothèse H_i, quand c'est l'hypothèse H_j qui est vraie, est égale à α_j. Désignons par W_j la valeur de la perte subie du fait que nous acceptons l'hypothèse H_i, alors que c'est H_{1-i} qui est vraie. Convenons de désigner par η^t la réalisation du flux aléatoire de pannes dans l'intervalle de 0 à t. Si $t_1, \ldots, t_{d(t)}$ sont les instants des pannes, alors $\eta^t = (t_1, \ldots, t_{d(t)}, t)$. Pour la commodité des notations nous noterons chaque critère et la caractéristique qui lui correspond par une même lettre δ. Par exemple, l'instant t^* de l'arrêt des essais correspondant au critère δ sera désigné par t_δ. Comme nous l'avons déjà montré plus haut, la densité de probabilité de la réalisation η^t est donnée par la formule

$$p_t(\eta^t \mid \lambda) = (N\lambda)^{d(t)} e^{-\lambda S_V(t)} \tag{4.4.1}$$

pour les plans du type V et

$$p_t(\eta^t \mid \lambda) = (N)_r \lambda^{d(t)} e^{-\lambda S_B(t)} \tag{4.4.2}$$

pour les plans du type B. Ici $S_V(t)$ et $S_B(t)$ sont les valeurs des temps globaux de fonctionnement

$$S_V(t) = Nt, \quad S_B(t) = [N - d(t)]\, t + \sum_{i=1}^{d(t)} t_i. \tag{4.4.3}$$

où $t_i < t$ sont les instants des pannes.

La conduite des essais entraîne des dépenses déterminées. C'est pourquoi nous supposerons que dans l'intervalle de temps $(t, t + \Delta t)$ les dépenses sont égales à $c(\eta^t)\,\Delta t$. Ainsi, les dépenses au cours des essais jusqu'à l'instant de l'arrêt des essais sont égales à $\int_0^{t_\delta} c(\eta^s)\,ds$. Il est souvent rationnel d'estimer que $c(\eta^t) = c$, $N > 0$. Toutefois, quand on utilise des plans du type B, il peut se produire des cas, où $c(\eta^t) = c\,[N - d(t)]$. Les dépenses moyennes $r(\theta_0, \delta)$, liées à l'utilisation du critère δ, se composent des pertes moyennes dues aux décisions erronées et des dépenses liées à la réalisation des essais. Ecrivant en détail nous obenons

$$r(\theta_0, \delta) = \theta_0\alpha_0 W_0 + \theta_1\alpha_1 W_1 + \\ + \theta_0 \mathbf{M}_0\left[\int_0^{t_\delta} c(\eta^s)\,ds\right] + \theta_1 \mathbf{M}_1\left[\int_0^{t_\delta} c(\eta^s)\,ds\right]. \quad (4.4.4)$$

$\mathbf{M}_i$ singnifie que l'espérance mathématique correspond à l'hypothèse H_i. Notre problème consiste maintenant à construire un critère δ pour lequel avec des valeurs données des probalilités a priori θ_i, des valeurs des pertes W_i et du coût $c(\eta^t)$, la valeur de la fonction de risque est minimale. Le critère minimisant la fonction de risque est appelé *bayesien.*

Plan du type V. Supposons que $c(\eta^t) = c > 0$. Nous obtenons de (4.4.4)

$$r(\theta_0, \delta) = \theta_0\,[\alpha_0 W_0 + c\mathbf{M}_0 t_\delta] + [1 - \theta_0]\,[\alpha_1 W_1 + c\mathbf{M}_1 t_\delta]. \quad (4.4.5)$$

Utilisant (4.4.5), on peut aisément obtenir que pour les valeurs $\theta_0 = \lambda\theta_0^{(1)} + (1-\lambda)\,\theta_0^{(2)}$, où $0 < \lambda < 1$, $0 < \theta^{(i)} < 1$, on a la relation

$$r(\lambda\theta_0^{(1)} + (1-\lambda)\,\theta_0^{(2)}, \delta) = \lambda r(\theta_0^{(1)}, \delta) + (1-\lambda)\,r(\theta_0^{(2)}, \delta). \quad (4.4.6)$$

Nous utiliserons plus loin l'égalité (4.4.6). Soit θ_i^t la probabilité a posteriori qu'a l'hypothèse H_0 d'être vraie, si l'on observe la réalisation η^t du flux de pannes. Nous avons d'après la formule de Bayes

$$\theta_i^t = \frac{\theta_i p_t(\eta^t \mid \lambda_i)}{\theta_0 p_t(\eta^t \mid \lambda_0) + \theta_1 p_t(\eta^t \mid \lambda_1)}. \quad (4.4.7)$$

Nous ne considérerons que les critères qui sont des cas limites des critères du type discret. V. Mikhalévitch [12] a appelé *réguliers* de tels critères. Les critères du type discret sont caractérisés par le fait que pour eux la décision d'arrêter ou de poursuivre les essais n'est prise qu'aux instants multiples de Δt. Le cas du temps continu s'obtient par un passage à la limite, quand $\Delta t \downarrow 0$. Le flux aléatoire de pannes η^t est poissonien, de sorte que le nombre de pannes se produisant dans l'intervalle $(t, t + \Delta t)$ ne dépend pas du fait à quels instants et en quelle quantité on observe les pannes dans l'in-

tervalle (0, t). Il en découle que le nombre de pannes $d(s)$ se produisant au cours du temps s, $0 \leqslant s \leqslant t$, est une réalisation d'un processus de Markov à accroissements indépendants. Il découle de la théorie générale des processus dirigés (cf. [3], [13]) que la *règle* (*critère*) *optimale de décision minimisant la fonction de risque* (4.4.5) *ne dépend que des valeurs de la probabilité a posteriori* θ_0^t. Les valeurs de θ_0^t données par la formule (4.4.7) constituent un processus de Markov. Cela découle du fait que la probabilité θ_0^t peut être exprimée d'une manière univoque par le rapport de vraisemblance $p_t(\eta^t \mid \lambda_1)/p_t(\eta^t \mid \lambda_0)$. Nous verrons plus bas que le rapport de vraisemblance ou, ce qui revient au même, son logarithme est un processus de Markov.

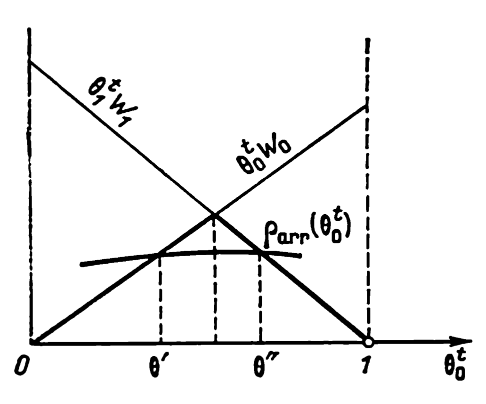


Fig. 4.4.1

Comme à chaque instant de temps t on adopte l'une des deux décisions possibles sur l'*arrêt* des essais et l'acceptation de l'une des hypothèses H_i, ou la *poursuite* des essais, il est utile de considérer deux fonctions de risque liées à ces décisions. Soit $\rho_{arr}(\theta_0^t)$ le *risque minimal associé à la décision de l'arrêt des essais* à l'instant t, quand la valeur de la probabilité a posteriori est égale à θ_0^t, $\theta_1^t = 1 - \theta_0^t$. Si l'on considère que l'hypothèse H_i est vraie, cette décision est alors erronée avec une probabilité θ_i^t et la valeur moyenne des pertes est égale à $\theta_i^t W_i$.

Sur la figure 4.4.1 on a porté sur l'axe des abscisses les valeurs de θ_0^t et sur l'axe des ordonnées les valeurs des pertes. La perte minimale dans les conditions de l'arrêt du processus à l'instant t, est donnée comme on peut le voir sur la figure 4.4.1 par la formule

$$\rho_{arr}(\theta_0^t) = \begin{cases} \theta_0^t W_0, & \theta_0^t < \dfrac{W_1}{W_0+W_1}, \\ \theta_1^t W_1, & \theta_0^t > \dfrac{W_1}{W_0+W_1}. \end{cases} \tag{4.4.8}$$

Ainsi, pour que la perte soit minimale à l'instant de l'arrêt t, il faut pour les valeurs $\theta_0^t < \frac{W_1}{W_0+W_1}$ accepter l'hypothèse H_1 et pour les valeurs $\theta_0^t > \frac{W_1}{W_0+W_1}$ accepter l'hypothèse H_0.

Soit G la classe des critères pour lesquels avec une probabilité unité (presque sûrement) on adopte la décision de poursuivre les essais

quand l'instant t est atteint. Introduisons la notion de *risque minimal de la poursuite optimale des essais* $\rho_{\text{pours}}(\theta_0^t)$, en le définissant par la formule (cf. [1])

$$\rho_{\text{pours}}(\theta_0^t) = \inf_{\delta \in G} r(\theta_0^t, \delta). \qquad (4.4.9)$$

Pour le critère optimal minimisant le risque (4.4.5) il est possible de prendre aussi bien la décision d'arrêter que celle de poursuivre les essais. C'est pourquoi la valeur du risque minimal est

$$\rho(\theta_0^t) = \min[\rho_{\text{arr}}(\theta_0^t), \rho_{\text{pours}}(\theta_0^t)]. \qquad (4.4.10)$$

Si l'on connaissait la valeur $\rho_{\text{pours}}(\theta_0^t)$, alors, en tenant compte de (4.4.10), le critère optimal pourrait être décrit par le système suivant de règles. Supposons qu'à l'instant t la valeur de la probabilité a posteriori soit égale à θ_0^t. On doit calculer les valeurs $\rho_{\text{arr}}(\theta_0^t)$ et $\rho_{\text{pours}}(\theta_0^t)$. S'il s'avère que $\rho_{\text{arr}}(\theta_0^t) \leqslant \rho_{\text{pours}}(\theta_0^t)$, il faut prendre la décision d'arrêter les essais. Si, par contre, $\rho_{\text{arr}}(\theta_0^t) > > \rho_{\text{pours}}(\theta_0^t)$, il faut poursuivre les essais. Si à l'instant t_δ de l'arrêt $\theta_0^t < \frac{W_1}{W_0+W_1}$, on accepte l'hypothèse H_1 ; dans le cas contraire on accepte l'hypothèse H_0.

Notons que l'équation (4.4.10) est une équation typique de la programmation dynamique [14].

Nous ne connaissons pas la valeur $\rho_{\text{pours}}(\theta_0^t)$ et il n'est pas facile de la trouver. Efforçons-nous de contourner cette difficulté. Il découle de l'équation (4.4.6) que

$$\inf_{\delta \in G} r(\lambda\theta_0^{t(1)} + (1-\lambda)\theta_0^{t(2)}, \delta) \geqslant$$
$$\geqslant \lambda \inf_{\delta \in G} r(\theta_0^{t(1)}, \delta) + (1-\lambda) \inf_{\delta \in G} r(\theta_0^{t(2)}, \delta). \qquad (4.4.11)$$

Utilisant la notation (4.4.9) on peut écrire (4.4.11) sous la forme

$$\rho_{\text{pours}}(\lambda\theta_0^{t(1)} + (1-\lambda)\theta_0^{t(2)}) \geqslant$$
$$\geqslant \lambda\rho_{\text{pours}}(\theta_0^{t(1)}) + (1-\lambda)\rho_{\text{pours}}(\theta_0^{t(2)}). \qquad (4.4.12)$$

Il découle de (4.4.12) que $\rho_{\text{pours}}(\theta)$ est une fonction convexe de θ. Comme chaque fonction convexe bornée supérieurement est continue, il découle de l'inégalité évidente $\rho_{\text{pours}}(\theta) \geqslant 0$ la continuité de $\rho_{\text{pours}}(\theta)$.

La forme approximative du graphique $\rho_{\text{pours}}(\theta)$ est montrée sur la figure 4.4.1. Supposons qu'il existe un intervalle (θ', θ'') tel que de $\theta \in (\theta', \theta'')$ il découle que $\rho_{\text{pours}}(\theta) < \rho_{\text{arr}}(\theta)$; alors dans ce cas il faut poursuivre les essais tant que $\theta_0^t \in (\theta', \theta'')$. Les essais sont arrêtés à l'instant t_δ, où pour la première fois la valeur θ_0^t sort des limites de l'intervalle (θ', θ''). Si $\theta_0^{t_\delta} \leqslant \theta'$, alors on

accepte l'hypothèse H_0. Si, par contre, $\theta_0^{t_\delta} \geqslant \theta''$, alors on accepte l'hypothèse H_1.

Le calcul des valeurs θ_0^t d'après la formule (4.4.7) est malaisé. C'est pourquoi nous effectuerons quelques transformations. Nous obtenons de la formule (4.4.7) que

$$x(t)=\left[\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right]^{-1}\ln\left[\frac{p_t(\eta^t\mid\lambda_1)}{p_t(\eta^t\mid\lambda_0)}\right]=\left[\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right]^{-1}\ln\left[\frac{\theta_0-\theta_0^t\theta_0}{\theta_0^t\theta_1}\right]. \quad (4.4.13)$$

La formule (4.4.13) donne une application biunivoque faisant correspondre aux points $\theta_0^t \in (0, 1)$ les points $x(t) \in (-\infty, +\infty)$. L'inégalité $\theta_1 < \theta_2$ $\theta_i \in (0,1)$ se transforme alors en inégalité $x_2 < x_1$, où x_i est l'image du point θ_i. Utilisant les formules (4.4.1) et (4.4.3) nous obtenons que le premier membre de (4.4.13) est de la forme

$$x(t)=d(t)-ct, \quad (4.4.14)$$

où

$$c=\frac{N(\lambda_1-\lambda_0)}{\ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)}>0.$$

Soit x_0 l'image de θ' et x_1 l'image de θ'' lors de l'utilisation de la transformation (4.4.13), quand $\theta_0^t \in (\theta', \theta'')$. Le critère optimal minimisant le risque (4.4.5) consiste alors en ce qu'il faut enregistrer le nombre de pannes $d(t)$ se produisant jusqu'à l'instant t inclusivement, puis d'après la formule (4.4.14) trouver la valeur $x(t)$. Les essais sont arrêtés à l'instant t_δ, quand pour la première fois la valeur $x(t)$ sort des limites de l'intervalle (x_0, x_1). Si $x(t_\delta) \leqslant x_0$, il faut accepter l'hypothèse H_0; si, par contre, $x(t_\delta) \geqslant x_1$, il faut accepter l'hypothèse H_1.

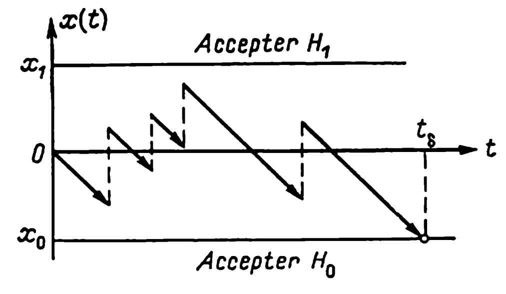


Fig. 4.4.2

Une telle interprétation du critère optimal est une conséquence de la monotonité de l'application, donnée par la formule (4.4.13). Du fait de la monotonité, les événements $\theta' < \theta_0^t < \theta''$, $\theta_0^t \leqslant \theta'$, $\theta_0^t \geqslant \theta''$ sont équivalents aux événements $x_0 < x(t) < x_1$, $x(t) \geqslant x_1$, $x(t) \leqslant x_0$. La forme approximative de la trajectoire $x(t)$ est montrée sur la figure 4.4.2. Les valeurs des points limites x_0 et x_1 sont trouvées de la condition que les valeurs des erreurs de première et de seconde espèces soient respectivement égales à α_0 et α_1. L'erreur de première espèce est égale à la probabilité pour que l'intersection avec le niveau x_1 ait lieu avant celle avec le

niveau x_0, quand $\lambda = \lambda_0$. L'erreur de seconde espèce est égale à la probabilité de l'intersection du niveau x_0 avant le niveau x_1, quand $\lambda = \lambda_1$. Nous notons alors que le caractère optimal du critère n'est influencé ni par les valeurs des pertes W_i, ni par les valeurs des probabilités a priori θ_i. Par conséquent, si δ^* est un critère différant du critère optimal, α_i^* ses erreurs de première et seconde espèces, les mêmes que celles du critère optimal, alors

$$r(\theta_0, \delta) \leqslant r(\theta_0, \delta^*). \qquad (4.4.15)$$

Soit $W_0 = 1 - W$, $W_1 = W$; alors pour tout $\theta_0 \in (0,1)$ nous obtenons de (4.4.5) et (4.4.15)

$$\theta_0 M_0 t_\delta + (1-\theta_0) M_1 t_\delta \leqslant \theta_0 M_0 t_\delta + (1-\theta_0) M_1 t_{\delta^*}. \qquad (4.4.16)$$

Nous obtenons de l'inégalité (4.4.16) que

$$M_0 t_\delta \leqslant M_0 t_{\delta^*}, \quad M_1 t_\delta \leqslant M_1 t_{\delta^*}. \qquad (4.4.17)$$

Ce résultat peut être interprété de la manière suivante.

Propriété du critère optimal. *Le critère optimal, distinguant deux hypothèses simples* $H_0 = [\lambda = \lambda_0]$ et $H_1 = [\lambda = \lambda_1]$ *avec des erreurs données de première espèce* α_0 *et de seconde* α_1, *exige en moyenne une durée moindre de conduite des essais que tout autre critère avec les mêmes erreurs de première et de seconde espèces.*

Il ne faut pas oublier que la durée moyenne minimale des essais ne correspond qu'aux valeurs $\lambda = \lambda_0$ et $\lambda = \lambda_1$. Il existe d'autres critères qui exigent une durée moindre de conduite des essais pour certaines valeurs $\lambda \neq \lambda_i$, $i = 0, 1$.

Considérons maintenant les questions liées au calcul des valeurs x_0 et x_1 telles que les erreurs de première et de seconde espèces sont égales à α_0 et α_1. Soit μ_j^i l'espérance mathématique conditionnelle du rapport de vraisemblance à l'instant, où l'on atteint le niveau x_i, $i = 0, 1$, quand l'hypothèse H_j est vraie. D'après la formule des espérances mathématiques conditionnelles on a

$$\mu_0^i = M_0 \left[\frac{p_t(\eta^{t_\delta} \mid \lambda_1)}{p_t(\eta^{t_\delta} \mid \lambda_0)} \chi_i \right] : P\{\chi_i = 1 \mid \lambda = \lambda_0\}, \qquad (4.4.18)$$

où χ_i sont des variables aléatoires données par les formules

$$\chi_0 = \begin{cases} 1, & x(t_\delta) = x_0, \\ 0, & x(t_\delta) \geqslant x_1, \end{cases} \qquad \chi_1 = \begin{cases} 0, & x(t_\delta) = x_0, \\ 1, & x(t_\delta) \geqslant x_1. \end{cases} \qquad (4.4.19)$$

Remarquant que $M_0 \left[\frac{p_t(\eta^{t_\delta} \mid \lambda_1)}{p_t(\eta^{t_\delta} \mid \lambda_0)} \chi_i \right] = M_1 \chi_i = P\{\chi_i = 1 \mid \lambda = \lambda_1\}$ et tenant compte des relations évidentes

$$P\{\chi_1 = 1 \mid \lambda = \lambda_1\} = 1 - \alpha_1, \quad P\{\chi_1 = 1 \mid \lambda = \lambda_0\} = \alpha_0, \qquad (4.4.20)$$

nous trouvons de (4.4.18), (4.4.19) et (4.4.20) que

$$\mu_0^0 = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_0}; \quad \mu_0^1 = \frac{1-\alpha_1}{\alpha_0}. \tag{4.4.21}$$

Dans les conditions, où l'on décide que l'hypothèse H_i est vraie à l'instant d'arrêt des essais

$$e^{\inf_i [y(t_\delta)]} \leqslant \frac{p_{t_\delta}(\eta^{t_\delta} \mid \lambda_1)}{p_{t_\delta}(\eta^{t_\delta} \mid \lambda_0)} = e^{\left[\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right] x(t_\delta)} \leqslant e^{\sup_i [y(t_\delta)]}, \tag{4.4.22}$$

où $y(t_\delta) = \left[\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right] x(t_\delta)$; $\sup\limits_i$ et $\inf\limits_i$ sont étendus à toutes les valeurs $x(t_\delta)$ à de tels instants d'arrêt des essais, auxquels correspond l'acceptation de l'hypothèse H_i. Les grandeurs figurant aux premier et second membres des inégalités (4.4.22) ne sont plus des variables aléatoires. Utilisant ces inégalités dans la formule (4.4.18) et tenant compte de (4.4.21), nous obtenons les inégalités

$$e^{\inf\limits_{i=0} y(t_\delta)} \leqslant \frac{\alpha_1}{1-\alpha_0} \leqslant e^{\sup\limits_{i=0} y(t_\delta)}, \tag{4.4.23}$$

$$e^{\inf\limits_{i=1} y(t_\delta)} \leqslant \frac{1-\alpha_1}{\alpha_0} \leqslant e^{\sup\limits_{i=1} y(t_\delta)}. \tag{4.4.24}$$

Si à l'instant t_δ on accepte l'hypothèse H_0, alors $x(t_\delta) = x_0$, de sorte que les inégalités (4.4.23) sont équivalentes à l'égalité

$$\frac{\alpha_1}{1-\alpha_0} = e^{\left(\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) x_0}. \tag{4.4.25}$$

Nous trouvons de l'équation (4.4.25) la valeur du niveau d'acceptation de l'hypothèse H_0

$$x_0 = \ln \frac{\alpha_1}{1-\alpha_0} : \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}. \tag{4.4.26}$$

A l'instant $t < t_\delta$ $x(t) < x_1$, par conséquent, à l'instant $t = t_\delta$ $x(t_0) < x_1 + 1$, puisqu'avec une probabilité unité (presque sûrement) les pannes, dans l'hypothèse du caractère exponentiel de la probabilité de fonctionnement sans défaillance, ne peuvent se produire simultanément. Tenant compte de cela, nous trouvons de (4.4.24)

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{x_1} \leqslant \frac{1-\alpha_1}{\alpha_0} \leqslant \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{x_1+1}. \tag{4.4.27}$$

Résolvant les inégalités (4.4.24) par rapport à x_1, nous obtenons les estimations inférieures et supérieures du niveau x_1 d'acceptation de l'hypothèse $H_1 = [\lambda = \lambda_1]$:

$$-\left(\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) + \ln\left(\frac{1-\alpha_1}{\alpha_0}\right) < x_1 < \ln\left(\frac{1-\alpha_1}{\alpha_0}\right). \tag{4.4.28}$$

Si $\frac{1-\alpha_1}{\alpha_0} \gg \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$, alors on peut prendre en qualité de x_1 la valeur $\ln\left(\frac{1-\alpha_1}{\alpha_0}\right)$. Notons que dans ce cas on obtient un critère auquel sont associées des erreurs de première et de seconde espèces inférieures à α_0 et α_1. Dans ce cas toutefois la durée des essais est en moyenne quelque peu accrue. La valeur du niveau x_1 ne peut être obtenue explicitement. Toutefois, en utilisant la technique des équations différentielles et aux différences finies, on peut obtenir des équations transcendantes, dont la solution est x_1.

Nous exposerons maintenant les résultats de [11]; cf. également [15].

Le processus aléatoire $x(t)$ donné par la formule (4.4.14) est markovien. C'est une conséquence simple du fait suivant lequel les pannes, qui peuvent se produire par la suite, ne dépendent pas du déroulement du processus $x(t)$ dans le passé. A l'instant $t = 0$, $x(0) = 0$, toutefois nous considérerons d'abord le cas plus général, quand $x(0) = x$. Soit $P_\lambda(x)$ la probabilité d'accepter l'hypothèse $H_1 = \{\lambda = \lambda_1\}$, quand la valeur du paramètre est égale à λ, $x(0) = x$. En d'autres termes, la probabilité $P_\lambda(x)$ est égale à la probabilité pour que le processus coupe le niveau x_1 avant le niveau x_0. La probabilité de l'erreur de première espèce est $\alpha_0 = P_{\lambda_0}(0)$, et la probabilité de l'erreur de seconde espèce est $\alpha_1 = 1 - P_{\lambda_1}(0)$.

Les conditions aux limites sont de la forme

$$P_\lambda(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant x_0, \\ 1, & x \geqslant x_1. \end{cases} \tag{4.4.29}$$

Tenant compte des variations éventuelles des valeurs du processus $x(t)$ au cours du temps $(0, \Delta t)$, nous avons pour les valeurs x telles que $x_0 < x < x_1$, d'après la formule des probabilités totales,

$$P_\lambda(x) = (1 - N\lambda\,\Delta t)\,P_\lambda(x - c\,\Delta t) + \\ + N\lambda\,\Delta t\,P_\lambda(x + 1 - c\,\Delta t) + o(\Delta t). \tag{4.4.30}$$

Nous obtenons de l'équation (4.4.30), où $|\,o(\Delta t)\,| < \lambda^2 (\Delta t)^2$, $0 < \Delta t < N\lambda^{-1}$, que $P_\lambda(x)$ est une fonction continue de x dans l'intervalle (x_0, x_1). Au point $x = x_1$ cette fonction admet une discontinuité, étant donné que d'après (4.4.29) $P_\lambda(x_1) = 1$ et

$$P_\lambda(x_1 - \varepsilon) \leqslant 1 - \mathrm{P}\left\{d\left(\frac{x_1 - x_0}{c}\right) = 0\right\} = 1 - e^{-N\lambda\frac{x_1 - x_0}{c}}.$$

Tenant compte de cela et écrivant l'équation (4.4.30) sous la forme

$$\frac{P_\lambda(x) - P_\lambda(x - c\,\Delta t)}{\Delta t} = -N\lambda P_\lambda(x - c\,\Delta t) + \\ + N\lambda P_\lambda(x + 1 - c\,\Delta t) + o(1), \tag{4.4.31}$$

nous obtenons que $P_\lambda(x)$ est dérivable dans l'intervalle (x_0, x_1), à l'exception d'un seul point $x = x_1 - 1$ dans le cas, où $x_0 < x_1 - 1$. Nous obtenons de (4.4.31) en passant à la limite quand $\Delta t \to 0$ une équation différentielle et aux différences finies

$$c \frac{dP_\lambda(x)}{dx} + N\lambda P_\lambda(x) = N\lambda P_\lambda(x+1), \tag{4.4.32}$$

où $x_0 < x < x_1$, $x \neq x_1 - 1$. La solution de (4.4.32) est déterminée par intégration par tranches. L'unicité est assurée par la vérification des conditions:

I. $P_\lambda(x)$ est continue pour les valeurs $x < x_1$;
II. $P_\lambda(x_0) = 0$;
III. $P_\lambda(x) = 1, x > x_1$.

Soit $n(x)$ un nombre entier tel que

$$x_1 - x - 1 \leqslant n(x) < x_1 - x.$$

On peut s'assurer par vérification directe que la solution de l'équation (4.4.32), vérifiant la condition rapportée plus haut (4.4.1), est la fonction

$$P_\lambda(x) = 1 + ce^{-\left(\frac{N\lambda}{c}\right)x} \sum_{k=0}^{n(x)} \frac{(-1)^k}{k!} \left[(x_1 - x - k) \frac{N\lambda}{c} e^{-\frac{N\lambda}{c}}\right]^k. \tag{4.4.33}$$

Utilisant la condition II nous obtenons l'expression de la constante c:

$$c = -e^{\frac{N\lambda}{c}x_0} \left\{ \sum_{k=0}^{n(x_0)} \frac{(-1)^k}{k!} \left[(x_1 - x_0 - k) \frac{N\lambda}{c} e^{-\frac{N\lambda}{c}}\right]^k. \tag{4.4.34}$$

Ainsi, compte tenu de (4.4.33) et (4.4.34), $P_\lambda(x) = g\left(x_0, x_1, \frac{N\lambda}{c}, x\right)$, où

$$g\left(x_0, x_1, \frac{N\lambda}{c}, x\right) = 1 - e^{\frac{N\lambda}{c}(x_0 - x)} \times$$
$$\times \frac{\sum_{k=0}^{n(x)} \frac{(-1)^k}{k!} \left[(x_1 - x - k) \frac{N\lambda}{c} e^{-\frac{N\lambda}{c}}\right]^k}{\sum_{k=0}^{n(x_0)} \frac{(-1)^k}{k!} \left[(x_1 - x_0 - k) \frac{N\lambda}{c} e^{-\frac{N\lambda}{c}}\right]^k}. \tag{4.4.35}$$

La valeur de x_0 nous est inconnue; se rappelant la relation entre $P_{\lambda_i}(0)$ et les erreurs de première et de seconde espèces nous obtenons deux équations transcendantes, dont chacune peut être utilisée

pour trouver x_1:

$$\left.\begin{array}{l} g\left(x_0,\ x_1,\ \frac{N\lambda_0}{c},\ 0\right)=\alpha_0, \\ g\left(x_0,\ x_1,\ \frac{N\lambda_1}{c},\ 0\right)=1-\alpha_1. \end{array}\right\} \qquad (4.4.36)$$

Il est utile de noter que $\frac{N\lambda_0}{c}=N\left(\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}-1\right)^{-1}$, $\frac{N\lambda_1}{c}=$ $=N\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^{-1}$, d'où il découle que la solution x_1 des équations (4.4.36) dépend de λ_0, λ_1 uniquement par leur rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$.

Si la valeur du paramètre $\lambda \neq \lambda_i$, $i = 0, 1$, alors la probabilité $L(\lambda)$ d'accepter l'hypothèse H_0, probabilité appelée caractéristique opérationnelle, est donnée par la formule

$$L(\lambda)=1-P_\lambda(0)=1-g\left(x_0,\ x_1,\ \frac{N\lambda}{c},\ 0\right). \qquad (4.4.37)$$

Une autre caractéristique utile du critère optimal est le temps moyen T_λ de la durée des essais, quand la valeur du paramètre est λ. Nous avons montré que pour le critère optimal, pour des valeurs identiques des erreurs de première et de seconde espèces, le temps moyen T_λ de la conduite des essais n'est pas supérieur à la valeur pour tout autre critère pour les valeurs $\lambda = \lambda_0$ et $\lambda = \lambda_1$. Si l'on désigne par $T_\lambda(x)$ le temps moyen de la réalisation des essais sous la condition que $x(0) = x$, on peut établir d'une façon analogue une équation différentielle et aux différences finies que vérifie $T_\lambda(x)$. Cette équation est de la forme

$$c\frac{dT_\lambda(x)}{dx}+N\lambda T_\lambda(x)=1+N\lambda T_\lambda(x+1). \qquad (4.4.38)$$

La solution de l'équation (4.4.38) est donnée par la formule

$$T_\lambda(x)=\frac{n(x)+1}{N\lambda}+c'e^{-\frac{N\lambda}{c}x}\sum_{k=0}^{n(x)}\frac{(-1)^k}{k!}\left[(x_1-x-k)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{N\lambda}{c}e^{-\frac{N\lambda}{c}}\right]^k-\frac{1}{N\lambda}e^{\frac{N\lambda}{c}(x_1-x-1)}\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{n(x)-1}e^{-\frac{N\lambda}{c}k}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}\left[(x_1-x-k-1)\frac{N\lambda}{c}\right]^j. \qquad (4.4.39)$$

Nous trouvons la constante c' de la condition $T_\lambda(x_0) = 0$. La caractéristique T_λ que nous avons introduite plus haut, égale au temps moyen de la durée des essais, peut aisément être exprimée en fonction de $T_\lambda(x)$:

$$T_\lambda=T_\lambda(0). \qquad (4.4.40)$$

Dans l'ouvrage [15] sont rapportées les tables de la fonction $g\left(x_0, x_1, \frac{N\lambda}{c}, 0\right)$ pour diverses valeurs de $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$. On y cite également les valeurs de la fonction $h\left(x_0, x_1, \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)$. La durée moyenne des essais est

$$T_\lambda = \frac{1}{\lambda} h\left(x_0, x_1, \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right). \qquad (4.4.41)$$

Plan du type B. Pour le cas des plans du type B les statistiques exhaustives sont le nombre de pannes $d(t)$ se produisant avant l'instant t et la valeur du temps global de fonctionnement $S_B(t)$, donnée par la formule (4.4.3). La probabilité a posteriori θ_0^t qu'a l'hypothèse $H_0 = [\lambda = \lambda_0]$ d'être vraie est calculée, de même que dans le cas des plans du type V, d'après la formule (4.4.7), où $p_t(\eta^t \mid \lambda)$ est donnée par la formule (4.4.2). Ainsi, θ_0^t dépend des valeurs de $S_B(t)$ et $d(t)$. Notons que θ_0^t n'est pas un processus de Markov, comme cela était pour les plans du type V. Si l'on suppose que le coefficient de coût des dépenses $c(\eta^t) = c(N - d(t))$, alors en vertu de la formule (4.4.4) la valeur moyenne du risque pour le critère δ est égale à

$$r(\theta_0, \delta) = \sum_{i=0}^{1} \theta_i [\alpha_i W_i + cM_i S_B(t_\delta)]. \qquad (4.4.42)$$

Nous avons ici utilisé la relation $S_B(t) = \int_0^t [N - d(s)]\, ds$. Le problème central est la recherche du critère optimal pour lequel la valeur de la fonction de risque admet un minimum. A l'heure actuelle nous ne pouvons pas donner une solution complète de ce problème, mais seulement indiquer les voies de sa résolution. Comme auparavant, il faut adopter à chaque instant t l'une des deux décisions: soit arrêter les essais, soit les poursuivre. Pour prendre la décision optimale on doit connaître de toutes les données obtenues seulement la valeur de $S_B(t)$ et $d(t)$. Introduisons deux fonctions de risque: $\rho_{\text{arr}}(S, d)$, le risque minimal lié à l'arrêt des essais, et $\rho_{\text{pours}}(S, d)$, le risque minimal lié à la poursuite des essais, où $S = S_B(t)$, $d = d(t)$. L'espace de phase des valeurs du processus de Markov $S_B(t)$, $d(t)$ se compose des points (x, y) des rayons du plan, où $x \geqslant 0$, $y = 0, 1, \ldots, N$. Si la valeur d est fixée et si $S_B(t)$ parcourt les valeurs de 0 à $+\infty$, alors la valeur de la probabilité a posteriori θ_0^t croît de la valeur $\dfrac{\theta_0}{\theta_0 + \theta_1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^d}$ jusqu'à l'unité. Le risque minimal lié à l'arrêt des essais est

$$\rho_{\text{arr}}(S, d) = \min [\theta_0^t W_0, \theta_1^t W_1]. \qquad (4.4.43)$$

Soit G la classe des critères δ pour lesquels on adopte la décision de poursuivre les essais quand les valeurs $S_B(t) = S$ et $d(t) = d$ sont atteintes; on a alors

$$\rho_{\text{pours}}(S, d) = \inf_{\delta \in G} r(\theta_0^{\delta}(S, d), d). \tag{4.4.44}$$

Si les valeurs de ces risques sont connues, le risque minimal $\rho(S, d)$ vérifie dans le cas général l'équation

$$\rho(S, d) = \min[\rho_{\text{arr}}(S, d), \rho_{\text{pours}}(S, d)]. \tag{4.4.45}$$

La structure du critère optimal est décrite par le système suivant de règles. Si jusqu'à l'instant t d'apparition de d pannes on prenait

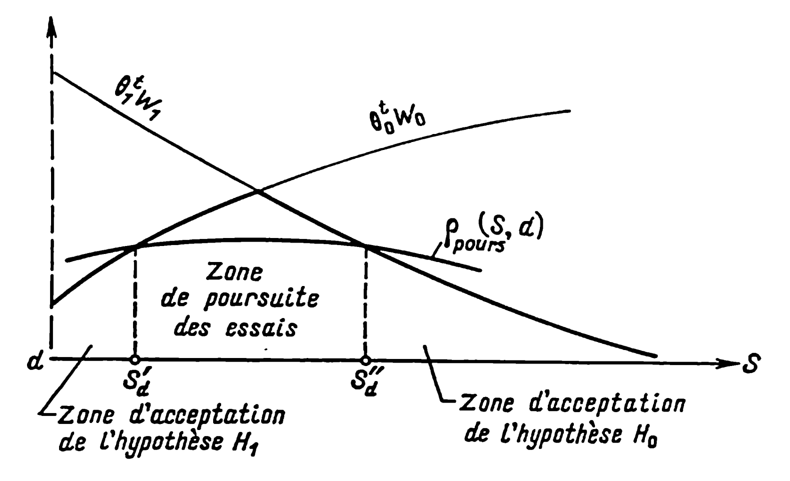


Fig. 4.4.3

la décision de poursuivre les essais, par contre, aux instants $t \geqslant t_d$ on ne décide de poursuivre les essais que dans le cas, où ρ_{pours} $(S_B(t), d) < \rho_{\text{arr}}$ $(S_B(t), d)$. La décision de l'arrêt des essais est prise à l'instant t_d, dès que $\rho_{\text{pours}}(S_B(t_d), d) \geqslant$ $\geqslant \rho_{\text{arr}}(S_B(t), d)$, ou à l'instant t, $t_d < t < t_{d+1}$, si pour la première fois à cet instant ρ_{pours} $(S_B(t), d) \geqslant \rho_{\text{arr}}(S_B(t), d)$. De cette manière, tous les points du rayon (S, d), $S \geqslant 0$ sont divisés en trois zones (fig. 4.4.3). Pour les valeurs $S < S'_d$ on arrête les essais et on accepte l'hypothèse H_1, pour les valeurs S, $S'_d < S < S''_d$ on poursuit les essais et, enfin, pour les valeurs $S > S''_d$ les essais sont également arrêtés et l'on accepte l'hypothèse H_0. Ayant calculé d'après les valeurs α_i, W_i, c, θ_i les fonctions de risque $\rho_{\text{arr}}(S, d)$ et ρ_{pours} (S, d), on peut trouver pour les valeurs $d = 0, 1, \ldots$ $\ldots, N - 1$ les couples de points critiques S'_d, S''_d. Notons qu'à

l'instant t_N de la panne du dernier élément on doit arrêter les essais. Ainsi $S_N = S'_N = S''_N$, autrement dit, le point critique est unique. On trouve S_N de l'équation

$$\theta_0 (S_B (t_N), N) W_0 = \theta_1 (S_B (t_N), N) W_1, \qquad (4.4.46)$$

qui découle des règles déterminant le critère et de l'équation (4.4.43).

Sur la figure 4.4.4 on a signalé les intervalles (S'_d, S''_d) par des traits gras. Tant que la trajectoire $(S_B (t), d (t))$ passe par les points des intervalles (S'_d, S''_d), les essais doivent être poursuivis. Si la trajectoire coupe la frontière à droite, on décide d'arrêter les essais et on accepte l'hypothèse H_0; si la trajectoire coupe la frontière à gauche, on arrête les essais et on accepte l'hypothèse H_1. On peut obtenir les valeurs $\rho_{\text{pours}} (S, d)$ comme la solution d'un système d'équations différentielles. Par exemple, en considérant les variations de S, d au cours du temps $(t, t + \Delta t)$, quand $d = N - 1$, nous obtenons

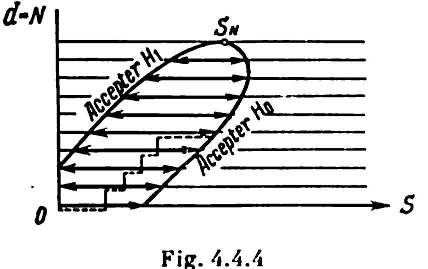


Fig. 4.4.4

$$\rho_{\text{pours}} (S_0 N - 1) = \rho_{\text{pours}} (S + \Delta t, N - 1) (1 - \\ - \lambda \Delta t) + \lambda \Delta t \, \rho_{\text{arr}} (S, N) + o (\Delta t). \qquad (4.4.47)$$

Nous obtenons de (4.4.47) l'équation différentielle

$$\frac{d\rho_{\text{pours}} (S, N-1)}{dS} - \lambda \rho_{\text{pours}} (S, N-1) + \lambda \rho_{\text{arr}} (S, N) = 0.$$

D'une manière analogue nous pouvons déduire d'autres équations.

§ 4.5. Méthodes non paramétriques d'estimation de l'homogénéité du matériel statistique

L'un des problèmes statistiques importants de la théorie de la fiabilité consiste à vérifier l'homogénéité du matériel dont dispose l'expérimentateur (la qualité de la production, l'absence d'influence des dispositifs d'essais sur les résultats des épreuves, la répercution de la modification du processus technologique sur la qualité des articles, etc.). Dans ce cas il arrive souvent que nous ne nous intéressons pas à la distribution des probabilités de l'indice étudié d'homogénéité; le problème consiste seulement *à vérifier l'hypothèse suivant laquelle la distribution reste inchangée*. Nous nous bornerons ici à considérer seulement la position du problème dans certains cas simples pour lesquels on a proposé des solutions satisfaisantes.

Considérons tout d'abord un problème classique de statistique mathématique: on dispose de deux séries de résultats d'observations indépendantes

$$x_1, x_2, \ldots, x_m$$

et

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

La première série d'observations a été effectuée sur la variable aléatoire ayant la fonction de répartition continue $F_1(x)$ et la seconde sur la variable aléatoire ayant la fonction de répartition continue $F_2(x)$. On demande de vérifier si l'on peut estimer que $F_1(x) = F_2(x)$, que les résultats des observations ne contredisent pas cette hypothèse ? C'est ainsi que se pose le problème quand on veut savoir si l'on peut juger que la production de deux usines est de même qualité ? Une position analogue du problème apparaît souvent quand on veut étudier l'influence du changement des équipes sur la qualité de la production et dans de nombreux autres cas.

Un grand nombre de méthodes ont été proposées pour résoudre ce problème, elles sont basées sur divers principes, dont certains seront exposés dans ce paragraphe.

Critère des signes. Ce critère est d'une application très simple, mais il utilise d'une manière très peu économe l'information contenue dans les résultats des observations. Il peut toutefois dans de nombreux cas être très utile pour le traitement préliminaire puisqu'il n'exige pas de calculs tant soit peu compliqués. Lors de l'application du critère des signes on suppose que $F_1(x) = F_2(x)$. On construit les différences

$$z_1 = x_1 - y_1, \quad z_2 = x_2 - y_2, \quad \ldots, \quad z_n = x_n - y_n.$$

En vertu de l'indépendance des variables x_i et y_i chacune de ces différences peut prendre avec une probabilité $\frac{1}{2}$ une valeur positive et avec une probabilité $\frac{1}{2}$ une valeur négative (une fonction de distribution continue ne peut prendre la valeur zéro qu'avec une probabilité égale à zéro), si l'hypothèse $F_1(x) = F_2(x)$ est vraie. Nous nous trouvons ainsi dans le cadre du schéma de Bernoulli. Si notre hypothèse est vraie, le nombre des différences positives s'écartera relativement peu de $\frac{n}{2}$. Ainsi, un nombre élevé de différences positives, de même qu'un nombre élevé de différences négatives, témoigne du fait que l'hypothèse avancée est fausse.

Comme, conformément à la formule de Bernoulli, la probabilité pour que le nombre de différences positives observées soit égal à k est $P_n(k) = C_n^k \frac{1}{2^n}$, nous pouvons élaborer la règle suivante: on se

donne un seuil de signification α (autrement dit, la probabilité de rejeter une hypothèse, quand elle est vraie, est inférieure ou égale à α). Nous rejeterons l'hypothèse $F_1(x) = F_2(x)$ chaque fois, où le nombre de différences positives s'avérera supérieur au nombre r_α, r_α étant le plus petit des nombres vérifiant la relation

$$[C_n^{r_\alpha+1} + C_n^{r_\alpha+2} + \ldots + C_n^n] \left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \alpha.$$

La règle ainsi formulée représente le *critère unilatéral de signes*. Le seuil de signification ne dépasse pas α pour notre choix de r_α.

Il est de même aussi légitime que dans le cas d'un nombre élevé de différences positives de rejeter l'hypothèse à vérifier en présence d'un nombre élevé de différences négatives (c'est-à-dire quand le nombre de différences positives est petit). Si nous adoptons pour le nombre de différences négatives la même limite r_α que pour les différences positives, nous pouvons formuler le *critère bilatéral des signes*: nous rejetons l'hypothèse $F_1(x) = F_2(x)$ chaque fois, où le nombre de différences positives s'avère supérieur à r_α ou inférieur à $n - r_\alpha$. La probabilité de rejeter à tort l'hypothèse $F_1(x) = F_2(x)$ ne dépasse pas alors 2α, puisqu'elle est égale à

$$\{[C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-r_\alpha-1}] + \\ + [C_n^{r_\alpha+1} + C_n^{r_\alpha+2} + \ldots + C_n^n]\} \frac{1}{2^n} = \\ = 2\,[C_n^{r_\alpha+1} + C_n^{r_\alpha+2} + \ldots + C_n^n] \frac{1}{2^n} \leqslant 2\alpha.$$

Pour les valeurs de n comprises entre 5 et 100 on a élaboré des tables des limites du domaine critique dans le cas des seuils de signification égaux à 1 %, 2 %, 5 % pour le critère bilatéral des signes. Ces mêmes tables sont applicables également au critère unilatéral des signes, mais pour les valeurs respectives 0,5 %, 1 % et 2, 5 % du seuil de signification. Quand $n \geqslant 100$, on peut appliquer le théorème intégral de Moivre-Laplace et utiliser l'égalité approchée

$$\frac{1}{2^n}[C_n^{r_\alpha+1} + C_n^{r_\alpha+2} + \ldots + C_n^n] = \\ = \mathrm{P}\{\mu > r_\alpha\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{2r_\alpha - n}{\sqrt{n}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = \alpha,$$

d'où l'on trouve aisément à l'aide de la table de la distribution normale la valeur de r_α pour chaque n. Par exemple, si $n = 225$, il convient de prendre pour le critère unilatéral des signes, quand $\alpha = 0{,}005$; $0{,}01$; $0{,}025$, respectivement les valeurs $r_\alpha = 131$; 129; 127.

Pour illustrer l'application du critère des signes citons un exemple emprunté au livre de I. Dounine-Barkovski et N. Smirnov [28].

Prenons l'exemple rapporté aux pages 268 et 183 d'échantillons de 20 articles fabriqués par une machine-outil et dans lequel on présente les hauteurs des anneaux intérieurs des roulements à billes estampés respectivement les 6 et 12 mars 1951. Les résultats sont réunis dans la table 4.5.1. On demande si l'on peut estimer que la machine ne s'est pas déréglée entre le 6 et le 12 mars.

On voit de la table 18 de l'annexe que l'hypothèse suivant laquelle la hauteur des anneaux n'a pas été modifiée doit être rejetée. La probabilité pour qu'une hypothèse vraie soit rejetée à tort est inférieure à 0,0003.

Table 4.5.1

nos des anneaux dans l'ordre de traitement	1	2	3	4	5	6	7
Le 6 mars	31,44	32,22	31,98	31,88	31,44	31,17	31,68
Le 12 mars	32,17	32,61	32,68	32,29	32,36	32,25	32,28
Signe de la différence	—	—	—	—	—	—	—
nos des anneaux dans l'ordre de traitement	8	9	10	11	12	13	14
Le 6 mars	31,28	31,72	31,58	31,87	32,12	31,04	31,87
Le 12 mars	31,74	32,46	32,48	31,70	32,30	31,73	32,28
Signe de la différence	—	—	—	—	—	—	—
nos des anneaux dans l'ordre de traitement	15	16	17	18	19	20	
Le 6 mars	31,62	31,73	31,48	31,88	31,96	31,49	
Le 12 mars	31,60	32,47	32,74	32,26	32,92	32,63	
Signe de la différence	+	—	—	—	—	—	

Attirons l'attention sur le fait que lors de l'application du critère des signes on doit prendre les résultats des observations non ordonnés en grandeur. C'est pourquoi si nous observons par exemple la durée de vie des articles fabriqués par deux usines et si nous enregistrons successivement les durées de vie des articles au fur et à mesure de leur mise hors service pour le premier lot $t_1, t_2, \ldots, t_n$ et pour le second lot $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, nous ne pouvons pas appliquer le critère des signes à ces deux suites. Un artifice simple permet toutefois d'utiliser le critère des signes dans le cas du plan $[N, B, N]$. A cette fin nous numérotons à l'avance les articles dans un ordre arbitraire avant de les soumettre aux essais, puis nous comparons les résultats des essais en écrivant les deux séries des résultats des essais dans l'ordre de cette numération.

Critère de Wilcoxon. Ce critère d'une application simple, bien qu'asymptotiquement le plus puissant dans le cas de la distribution logistique, fut proposé il y a plus de vingt ans par Wilcoxon pour vérifier l'hypothèse suivant laquelle une variable aléatoire est en moyenne plus grande qu'une autre.

Supposons que les variables aléatoires ξ et η possèdent des fonctions de répartition continues $F_1(x)$ et $F_2(x)$. Nous dirons que la variable aléatoire ξ est plus petite que la variable aléatoire η si pour tous les x on a l'inégalité $F_1(x) > F_2(x)$. Comme $F_2(x)$ croît plus lentement que $F_1(x)$, cela signifie que pour tout x la grandeur η a une plus grande probabilité d'être supérieure à x que ξ. Ce problème présente un intérêt particulier pour la théorie de la fiabilité, ainsi que pour d'autres domaines pratiques.

On dispose de deux suites de résultats d'observations indépendantes

$$x_1, x_2, \ldots, x_m$$

et

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

On demande si l'on peut estimer que $F_1(x) = F_2(x)$?

Mélangeons les deux suites d'observations et disposons-les dans l'ordre de croissance. Nous obtenons alors une suite de nombres décroissants (en tout $m + n$). Si notre hypothèse $F_1(x) = F_2(x)$ est juste, on peut s'attendre à ce que les nombres des deux suites se sont bien mélangés. Pour estimer quantitativement le degré de ce mélange on calcule dans le critère de Wilcoxon le nombre *d'inversions* des termes de la première suite par rapport à la seconde. Si dans la suite commune ordonnée un certain x est précédé par un y, nous dirons qu'à cette valeur de x correspond *une seule inversion*. Si un certain x est précédé par k valeurs de y, à cette valeur de x on associe k *inversions. Le nombre total des inversions est égal à la somme des inversions de tous les x.*

Conformément au critère unilatéral de Wilcoxon l'hypothèse $F_1(x) = F_2(x)$ est rejetée, si le nombre observé d'inversions U dépasse une certaine limite $\overline{U}_\alpha$.

Dans le critère bilatéral de Wilcoxon l'hypothèse $F_1(x) = F_2(x)$ est rejetée aussi bien dans le cas, où le nombre d'inversions dépasse la limite $\overline{U}_\alpha$, que dans le cas, où le nombre d'inversions est inférieur à la limite $\underline{U}_\alpha$.

Il convient maintenant de déterminer ces limites. Evaluons d'abord l'espérance mathématique et la variance du nombre d'inversions. Pour chaque couple d'observations x_i et y_i définissons une variable aléatoire z_{ij} de la manière suivante:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } x_i > y_j, \\ 0, & \text{si } x_i < y_j. \end{cases}$$

Il est clair que $\mathbf{P}\{x_i > y_i\} = \mathbf{P}\{x_i < y_i\}$ * et que $U = \Sigma z_{ij}$, où la sommation est étendue à toutes les valeurs de i et j. Nous en tirons, étant donné que $\mathbf{M}z_{ij} = \frac{1}{2}$ et que le nombre de tous les termes de la somme est égal à mn, que

$$\mathbf{M}U = \frac{mn}{2}.$$

Par des calculs quelque peu compliqués on peut trouver tous les moments centraux de la grandeur U. En particulier

$$\mathbf{D}U = \frac{mn}{12}(m+n-1).$$

On démontre que quand $\min(m, n) \to \infty$, on a l'égalité limite suivante

$$\mathbf{P}\left\{\frac{U - \mathbf{M}U}{\sqrt{\mathbf{D}U}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Par ailleurs ce théorème donne une bonne approximation pour $m + n \geqslant 20$ et $\min(m, n) \geqslant 3$.

---

* Si les grandeurs ξ et η sont indépendantes et possèdent une fonction de répartition $F(x)$ continue, alors

$$\mathbf{P}\{\xi > \eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{x} dF(y)\right] dF(x) = \frac{1}{2}.$$

Si l'on effectue les calculs pour des données présentées dans la table 4.5.1, on établira que le nombre d'inversions U est égal à 40. En vertu de la relation limite que nous venons de citer on peut écrire la suite d'égalités

$$P\{U \leqslant 40\} = P\left\{\frac{U-200}{\sqrt{DU}} < -\frac{160}{13{,}67}\right\} < P\left\{\frac{U-200}{\sqrt{DU}} < -4\right\} < 0{,}0001.$$

Nous en concluons que le critère de Wilcoxon, de même que le critère des signes, permet de rejeter l'hypothèse de l'absence d'un dérèglement de la machine à estamper entre le 6 et le 12 mars.

Pour les petites valeurs de m et de n on a élaboré pour le critère de Wilcoxon des tables des valeurs critiques U_α et $\overline{U}_\alpha$ avec un seuil donné de signification. Nous présentons ces tables dans l'annexe (cf. table 19).

Attirons l'attention sur le fait que le critère de Wilcoxon ne tient pas compte des valeurs prises par la variable aléatoire lors des essais n° 1, n° 2, etc. Pour appliquer ce critère on doit connaître seulement la suite ordonnée des valeurs des résultats d'observations. Il en découle que la méthode de Wilcoxon est bien adoptée, en particulier, au cas de la vérification de l'homogénéité de la qualité des matériels de deux séries d'essais de durée de vie effectués suivant un plan du type $[N, B, N]$. Chaque série d'essais peut alors comporter un nombre différent d'articles.

Nous formulerons au sujet des critères de Wilcoxon et des signes une remarque qui montrera que ces deux critères ne peuvent être utilisés, généralement parlant, pour comparer l'hypothèse $F_1(x) = F_2(x)$ avec une autre hypothèse arbitraire. Un exemple simple nous montrera que l'on peut trouver un cas, pour lequel les deux distributions $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont notoirement différentes, alors que le critère des signes et le critère de Wilcoxon montrent une bonne concordance avec l'hypothèse $F_1(x) = F_2(x)$. Il s'avère, en plus, que quand le nombre des observations croît à l'infini, la probabilité d'une telle prise de décision tend vers 1.

Supposons que la fonction de répartition $F_1(x)$ soit définie comme suit:

$$F_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{si } x \leqslant a, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } a \leqslant x \leqslant b, \\ \psi(x), & \text{si } x \geqslant b; \end{cases}$$

les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont non décroissantes, continues; la première croît de 0 à $\frac{1}{2}$ et la seconde de $\frac{1}{2}$ à 1.

La fonction de répartition $F_2(x)$ est définie par les égalités:

$$F_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leqslant a, \\ \chi(x), & \text{si } a \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & \text{si } x \geqslant b; \end{cases}$$

$\chi(x)$ est une fonction continue, croissante de 0 à 1.

On voit aisément que dans notre exemple le nombre de signes dans le critère des signes sera toujours proche de $\frac{n}{2}$ et le nombre d'inversions proche de $\frac{mn}{2}$. Ainsi, les deux critères nous conduiront presque toujours à une conclusion erronée. Bien entendu, notre exemple a été spécialement élaboré et en pratique il est difficile de supposer que l'on rencontre des distributions aussi artificielles. Lors d'un examen rapide du matériel statistique la division des signes en deux groupes, de même que celle des inversions en deux groupes très différents apparaissent très nettement, de sorte qu'un chercheur même peu expérimenté ne peut se tromper.

Critère de N. Smirnov. N. Smirnov a proposé et a élaboré un critère * intéressant, consistant, pour vérifier l'hypothèse de l'homogénéité du matériel statistique. Supposons que comme auparavant on dispose de deux séries d'observations indépendantes dont les résultats sont

$$x_1, x_2, \ldots, x_m,$$
$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Construisons les deux fonctions de répartition empiriques

$$S_m(x) = \frac{k_1(x)}{m} \quad \text{et} \quad T_n(x) = \frac{k_2(x)}{n},$$

où $k_1(x)$ et $k_2(x)$ sont respectivement les nombres x_i et y_j inférieurs à x. Construisons les grandeurs

$$D^+_{mn} = \sup_x [S_m(x) - T_n(x)] \quad \text{et} \quad D_{mn} = \sup_x |S_m(x) - T_n(x)|.$$

N. Smirnov a démontré que, quand $\min(m, n) \to \infty$, on a les relations limites

$$\Phi^+_{mn}(z) = \mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D^+_{mn} < z\right\} \to 1 - e^{2z^2} \text{ pour } z \geqslant 0$$

et

$$\Phi_{mn}(z) = \mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{mn} < z\right\} \to K(z) =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2z^2} \text{ pour } z \geqslant 0.$$

---

* C'est-à-dire tel que la probabilité d'accepter une hypothèse fausse tend vers zéro quand le nombre d'essais tend vers l'infini.

Quand $m = n$, comme l'ont démontré B. Gnédenko et V. Koroliouk, on peut trouver non seulement des lois limites simples, mais aussi les distributions exactes pour tout n. Pour chaque valeur de z définissons le nombre entier c d'après la formule

$$c = [z\sqrt{2n}].$$

Alors, si l'hypothèse $F_1(x) = F_2(x)$ est vraie et si la fonction $F_1(x)$ est continue, on a

$$\Phi_n^+(z) = \mathrm{P}\{\sqrt{2n}\, D_{mn}^+ < z\} = 0 \quad \text{pour } z \leqslant 0,$$

$$\Phi_n^+(z) = 1 - \frac{C_{2n}^{n-c}}{C_{2n}^{n}} \quad \text{pour } 0 < z \leqslant \sqrt{\frac{n}{2}},$$

$$\Phi_n(z) = 0 \quad \text{pour } z < \frac{1}{\sqrt{2n}},$$

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=-[\frac{n}{c}]}^{[\frac{n}{c}]} (-1)^k \frac{C_{2n}^{n-ck}}{C_{2n}^{n}} \quad \text{pour } \frac{1}{\sqrt{2n}} < z \leqslant \sqrt{\frac{n}{2}},$$

$$\Phi_n^+(z) = \Phi_n(z) = 1 \quad \text{pour } z > \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Nous ne rapportons pas ici la démonstration de ce théorème pour ne pas alourdir notre exposé par les détails techniques de la démonstration.

Comme tout procédé statistique, la méthode proposée est d'autant meilleure que le nombre d'observations est élevé. On peut affirmer avec une probabilité non inférieure à 0,95 que la distribution est modifiée, si pour un nombre d'observations égal à n la grandeur nD_n atteint ou dépasse les valeurs indiquées dans la table 4.5.2.

Table 4.5.2

n	9	10	12	15	20	25	30	35	50	75	100
nD_n	6	6	7	8	9	10	11	12	14	17	19

Les données présentées montrent que pour des petites valeurs de n le critère de N. Smirnov est peu sensible. Notons, en outre, que l'on ne peut pas construire pour le critère de Smirnov des exemples semblables à celui que nous avons construit pour les critères des signes et de Wilcoxon ; ce critère est consistant. Dans la table 21 de l'annexe on a présenté les valeurs des probabilités :

$$\mathrm{P}\{n\,|S_n(x) - T_n(x)| \leqslant k\}$$

pour les valeurs entières de k.

Les théorèmes cités peuvent être étendus à un problème plus compliqué quand on vérifie la coïncidence des fonctions de répartition $F_1(x)$ et $F_2(x)$ non pas dans tout le domaine des valeurs de x, mais de $-\infty$, à la valeur pour laquelle $F_1(x) = F_2(x) = \theta$. C'est précisément à un tel état de choses que l'on a affaire quand les essais sont réalisés d'après le plan $[N, B, r]$. Imaginons que l'on ait posé deux séries d'essais du type mentionné. La première série comporte m articles, et la seconde n. Dans le premier cas les essais sont poursuivis jusqu'à la r-ième panne, dans le second, jusqu'à la s-ième panne. Supposons encore que m et n soient choisis de telle sorte que $\frac{r}{m} = \frac{s}{n} = \theta$. Dans l'hypothèse que $F_1(x) = F_2(x)$ soit une fonction continue, I. Quit [21] a démontré divers théorèmes limites sur l'écart maximal des deux distributions empiriques dans un intervalle donné. Nous nous bornerons à énoncer certains cas particuliers de ses résultats.

Introduisons les notations

$$D^+_{mn}(\theta) = \sup_{x,\ F_1(x)\leq\theta} [S_m(x) - T_n(x)]$$

et

$$D_{mn}(\theta) = \sup_{x,\ F_1(x)\leq\theta} |S_m(x) - T_n(x)|.$$

Alors quand $\min(m, n) \to \infty$, on a les relations

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D^+_{mn}(\theta) < z\right\} \to \Phi^+(z, \theta)$$

et

$$\mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{mn}(\theta) < z\right\} \to \Phi(z, \theta),$$

o

$$\Phi^+(z, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}} du - e^{-2z^2}\int_{-\infty}^{a_1} e^{-\frac{u^2}{2}} du\right]$$

et

$$\Phi(z, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-a}^{a} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2z^2} \int_{a_{-k}}^{a_k} e^{-\frac{u^2}{2}} du\right].$$

Ici

$$a = \frac{z}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}, \quad a_k = \frac{1+k(1-\theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} z.$$

Pour le cas $m = n$, E. Rvatchéva [25] a trouvé la distribution exacte des statistiques $D^+_{mn}(\theta)$ et $D_{mn}(\theta)$. G. Mania a calculé les tables des distributions $\Phi^+(z, \theta)$ et $\Phi(z, \theta)$ [22], [23].

Chapitre 5

RÉSERVATION SANS RENOUVELLEMENT

§ 5.1. Introduction

La réservation est l'une des principales méthodes d'élévation de la fiabilité qui permet, du moins en principe, d'augmenter indéfiniment la fiabilité du système.

La réservation consiste en ce qu'à un élément (à un bloc) du système on adjoint un ou plusieurs éléments (blocs) de réserve, qui au fur et à mesure de l'apparition des pannes sont branchés à la place de l'élément principal (du bloc) et assument ses fonctions.

Dans ce qui suit nous emploierons pour des raisons de commodité le terme de « réservation de l'élément » comprenant par « élément » aussi bien un élément, comme partie indécomposable du système, qu'un bloc et même le système tout entier.

Nous appellerons dans ce qui suit l'ensemble formé par l'élément principal et ses éléments de réserve le *groupe de réserve*.

La réservation des éléments peut se diviser en plusieurs types, suivant l'état des éléments de réserve à l'instant de mise en service.

1. *Réserve chargée*. Les éléments de réserve se trouvent au même régime que l'élément principal, leur fiabilité ne dépend pas de l'instant, où ils sont branchés à la place de l'élément principal.

Nous entendrons dans ce chapitre par *fiabilité* la probabilité de fonctionnement sans défaillance au cours d'un temps donné, et par *non-fiabilité*, la probabilité d'apparition d'une panne au cours de ce temps.

2. *Réserve non chargée*. Les éléments de réserve se trouvent au repos et, par conséquence, ne peuvent pas tomber en panne avant l'instant de branchement à la place de l'élément principal.

3. *Réserve allégée*. Les éléments de réserve se trouvent à un régime allégé jusqu'à l'instant de branchement à la place de l'élément principal. Au cours de leur attente en réserve ils peuvent tomber en panne, mais avec une probabilité plus petite que la probabilité de la panne de l'élément principal. Il est évident que la réserve allégée est le type le plus général de réservation, alors que les deux premiers types représentent des cas particuliers extrêmes.

Dans le présent chapitre nous considérerons en détail ces trois types de réserve, nous établirons des formules exactes et approchées, estimant la fiabilité du groupe de réserve, et nous considérerons éga-

lement certaines propriétés générales des systèmes avec réservation. Nous ne considérerons pas le problème de la réservation optimale dans ce chapitre. Nous supposerons plus bas que le remplacement de l'élément tombé en panne par un élément de réserve a lieu instantanément. Nous estimerons également que les éléments tombés en panne ne sont pas renouvelés (d'où le titre de ce chapitre). La réservation avec renouvellement sera étudiée au chapitre 6.

§ 5.2. Réserve chargée

Dans le cas d'une réserve chargée l'élément se trouve à un même régime avant et après le branchement. C'est pourquoi la fiabilité de chaque élément ne dépend pas du fait à quel instant il a été branché, autrement dit, ne dépend pas de l'instant des pannes des autres éléments. Nous estimons que le temps, durant lequel l'élément tombé en panne est remplacé par un élément de réserve, est pratiquement égal à zéro et que le dispositif de branchement (s'il existe) est absolument fiable.

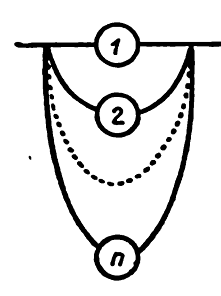


Fig. 5.2.1

Supposons que l'on ait un élément principal et $n - 1$ éléments de réserve (fig. 5.2.1).

Désignons par

$$p_1(t),\ p_2(t),\ \ldots,\ p_n(t)$$

la fiabilité des éléments correspondants et leur non-fiabilité par

$$q_1(t),\ q_2(t),\ \ldots,\ q_n(t) \qquad (q_k = 1 - p_k).$$

Soit $P_n(t)$ la fiabilité du groupe de réserve et $Q_n(t)$ sa non-fiabilité.

Par hypothèse, la panne se produit à l'instant, où le dernier des éléments branchés tombe en panne. C'est pourquoi pour qu'au cours du temps t le groupe de réserve tombe en panne il faut qu'au cours de ce temps tombe en panne chacun de ses n éléments. Comme toutes les pannes sont indépendantes, nous obtenons d'après le théorème du produit des probabilités

$$Q_n(t) = q_1(t) \cdot q_2(t) \ldots, q_n(t). \qquad (5.2.1)$$

En écrivant cette égalité pour les fiabilités, nous obtenons

$$P_n(t) = 1 - [1 - p_1(t)]\,[1 - p_2(t)] \ldots [1 - p_n(t)]. \qquad (5.2.2)$$

Remarquons qu'il découle de ces formules que la fiabilité du groupe de réserve ne dépend pas de l'ordre de branchement des éléments de réserve. Il en découle également que la fiabilité du groupe de réserve

est déterminée par les valeurs de la fiabilité des éléments à cet instant et ne dépend absolument pas du fait comment variaient les fonctions de fiabilité des éléments avant cet instant.

Si tous les éléments possèdent la même fiabilité, c'est-à-dire si

$$p_1(t) = p_2(t) = \ldots = p_n(t) = p(t), \qquad q(t) = 1 - p(t),$$

alors les formules se simplifient :

$$Q_n(t) = q^n(t), \tag{5.2.3}$$

(autrement dit, la non-fiabilité du groupe de réserve est égale à celle d'un élément, élevée à une puissance égale à multiplicité de la réserve) et respectivement

$$P_n(t) = 1 - [1 - p(t)]^n. \tag{5.2.4}$$

La formule (5.2.3) est très simple et commode. Elle peut être aisément résolue par rapport aux grandeurs entrant dans sa composition. Si, par exemple, nous nous donnons la non-fiabilité $q(t)$ d'un élément et que nous devons trouver un nombre d'éléments de réserve tel que la non-fiabilité $Q_n(t)$ ne dépasse pas une valeur donnée Q, alors de l'inégalité

$$q^n \leqslant Q$$

nous obtenons

$$n \geqslant \frac{\ln \frac{1}{Q}}{\ln \frac{1}{q}}.$$

Si, par contre, après s'être donné le nombre d'éléments de réserve, on doit déterminer quelle doit être la fiabilité de chacun d'eux, alors on a

$$q = \sqrt[n]{Q}.$$

Dans le cas de la loi exponentielle

$$p_k(t) = e^{-\lambda_k t}$$

il est utile de remarquer que si les fiabilités des éléments sont proches de l'unité, alors

$$q_k(t) = 1 - e^{-\lambda_k t} \approx \lambda_k t.$$

Ainsi

$$Q_n \approx \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n t^n. \tag{5.2.1'}$$

et pour les éléments également fiables

$$Q_n \approx (\lambda t)^n. \tag{5.2.3'}$$

L'erreur relative dans la formule (5.2.1′) ne dépasse pas la valeur

$$\frac{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}{2}\,t.$$

En outre, les seconds membres des égalités (5.2.1′) et (5.2.3′) sont non seulement approchés, mais donnent pour la non-fiabilité une estimation par excès.

Il découle de l'inégalité $1-e^{-x}\leqslant x$ que $q_k(t)\leqslant\lambda_k t$, d'où

$$Q_n\leqslant\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n t^n.$$

Les formules (5.2.1′) et (5.2.3′) sont commodes dans le cas, où nous connaissons non pas les fiabilités des éléments, mais les risques respectifs de panne λ_k.

Le temps moyen de fonctionnement du groupe de réserve est déterminé de la formule

$$T_n=\int_0^\infty P_n(t)\,dt. \tag{5.2.5}$$

Si les fiabilités des éléments sont données analytiquement, alors le temps moyen peut dans de nombreux cas être calculé sous une forme finie.

1) **Loi exponentielle**

$$p_k(t)=e^{-\lambda_k t},$$

$$T_n=\int_0^\infty\Big[1-\prod_{k=1}^{n}(1-e^{-\lambda_k t})\Big]dt=$$

$$=\int_0^\infty\Big[\sum_k e^{-\lambda_k t}-\sum_{k<s}e^{-(\lambda_k+\lambda_s)t}+\sum_{k<s<l}e^{-(\lambda_k+\lambda_s+\lambda_l)t}-\ldots\Big]dt=$$

$$=\sum_k\frac{1}{\lambda_k}-\sum_{k<s}\frac{1}{\lambda_k+\lambda_s}+\sum_{k<s<l}\frac{1}{\lambda_k+\lambda_s+\lambda_l}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}.$$

Pour le cas des fiabilités égales

$$p(t)=e^{-\lambda t},$$

le temps moyen est obtenu encore plus simplement

$$T_n=\int_0^\infty[1-(1-e^{-\lambda t})^n]\,dt.$$

Introduisons une nouvelle variable

$$z=1-e^{-\lambda t}.$$

Alors

$$T_n = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \frac{1-z^n}{1-z}\,dz = \frac{1}{\lambda}\int_0^1 (1+z+z^2+\ldots+z^{n-1})\,dz =$$
$$= \frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Comme le temps moyen de fonctionnement d'un élément est $T_1 = \frac{1}{\lambda}$, alors

$$T_n = T_1\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right). \qquad (5.2.6)$$

Si n est grand, alors on peut calculer approximativement le temps moyen d'après la formule $T_n \approx T_1\left(\ln n + C + \frac{1}{2n}\right)$, où $C = 9{,}57712$ est la constante d'Euler.

2) **Loi de Weibull.** Nous nous bornerons ici et dans l'alinéa suivant au cas des fiabilités égales

$$p(t) = e^{-\lambda t^{\alpha}},$$

$$T_n = \int_0^{\infty} [1-(1-e^{-\lambda t^{\alpha}})^n]\,dt = \sum_{k=1}^{n} C_n^k(-1)^{k-1}\int_0^{\infty} e^{-\lambda k t^{\alpha}}\,dt =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} C_n^k(-1)^{k-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}k^{\frac{1}{\alpha}}},$$

ou

$$T_n = T_1\sum_{k=1}^{n} C_n^k\frac{(-1)^{k-1}}{k^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

3) **Loi de puissance** $p(t) = \frac{1}{\left(1+\frac{t}{t_0}\right)^{\alpha}}$ ($\alpha > 1$, sinon le temps moyen n'existe pas),

$$T_n = \int_0^{\infty}\left[1-\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{t}{t_0}\right)^{\alpha}}\right)^n\right]dt = \frac{n!\,t_0}{\left(n-\frac{1}{\alpha}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)} - t_C.$$

Si la fonction de probabilité est donnée sous forme graphique ou en certains de ses points, alors on peut déterminer le temps moyen d'après la formule (5.2.5) par intégration numérique.

Supposons que N éléments identiques aient été soumis aux essais poursuivis jusqu'à la panne du dernier élément, de sorte que les

résultats des essais ont donné les grandeurs

$$0<\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_N,$$

qui sont les temps aléatoires de fonctionnement des éléments ordonnés dans l'ordre de croissance. La fonction empirique de fiabilité est $\hat{P}(t)=1-\frac{k}{N}$, où k désigne le nombre de pannes s'étant produites jusqu'à l'instant t. Portant cette fonction dans la formule (5.2.5), nous obtenons

$$T_n \approx \hat{T}_n=\int_0^{\infty}[1-(1-\hat{p}(t))^n]\,dt=\sum_{k=1}^{N}\frac{k^n-(k-1)^n}{N^n}\tau_k.$$

Ainsi, le temps moyen de fonctionnement du groupe de réserve peut être déterminé directement d'après les résultats des essais.

Il peut sembler à première vue de notre exposé que le temps moyen T_n peut être aisément calculé soit à l'aide de formules exactes, soit avec une approximation suffisante d'après les résultats des essais. Or, il n'en est pas ainsi. En effet, la valeur du temps moyen T_n est déterminée principalement par le comportement de la fonction de fiabilité $p(t)$ pour de grandes valeurs du temps, dépassant notablement le temps moyen de fonctionnement de l'élément. Plus vite la fonction $p(t)$ décroît, quand $t\to\infty$, plus petit sera T_n, et inversement. Théoriquement, le temps T_n peut varier dans des limites suffisamment larges, à savoir

$$T_1\leqslant T_n\leqslant nT_1.$$

Or, la fonction de fiabilité $p(t)$ est le plus souvent connue que dans un intervalle limité de temps, qui est soit plus petit, soit du même ordre de grandeur que le temps moyen de fonctionnement d'un élément, car ce temps moyen est souvent mesuré par des dizaines et des centaines de milliers d'heures et il est impossible physiquement de poursuivre les essais durant un temps tellement long.

Dans le cas, où la fiabilité est donnée analytiquement, ces raisonnements conservent encore leur valeur.

En effet, quand nous disons, par exemple, que la fiabilité suit une loi exponentielle, nous entendons habituellement par cela que sur l'intervalle de temps qui nous intéresse le risque de panne $\lambda(t)=\lambda$ est constant. Qu'en sera-t-il plus loin, nous ne le savons pas, et c'est précisément ce comportement ultérieur de $\lambda(t)$ qui détermine la valeur T_n.

C'est pourquoi les formules rapportées plus haut ne sont valables, probablement, que pour une classe assez étroite d'éléments, précisément pour les éléments dont la période de « vieillissement » est bien étudiée.

Pour la majorité des éléments il suffit d'avoir une estimation simple, bien que grossière, du temps moyen T_n. Etablissons une telle

estimation. Supposons que la fonction $q\,(t)$ a sa convexité orientée vers le haut

$$T_n = \int_0^\infty [1 - q^n\,(t)]\,dt.$$

Effectuons le changement de variables $z = q\,(t)$, $t = \psi\,(z)$. La fonction $\psi\,(z)$ a sa convexité orientée vers le bas. Après le changement de variables intégrons par parties

$$T_n = \int_0^1 (1 - z^n)\,d\psi\,(z) = n \int_0^1 z^{n-1}\psi\,(z)\,dz.$$

Il vient alors

$$\psi\,(z) \geqslant \psi\,(a) + \psi'\,(a)\,(z - a),$$

puisqu'une courbe dont la convexité est orientée vers le bas est située plus haut que toute tangente à cette courbe.

Nous en tirons

$$T_n \geqslant n \int_0^1 z^{n-1}\,[\psi\,(a) + \psi'\,(a)\,(z - a)]\,dz = \psi\,(a) + \psi'\,(a)\left(\frac{n}{n+1} - a\right).$$

Comme le nombre a est arbitraire, posons $a = \frac{n}{n+1}$. Nous obtenons

$$T_n \geqslant \psi\left(\frac{n}{n+1}\right) \quad \text{ou} \quad q\,(T_n) \geqslant \frac{n}{n+1},$$

et en définitive

$$p\,(T_n) \leqslant \frac{1}{n+1}. \tag{5.2.7}$$

Pour évaluer le degré d'exactitude de cette inégalité, établissons d'une façon analogue une estimation par défaut. Supposons pour cela que notre élément vieillit, c'est-à-dire que le risque de panne $\lambda\,(t)$ croît de façon monotone. On a alors

$$p\,(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t)\,dt} = e^{-\Lambda(t)},$$

la fonction $\Lambda\,(t)$ ayant sa convexité orientée vers le bas, et

$$T_n = \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\Lambda(t)})^n]\,dt.$$

Effectuons le changement de variables $z = \Lambda\,(t)$, $t = \varphi\,(z)$ et intégrons par parties

$$T_n = \int_0^\infty [1\,(1 - e^{-z})^n]\,d\varphi\,(z) = n \int_0^\infty (1 - e^{-z})^{n-1}\,e^{-z}\varphi\,(z)\,dz.$$

Procédant comme dans le cas précédent, nous obterons

$$T_n \leqslant \varphi(a) + \varphi'(a)\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - a\right].$$

Posons

$$a = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Alors

$$T_n \leqslant \varphi\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

ou

$$\Lambda(T_n) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Nous obtenons donc pour la fiabilité l'estimation

$$p(T_n) = e^{-\Lambda(T_n)} \geqslant e^{-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}.$$

On peut montrer aisément que la différence

$$\ln(n+1) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

tend, en décroissant de façon monotone, vers une limite égale à $-C$. C'est pourquoi

$$(n+1)\,p(T_n) \geqslant e^{+\ln(n+1)-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)} \geqslant e^{-C} = 0{,}56\ \ldots \quad (5.2.8)$$

On peut relâcher les conditions pour lesquelles les inégalités (5.2.7) et (5.2.8) sont valables. Il suffit qu'à partir d'un certain $t = t_0$ les tangentes aux graphiques $p(t)$ et $\ln[p(t)]^{-1}$ soient situées plus bas que ces courbes. Alors, si $T_n > t_0$, on a l'inégalité

$$0{,}56 \approx e^{-C} \leqslant (n+1)\,p(T_n) \leqslant 1. \quad (5.2.9)$$

Cette inégalité montre que pour déterminer le temps moyen de fonctionnement du groupe de réserve on peut utiliser la formule approchée

$$p(T_n) = \frac{1}{n+1}. \quad (5.2.10)$$

Dans ce cas l'approximation étant réalisée par défaut, nous sous-estimons le temps moyen, autrement dit, la vraie valeur de T_n est un peu plus grande que la valeur calculée.

Pour établir cette formule approchée, nous avons supposé que les fonctions $q(t)$ et $\Lambda(t) = \ln \frac{1!}{p(t)}$ ont leur convexité orientée vers le bas. Si cela a lieu à partir d'un certain t, l'inégalité (5.2.9) sera vérifiée à partir d'un certain indice n.

On voit de la formule (5.2.10) comment croît le temps moyen avec l'accroissement de la multiplicité de la réservation. Par exemple, pour la loi de Weibull

$$e^{-\lambda T_n^\alpha} \approx \frac{1}{n+1},$$

$$T_n \approx \left[\frac{\ln(n+1)}{\lambda}\right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

le temps moyen croît lentement.

Pour la loi de puissance

$$\frac{1}{\left(1+\frac{T_n}{t_0}\right)^\alpha} = \frac{1}{n+1},$$

$$T_n = t_0(n+1)^{\frac{1}{\alpha}} - t_0,$$

le temps moyen croît notablement plus vite.

Lors de la considération de la réserve chaude nous avons supposé que c'est toujours un seul élément qui fonctionne, alors que les autres sont en réserve. Dans certains cas le caractère du système est tel que tous les n éléments effectuent simultanément une certaine fonction, et pour que cette fonction soit remplie, il faut qu'au moins m de ces n éléments soient en état de service. Cela signifie que la panne du groupe de réserve a lieu au moment de la $(n - m + 1)$-ième panne.

Si l'on suppose que les pannes des éléments sont indépendantes, on peut aisément trouver la fiabilité du groupe de réserve. Dans le cas général, quand les fiabilités des éléments sont différentes, considérons le polynôme

$$P(x) = (p_1x+q_1)(p_2x+q_2)\dots(p_nx+q_n) =$$
$$= P_{nn}x^n + P_{nn-1}x^{n-1} + \dots + P_{nk}x^k + \dots + P_{n0}.$$

Il est évident que le coefficient P_{nk} est la probabilité pour qu'à un instant donné k éléments exactement des n éléments considérés soient encore en vie.

Il en découle que

$$P_n = \sum_{k=m} P_{nk}. \qquad (5.2.11)$$

Si tous les éléments sont également fiables, alors

$$P_n = \sum_{k=m}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (5.2.12)$$

En conclusion de ce paragraphe indiquons une interprétation théorique probabiliste de la réserve chaude.

Soient $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ les temps aléatoires de fonctionnement de l'élément principal et des éléments de réserve que nous estimerons également fiables, et $\tau^{(n)}$ le temps aléatoire de fonctionnement du groupe de réserve. Il est alors évident que

$$\tau^{(n)} = \max(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n).$$

Nous pouvons considérer les grandeurs τ_k comme des observations indépendantes réalisées sur une variable aléatoire suivant la loi de distribution $q(t)$. Soient

$$\tau'_1 < \tau'_2 < \ldots < \tau'_n$$

les valeurs de τ_k disposées dans l'ordre de croissance. La suite de τ'_k est appelée *échantillon ordonné.* On remarque aisément que

$$\tau^{(n)} = \tau'_n.$$

Ainsi, l'instant de panne du groupe de réserve est le terme extrême de l'échantillon ordonné. Dans le cas décrit par la formule (5.2.12) l'instant de panne

$$\tau^{(n)} = \tau'_{n-m+1}.$$

Cela signifie que lors de l'étude de la réserve chaude nous pouvons appliquer la théorie bien développée de la distribution des termes d'un échantillon ordonné [2].

§ 5.3. Schéma de mort

Considérons un schéma théorique probabiliste qui peut être largement utilisé lors de l'étude des divers types de réservation [3]. Pour plus de commodité nous décrirons ce schéma dans les termes de la théorie de la fiabilité, bien qu'il soit applicable également dans de nombreux autres cas (par exemple, en biologie, en médecine, etc.). Soit donné un système se composant d'un certain nombre d'éléments pouvant tomber en panne. Le flux des pannes ainsi formé est soumis aux conditions suivantes:

1. Si à l'instant t ont eu lieu $k - 1$ pannes, alors, indépendamment des instants d'apparition de ces pannes, la probabilité pour que dans l'intervalle de temps infiniment petit $(t, t + \Delta t)$ une panne se produise est égale à

$$\lambda_k \Delta t + o(\Delta t),$$

et la probabilité pour que dans cet intervalle il ne se produise pas de pannes est égale à

$$1 - \lambda_k \Delta t + o(\Delta t).$$

2. A l'instant d'apparition de la n-ième panne le fonctionnement du système cesse et par la suite aucun changement ne se produit dans le système. C'est pourquoi $\lambda_{n+1} = 0$.

Nous montrerons que ces deux conditions déterminent entièrement le flux fini de pannes, et si elles sont remplies, la nature des éléments qui composent le système n'a plus d'importance, ni la façon dont ils sont réunis dans le système, ni les éléments qui tombent en panne, ni enfin comment ces pannes influent sur les autres.

Notons encore que la seconde condition n'est pas très importante et n'est liée qu'au caractère spécifique de la théorie de la réservation, car la réserve est toujours finie et, par conséquent, avant la panne du groupe de réserve il ne peut se produire qu'un nombre fini de pannes.

Si à l'instant t il s'est produit $k-1$ pannes, nous dirons que le système se trouve à l'état k. Désignons par $\pi_k(t)$ la probabilité pour qu'à l'instant t le système se trouve à l'état k. Alors $\pi_{n+1}(t) = Q_n(t)$ est la probabilité pour que le système tombe en panne à l'instant t, autrement dit, c'est la non-fiabilité du système. Comparant les états du système à deux instants infiniment proches t et $t+\Delta t$, nous obtenons d'après la formule des probabilités totales

$$\pi_k(t+\Delta t)=\pi_{k-1}(t)\,\lambda_{k-1}\Delta t+\pi_k(t)\,(1-\lambda_k\Delta t)+o(\Delta t).$$

Nous en tirons, quand $\Delta t\to 0$, le système d'équations différentielles

$$\left.\begin{aligned}\pi_1'&=-\lambda\pi_1(t),\\ \pi_k'&=\lambda_{k-1}\pi_{k-1}(t)-\lambda_k\pi_k(t)\quad(k=2,\,3,\,\ldots,\,n),\\ \pi_{n+1}'&=\lambda_n\pi_n(t).\end{aligned}\right\}\qquad(5.3.1)$$

Les grandeurs $\pi_k(t)$ vérifient les conditions initiales $\pi_1(0)=1$, $\pi_k(0)=0$, pour $k>1$.

Pour obtenir la solution de ce système sous une forme compacte, il est commode d'utiliser la transformation de Laplace. Introduisons la notation

$$a_k(p)=\int_0^\infty \pi_k(t)\,e^{-pt}\,dt.$$

Les grandeurs $a_k(t)$ vérifient le système suivant d'équations algébriques :

$$\left.\begin{aligned}-1+pa_1(p)&=-\lambda_1a_1(p),\\ pa_k(p)&=\lambda_{k-1}a_{k-1}(p)-\lambda_ka_k(p)\quad(k=2,\,3,\,\ldots,\,n),\\ pa_{n+1}(p)&=\lambda_na_n(p).\end{aligned}\right\}\qquad(5.3.2)$$

Résolvant ce système, nous obtenons

$$a_1(p)=\frac{1}{p+\lambda_1},\qquad a_k(p)=\frac{\lambda_{k-1}}{p+\lambda_k}\,a_{k-1}(p),$$

$$a_{n+1}=\frac{\lambda_n}{p}\,a_n(p),$$

d'où

$$a_{n+1}(p)=\frac{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}{p\,(p+\lambda_1)\ldots(p+\lambda_n)}.\qquad(5.3.3)$$

Appliquant la formule d'inversion de la transformation de Laplace, nous obtenons la probabilité cherchée

$$\pi_{n+1}(t) = \frac{\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n}{2\pi} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{p(p+\lambda_1)\ldots(p+\lambda_n)} dp \quad (c > 0). \quad (5.3.4)$$

Nous pouvons remplacer le contour vertical d'intégration par un contour fermé parcourant dans le sens positif les zéros du dénumérateur. Nous avons alors d'après le théorème principal des résidus

$$\pi_{n+1}(t) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_k t}}{\lambda_k \omega'(-\lambda_k)} \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n, \quad (5.3.5)$$

où

$$\omega(x) = (x+\lambda_1)(x+\lambda_2)\ldots(x+\lambda_n).$$

Cette formule est valable uniquement pour le cas, où tous les nombres λ_k sont différents. Dans le cas contraire la formule se complique quelque peu, et nous ne l'écrirons pas. Notons seulement le cas particulier $\lambda_k = \lambda$. Nous avons alors

$$\pi_{n+1}(t) = \frac{\lambda^n}{2\pi i} \int\limits_C \frac{e^{pt}}{p(p+\lambda)^n} dp.$$

Dérivons les deux membres de l'égalité par rapport à t:

$$\pi'_{n+1}(t) = \frac{\lambda^n}{2\pi i} \int\limits_C \frac{e^{pt}}{(p+\lambda)^n} dp = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}.$$

Nous en déduisons

$$\pi_{n+1}(t) = \int\limits_0^t \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} dt = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (5.3.6)$$

Il n'est pas très commode de calculer les probabilités $\pi_{n+1}(t)$ d'après la formule (5.3.5). Le fait est que cette probabilité est habituellement petite (rappelons que dans nos problèmes $\pi_{n+1}(t)$ désigne la non-fiabilité du groupe de réserve), alors que les termes du second membre sont grands. C'est pourquoi chaque terme doit être calculé avec un degré élevé d'exactitude. Par ailleurs, il est difficile d'entrevoir à partir de la formule (5.3.5) quel caractère qualitatif doit présenter la dépendance de $\pi_{n+1}(t)$ du temps et des paramètres λ_k.

C'est pourquoi il est rationnel de trouver des formules approchées simples pour $\pi_{n+1}(t)$, dont chacune servirait pour un diapason déterminé de variation du temps et des paramètres λ_k.

Première formule approchée. Développons la fonction $\pi_{n+1}(t)$ en série suivant les puissances de t.

Pour cela nous développerons en série la fonction sous le signe d'intégration dans la formule (5.3.4)

$$\frac{e^{pt}}{p(p+\lambda_1)\ldots(p+\lambda_n)} = \frac{e^{pt}}{p^{n+1}\left(1+\frac{\lambda_1}{p}\right)\ldots\left(1+\frac{\lambda_n}{p}\right)} =$$

$$= \frac{e^{pt}}{p^{n+1}} - (\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)\frac{e^{pt}}{p^{n+2}} + (\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\ldots+\lambda_{n-1}\lambda_n+$$

$$+\lambda_1^2+\ldots+\lambda_n^2)\frac{e^{pt}}{p^{n+3}}+\ldots+(-1)^k\frac{e^{pt}}{p^{n+k+1}}S_k+\ldots,$$

où

$$S_k = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=k} \lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\ldots\lambda_n^{k_n}, \quad k_i \geqslant 0.$$

Prenons en qualité de contour d'intégration un cercle de rayon $R > \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \lambda_k$ et intégrons cette série terme à terme. Nous obtenons

$$\pi_{n+1}(t) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \sum_{k=0}^{\infty} S_k \frac{t^{n+k}}{(n+k)!}(-1)^k. \qquad (5.3.7)$$

Démontrons que cette série possède la propriété remarquable suivante, caractéristique pour de nombreuses séries régulières alternées: pour n'importe quelles valeurs de $t>0$, n et $\lambda_k>0$, l'erreur que l'on commet en rejetant tous les termes de la série à partir d'un certain rang possède le même signe que le premier terme rejeté et est toujours inférieure en valeur absolue à ce terme. Considérons pour des raisons de commodité la fonction

$$f_n(t) = \frac{\pi_{n+1}(t)}{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^{pt}}{p(p+\lambda_1)\ldots(p+\lambda_n)}\,dp.$$

Trouvons la dérivée

$$f_n'(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^{pt}(p+\lambda_n-\lambda_n)}{p(p+\lambda_1)\ldots(p+\lambda_n)}\,dp = f_{n-1}(t)-\lambda_n f_n(t).$$

Du fait que $f_n(t)\geqslant 0$, nous obtenons alors que $f_n'(t)\leqslant f_{n-1}(t)$ ou $f_n(t)\leqslant \int\limits_0^t f_{n-1}(\tau)\,d\tau$; $f_0(t)\equiv 1$, par conséquent, $f_1(t)\leqslant t$, $f_2(t)\leqslant \leqslant\frac{t^2}{2}$, $\ldots$, $f_n(t)\leqslant\frac{t^n}{n!}$.

Nous pouvons maintenant rechercher une borne inférieure

$$f_n'(t)\geqslant f_{n-1}(t)-\lambda_n\frac{t^n}{n!}$$

ou

$$f_n(t) \geqslant \int_0^t f_{n-1}(\tau)\,d\tau - \lambda_n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Nous en tirons

$$f_1(t) \geqslant t - \lambda_1 \frac{t^2}{2},$$

$$f_2(t) \geqslant \frac{t^2}{2} - (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{t^3}{3!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n(t) \geqslant \frac{t^n}{n!} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{t^n}{n!} - S_1 \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Poursuivant de cette manière nous obtenons l'estimation cherchée

$$\sum_{k=0}^{2l+1} S_k \frac{t^{n+k}}{(n+k)!} (-1)^k \leqslant f_n(t) \leqslant \sum_{k=0}^{2l} S_k \frac{t^{n+k}}{(n+k)!} (-1)^k. \quad (5.3.8)$$

Pour $l = 0$, nous obtenons en particulier

$$\frac{t^n}{n!} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{t^n}{n!}$$

ou

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \left[1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}{n+1} t\right] \frac{t^n}{n!} \leqslant \pi_{n+1}(t) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n t^n}{n!}, \quad (5.3.9)$$

d'où il découle que pour les probabilités $\pi_{n+1}(t)$ on a la formule approchée

$$\pi_{n+1}(t) \approx \frac{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n}{n!} t^n, \quad (5.3.10)$$

et l'erreur relative de cette formule ne dépasse pas la grandeur

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}{n+1} t.$$

Comme le montre l'inégalité (5.3.9), on peut utiliser la formule (5.3.10) même quand l'erreur relative est grande, puisqu'elle donne une borne supérieure de notre probabilité. En cas de nécessité on peut inclure encore quelques termes de la série (5.3.7), étant donné que cette série converge rapidement.

Comme nous le démontrerons dans ce qui suit, les grandeurs λ_k sont dans les problèmes de la théorie de la réservation égales à la somme des risques de panne de certains éléments constituant le

système. La formule (5.3.10) sera exacte dans le cas, où les nombres $\lambda_k t$ sont en moyenne petits. Or, si les $\lambda_k t$ sont petits, on a

$$e^{-\lambda_k t} \approx 1 - \lambda_k t.$$

C'est pourquoi les nombres $\lambda_k t$ seront approximativement égaux aux sommes des non-fiabilités des éléments correspondants.

Par conséquent, la formule (5.3.10) est applicable dans les problèmes de réservation dans les cas, où les fiabilités des éléments constituant le groupe de réserve sont relativement proches de l'unité. Dans ce cas il ne sert à rien d'augmenter la multiplicité de la réservation.

Seconde formule approchée. On peut parvenir à une fiabilité élevée par un autre moyen, en constituant un groupe de réserve à partir d'un grand nombre d'éléments non fiables. Dans ce cas il est clair que la formule (5.3.5) n'est pas applicable. De même la formule approchée (5.3.10) ne peut servir non plus. C'est pourquoi nous citerons, sans fournir de démonstration, une *seconde formule approchée* qui servira pour le cas où les grandeurs $\lambda_k t$ sont finies et n est grand.

Si $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k t^2) \to 0$, quand $n \to \infty$, alors pour les grandes valeurs de n on a la formule approchée

$$\pi_{n+1}(t) \approx \frac{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n}{n!} t^n e^{-\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{n} t}, \qquad (5.3.11)$$

pour laquelle le terme principal de l'erreur relative est égal à

$$\frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k t)^2.$$

Nous avons étudié plus haut le comportement de la probabilité $\pi_{n+1}(t)$ principalement pour les cas, où elle est petite. Considérons maintenant une autre approche du schéma de mort qui nous permettra d'étudier le comportement de la fonction $\pi_{n+1}(t)$ pour les grandes valeurs du temps. Désignons par τ_k le temps aléatoire, s'écoulant entre la $(k-1)$-ième et la k-ième panne (fig. 5.3.1).

Dans ce cas

$$T_n = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n$$

est la durée de vie aléatoire de notre système. Par définition la probabilité

$$\pi_{n+1}(t) = \mathrm{P}\{T_n < t\}$$

est la loi de distribution de la variable aléatoire T_n. En outre, il découle des conditions formulées au début de ce paragraphe que les

grandeurs τ_k sont mutuellement indépendantes et suivent une loi exponentielle

$$\mathrm{P}\{\tau_k < t\} = 1 - e^{-\lambda_k t}.$$

Par conséquent, la durée moyenne de vie du système est

$$\mathrm{M}T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k} \qquad (5.3.12)$$

et sa variance

$$\mathrm{D}T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k^2}.$$

La distribution de la grandeur T_n en tant que somme de variables aléatoires indépendantes doit, avec la croissance du nombre n de ter-

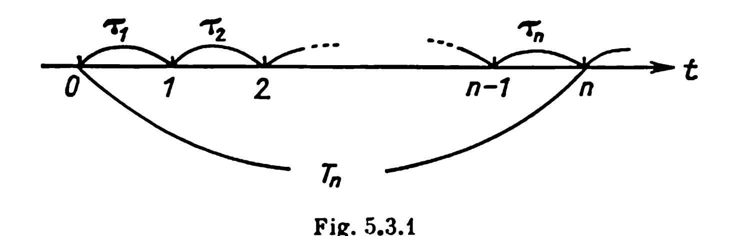


Fig. 5.3.1

mes, tendre vers la loi normale sous des conditions très larges. Le plus commode est d'utiliser les *conditions de Liapounov* formulées comme suit : *si*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k^3} \Big/ \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lambda_k^2} \right)^{\frac{3}{2}} = 0, \qquad (5.3.13)$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{x_1 < \frac{T_n - \mathrm{M}T_n}{\sqrt{\mathrm{D}T_n}} < x_2\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Nous obtenons alors pour les probabilités $\pi_{n+1}(t)$ une troisième formule approchée.

Si la condition (5.3.13) est remplie, alors pour un grand n et pour tous les t pour lesquels le rapport

$$\frac{t - \mathrm{M}T_n}{\sqrt{\mathrm{D}T_n}}$$

est borné, on a l'égalité approchée

$$\pi_{n+1}(t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{t-MT_n}{\sqrt{DT_n}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \qquad (5.3.14)$$

Illustrons l'application du schéma de mort sur l'exemple de la réserve chargée.

Supposons que les fiabilités de nos éléments soient identiques et suivent une loi exponentielle

$$p_k(t) = e^{-\lambda t}.$$

Dans l'intervalle de temps allant jusqu'à la première panne tous les n éléments fonctionnent. Considérons dans cet intervalle un laps de temps infiniment petit $(t, t + h)$. La probabilité pour que durant ce laps de temps un élément donné ne tombe pas en panne est égale à $e^{-\lambda h}$, et la probabilité pour qu'aucun des n éléments ne tombe en panne est égale à

$$e^{-nh\lambda} = 1 - n\lambda h + o(h).$$

Comme la probabilité d'apparition de deux ou d'un nombre plus élevé de pannes durant ce laps de temps est de l'ordre de h^2, la probabilité d'apparition d'une seule panne est

$$n\lambda h + o(h).$$

Ainsi,

$$\lambda_1 = n\lambda.$$

Dans l'intervalle de temps compris entre la première et la seconde pannes $n-1$ éléments fonctionnent, par conséquent,

$$\lambda_2 = (n-1)\lambda.$$

En général,

$$\lambda_k = (n-k+1)\lambda \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\lambda_{n+1} = 0.$$

Comme les pannes des éléments sont indépendantes et suivent une loi exponentielle, l'apparition d'une panne d'un élément au cours d'un laps de temps donné ne dépend pas du fait combien de temps cet élément a fonctionné et quand les pannes des autres éléments ont eu lieu. Par conséquent, *notre flux de pannes est un processus du type de mort.*

Appliquant la formule (5.3.5) nous obtenons que la non-fiabilité de notre groupe de réserve est égale à

$$Q_n(t)=\pi_{n+1}(t)=1-\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\lambda_k t}}{\lambda_k\omega'(\lambda_k)}=1-\sum_{k=1}^{n}\frac{n!\,e^{-k\lambda t}}{k!\,(n-k)!}(-1)^{k-1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^k e^{-k\lambda t}=(1-e^{-\lambda t})^n.$$

Si pour l'intervalle donné de temps les fiabilités des éléments sont proches de l'unité et si n est petit, alors conformément à la première formule approchée nous avons

$$\pi_{n+1}(t)\approx\frac{n\lambda(n-1)\lambda\ldots\lambda}{n!}t^n=(\lambda t)^n.$$

Dans ce cas la seconde et la troisième formules approchées ne sont pas valables. La durée moyenne de vie du groupe de réserve est alors en vertu de (5.3.12)

$$MT_n=\frac{1}{n\lambda}+\frac{1}{(n-1)\lambda}+\ldots+\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right).$$

Nous avons obtenu des formules que nous avions établies directement plus haut.

Considérons maintenant le cas plus compliqué d'une réserve chargée, quand les pannes de certains éléments modifient la fiabilité des autres. Du point de vue physique nous pouvons nous représenter ce cas de la manière suivante : n éléments fonctionnent simultanément et remplissent une même fonction. Si l'un des éléments tombe en panne, les autres éléments seront plus chargés, leurs paramètres de fonctionnement varieront, de sorte que la fiabilité des éléments en fonctionnement sera modifiée.

Supposons que dans chaque intervalle compris entre deux pannes consécutives le risque de panne de l'élément soit constant et ne dépende que du nombre d'éléments en fonctionnement. Si à un instant donné ne sont pas tombés en panne k éléments, le risque de panne de chacun d'eux est égal à μ_k.

Dans les notations du schéma de mort nous obtenons

$$\lambda_1=n\mu_n,\ \ldots,\ \lambda_k=(n-k+1)\,\mu_{n-k+1},$$
$$\lambda_{n+1}=0.$$

Nous pouvons alors calculer la non-fiabilité de notre groupe de réserve d'après la formule (5.3.5). Si les fiabilités de tous les éléments sont proches de l'unité, la première formule approchée donne

$$Q_n(t)=\pi_{n+1}(t)\approx\mu_1\mu_2\ldots\mu_n t^n.$$

La durée moyenne de vie du groupe de réserve est

$$MT_n = \frac{1}{n\mu_n} + \frac{1}{(n-1)\mu_{n-1}} + \ldots + \frac{1}{\mu_1}.$$

Considérons le cas particulier

$$\mu_n = \mu_{n-1} = \ldots = \mu_m = \lambda, \qquad \mu_{m-1} = \ldots = \mu_1 = 0,$$

autrement dit, les *pannes de certains éléments ne modifient pas la fiabilité des autres, mais le groupe de réserve ne peut remplir ses fonctions que tant que le nombre d'éléments en fonctionnement n'est pas inférieur à m*. A l'instant, où le nombre d'éléments en fonctionnement devient égal à $m-1$, il se produit la panne du groupe de réserve. Dans ce cas

$$\lambda_1 = n\lambda, \quad \lambda_2 = (n-1)\lambda, \ \ldots, \ \lambda_{n-m+1} = m\lambda,$$
$$\lambda_{n-m+2} = 0$$

et la non-fiabilité de notre groupe de réserve est

$$Q_n(t) = \pi_{n-m+2}(t) = 1 - \sum_{k=m}^{n} \frac{e^{-k\lambda t} n! \, (-1)^{k-m}}{(m-1)! \, k! \, (n-k)! \, (k-m)!}.$$

Transformant cette somme, nous obtenons en définitive

$$Q_n(t) = \sum_{k=n-m+1}^{n} C_n^k (1-e^{-\lambda\tau})^k e^{-(n-k)\lambda t}$$

que nous aurions pu établir directement.

Dans le cas des fiabilités élevées la première formule approchée donne

$$Q_n(t) \approx C_n^{m-1} (\lambda t)^{n-m+1}.$$

La durée moyenne de vie du groupe de réserve est

$$MT_n = \frac{1}{n\lambda} + \frac{1}{(n-1)\lambda} + \ldots + \frac{1}{m\lambda}.$$

Si m et n sont grands, alors

$$MT_n \approx \frac{1}{\lambda} \ln \frac{n+\frac{1}{2}}{m-\frac{1}{2}},$$

et l'erreur est de l'ordre de $\frac{1}{24\lambda}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right)$.

§ 5.4. Réserve non chargée

Nous supposerons dans le cas d'une réserve non chargée que l'élément de réserve ne peut pas tomber en panne tant qu'il n'est pas en service et que l'état de repos de l'élément de réserve ne modifie

pas sa fiabilité à l'état de fonctionnement. En outre, nous estimerons comme plus haut que le temps, durant lequel l'élément tombé en panne est remplacé par un élément de réserve, est pratiquement nul et que le dispositif de branchement est absolument sûr.

Supposons que nous disposions d'un élément principal et de $n-1$ éléments de réserve. Désignons par $p_k(t)$ la fiabilité du k-ième élément et par $q_k(t)$, sa non-fiabilité.

Après avoir fonctionné durant un temps aléatoire τ_1, l'élément principal tombe en panne et est remplacé par le premier élément de réserve qui fonctionne durant un laps de temps aléatoire τ_2, etc. Le dernier élément de réserve, après avoir fonctionné durant un laps de temps aléatoire τ_n, tombe en panne, ce qui entraîne la panne de tout le groupe de réserve. Ainsi, la durée de vie aléatoire T_n du groupe de réserve est

$$T_n=\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_n. \qquad (5.4.1)$$

Les grandeurs τ_k sont indépendantes et

$$\mathbf{P}\{\tau_k<t\}=q_k(t).$$

Désignons par $Q_n(t)$ la non-fiabilité du groupe de réserve. La fonction $Q_n(t)$, en tant que loi de distribution de la somme de n termes indépendants, est déterminée par les formules

$$Q_n(t)=\int_0^t q_n(t-\tau)\,Q'_{n-1}(t)\,d\tau, \qquad (5.4.2)$$

$$Q_1(t)=q_1(t).$$

Appliquant successivement ces formules pour $n=2, 3, \ldots$, nous pouvons calculer la valeur exacte ou approchée de $Q_n(t)$.

La durée moyenne de vie du groupe de réserve peut être très simplement déterminée comme suit

$$T^{(n)}_{\text{moy}}=\mathbf{M}T_n=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}\tau_k=\sum_{k=1}^{n}t^k_{\text{moy}}. \qquad (5.4.3)$$

En particulier, si tous les éléments sont également fiables, alors

$$T^{(n)}_{\text{moy}}=n\cdot t_{\text{moy}}. \qquad (5.4.4)$$

Supposons maintenant que les fiabilités de nos éléments suivent une loi exponentielle

$$p_k(t)=e^{-\lambda_k t}.$$

Conformément au paragraphe précédent nous avons

$$Q_n(t)=\pi_{n+1}(t).$$

Par conséquent, pour calculer la non-fiabilité $Q_n(t)$ on peut utiliser les formules (5.3.4), (5.3.5), (5.3.7) et les formules approchées (5.3.10), (5.3.11), (5.3.14).

Attirons particulièrement l'attention sur la formule approchée (5.3.10)

$$Q_n(t) \approx \frac{\lambda_1 t\, \lambda_2 t \,\ldots\, \lambda_n t}{n!}.$$

Nous avons pour les grandeurs $\lambda_k t \approx 1 - e^{-\lambda_k t} = q_k(t)$, puisque cette formule est valable quand les $\lambda_k t$ sont petits. Par conséquent, nous pouvons l'écrire sous la forme

$$Q_n(t) \approx \frac{q_1(t)\, q_2(t) \,\ldots\, q_n(t)}{n!}. \tag{5.4.5}$$

Cette formule permet de se représenter clairement le gain que nous pouvons obtenir dans le cas d'une réserve non chargée (comparer à (5.2.1)).

Si les non-fiabilités de tous les éléments sont égales

$$p_k(t) = e^{-\lambda t},$$

alors en vertu de la formule (5.3.6) nous avons

$$Q_n(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Remplaçant dans cette égalité l'unité par la série qui lui est égale

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

nous obtenons la formule

$$Q_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \tag{5.4.6}$$

qui est plus commode pour les calculs. A partir de cette série nous pouvons établir une formule approchée simple et donnant une très bonne approximation

$$Q_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} - \left[1 + \frac{\lambda t}{n+1} + \frac{(\lambda t)^2}{(n+1)(n+2)} + \ldots\right] \approx$$

$$\approx \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \left[1 + \frac{\lambda t}{n+1} + \frac{(\lambda t)^2}{(n+1)^2} + \ldots\right] = \frac{(\lambda t)^n}{n!\left(1 - \frac{\lambda t}{n+1}\right)} e^{-\lambda t}$$

ou

$$Q_n(t) \approx \frac{(\lambda t)^n}{n!\left(1 - \frac{\lambda t}{n+1}\right)} e^{-\lambda t}. \tag{5.4.7}$$

L'erreur relative est alors de l'ordre de

$$\frac{(\lambda t)^2}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Si $\lambda t \ll 1$, on peut utiliser une formule approchée tout à fait simple

$$Q_n(t) \approx \frac{(\lambda t)^n}{n!} \qquad (5.4.8)$$

qui est un cas particulier de (5.3.10).

On calcule également la grandeur $Q_n(t)$ dans le cas, où les fiabilités suivent une loi normale

$$p_k(t) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} e^{-\frac{(x-a_k)^2}{2\sigma_k^2}} dx \quad (\sigma_k \ll a_k).$$

La durée moyenne de vie T_n du groupe de réserve sera la somme des variables aléatoires normales indépendantes τ_k et, par conséquent, sera elle-même distribuée suivant une loi normale de moyenne

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

et de variance

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2.$$

Par conséquent, nous avons

$$Q_n(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right).$$

(Comme $\sigma \ll a$, on peut négliger la fraction d'intégrale comprise entre $-\infty$ et zéro.)

On peut enfin calculer aisément la fonction $Q_n(t)$ pour le cas, où les fiabilités de tous les éléments sont égales et où la fréquence des pannes s'exprime par la formule

$$q'(t) = \frac{\lambda^{\alpha} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t}.$$

Nous avons alors

$$Q_n(t) = \frac{\lambda^{n\alpha} t^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} e^{-\lambda t}.$$

Dans la majorité des cas on ne peut pas calculer la grandeur $Q_n(t)$ sous la forme finie. C'est alors que les différentes formules approchées ainsi que les estimations de la fiabilité présentent un intérêt particulier. Démontrons tout d'abord une affirmation simple permettant de trouver de telles estimations.

Soient $q_1(t)$, $q_2(t)$, ..., $q_n(t)$ les non-fiabilités de l'élément principal et des éléments de réserve, supposons qu'il existe des fonctions monotones non décroissantes $\underline{q}_1(t)$, $\underline{q}_2(t)$, ..., $\underline{q}_n(t)$ et $\overline{q}_1(t)$, $\overline{q}_2(t)$, ..., $\overline{q}_n(t)$ telles que dans l'intervalle de temps considéré

$$\underline{q}_k(t) \leqslant q_k(t) \leqslant \overline{q}_k(t) \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Supposons encore que les fonctions $\underline{Q}_n(t)$ et $\overline{Q}_n(t)$ soient déterminées respectivement à l'aide des fonctions $\underline{q}_k(t)$ et $\overline{q}_k(t)$ de la même façon que la fonction $Q_n(t)$ est déterminée à l'aide des fonctions $q_k(t)$ (cf. (5.4.2)).

On a alors sur l'intervalle de temps considéré

$$\underline{Q}_n(t) \leqslant Q_n(t) \leqslant \overline{Q}_n(t). \tag{5.4.9}$$

Démontrons ces inégalités par récurrence. Pour $n=1$ elles sont évidentes. Supposons que (5.4.9) est vraie pour un nombre $n=k$. Nous avons alors

$$Q_{k+1}(t) = \int_0^t q_{k+1}(t-\tau)\, Q_k'(\tau)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \overline{q}_{k+1}(t-\tau)\, Q_k'(\tau)\, d\tau = \int_0^t Q_k(\tau)\, \overline{q}_{k+1}'(t-\tau)\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \overline{Q}_k(\tau)\, \overline{q}_{k+1}'(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t \overline{q}_{k+1}(t-\tau)\, \overline{Q}_k'(\tau)\, d\tau = \overline{Q}_{k+1}(t)$$

ou

$$Q_{k+1}(t) \leqslant \overline{Q}_{k+1}(t).$$

On démontre d'une manière analogue l'inégalité à gauche. Utilisons maintenant ces inégalités.

1) Supposons que sur l'intervalle considéré de temps les non-fiabilités des éléments vérifient les inégalités

$$\underline{\lambda}_k t \leqslant q_k(t) \leqslant \overline{\lambda}_k t.$$

On démontre aisément que

$$\underline{Q}_n(t) = \frac{\underline{\lambda}_1 \ldots \underline{\lambda}_n}{n!} t^n \quad \text{et} \quad \overline{Q}_n(t) = \frac{\overline{\lambda}_1 \ldots \overline{\lambda}_n}{n!} t^n,$$

d'où

$$\frac{\underline{\lambda}_1 \ldots \underline{\lambda}_n}{n!} t^n \leqslant Q_n(t) \leqslant \frac{\overline{\lambda}_1 \ldots \overline{\lambda}_n}{n!} t^n. \tag{5.4.10}$$

2) Supposons que les risques de panne de nos éléments vérifient sur cet intervalle de temps les inégalités

$$\underline{\lambda}_k \leqslant \lambda_k(t) \leqslant \overline{\lambda}_k. \tag{5.4.11}$$

Nous avons alors

$$1 - e^{-\underline{\lambda}_k t} \leqslant q_k(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda_k(\tau)\,d\tau} \leqslant 1 - e^{-\overline{\lambda}_k t} \tag{5.4.12}$$

et nous pouvons utiliser en qualité d'estimations les formules (5.3.5), (5.3.6) et (5.3.7) en y portant respectivement $\underline{\lambda}_k$ et $\overline{\lambda}_k$. Il découle en outre de (5.4.12) que

$$q_k(t) \leqslant 1 - e^{-\overline{\lambda}_k t} < \overline{\lambda}_k t,$$

d'où découle l'inégalité

$$Q_n(t) < \frac{\overline{\lambda}_1 \ldots \overline{\lambda}_n}{n!} t^n.$$

3) Généralisant le cas 1), nous pouvons supposer que les non-fiabilités vérifient les inégalités

$$\underline{\lambda}_k t^{\alpha_k} \leqslant q_k(t) \leqslant \overline{\lambda}_k t^{\alpha_k}.$$

Ce cas se présente par exemple quand les fiabilités des éléments suivent la loi de Weibull

$$p(t) = e^{-\lambda t^{\alpha}}.$$

Nous avons alors $q(t) = 1 - e^{-\lambda t^{\alpha}} < \lambda t^{\alpha}$. On démontre aisément, en intégrant successivement d'après la formule (5.4.2), que

$$\frac{\underline{\lambda}_1 \ldots \underline{\lambda}_n \Gamma(\alpha_1 + 1) \ldots \Gamma(\alpha_n + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + 1)} t^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} \leqslant Q_n(t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\overline{\lambda}_1 \ldots \overline{\lambda}_n \Gamma(\alpha_1 + 1) \ldots \Gamma(\alpha_n + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n + 1)} t^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}. \tag{5.4.13}$$

Par ailleurs, on peut démontrer dans ce cas que si $\alpha_k \geqslant 1$*, alors

$$Q_n(t) \leqslant \frac{\overline{\lambda}_1 \ldots \overline{\lambda}_n}{n!} t^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n} = \frac{\overline{q}_1 \ldots \overline{q}_n}{n!}.$$

4) Supposons maintenant que nos éléments vieillissent, c'est-à-dire que les risques de pannes

$$\lambda_k(t) = \frac{q'_k(t)}{1 - q_k(t)}$$

* Cela est naturel, car si les nombres α_k étaient inférieurs à l'unité, la valeur du risque de panne au point zéro serait illimitée.

ne sont pas monotones croissants. Introduisons la notation $\Lambda_k(t) = \int_0^t \lambda_k(\tau)\,d\tau$. Les fonctions $\Lambda_k(t)$ ont leur convexité orientée vers le bas, de sorte que sur l'intervalle $(0, t)$ on a l'inégalité

$$\Lambda_k(\tau) \leqslant \frac{\tau}{t} \Lambda_k(t).$$

Par conséquent,

$$q_k(\tau) = 1 - e^{-\Lambda_k(\tau)} \leqslant 1 - e^{-\tau \frac{\Lambda_k(t)}{t}},$$

de sorte que pour obtenir une borne supérieure de la fonction $Q_n(t)$ on peut utiliser la formule (5.3.7) en y remplaçant λ_k par la grandeur $\frac{\Lambda_k(t)}{t}$. Renforçant l'inégalité, nous pouvons écrire que

$$Q_n(t) \leqslant \frac{\Lambda_1(t) \ldots \Lambda_n(t)}{n!}. \tag{5.4.14}$$

En particulier, si les fiabilités de tous les éléments sont identiques $\Lambda_k(t) = \Lambda(t)$, alors

$$Q_n(t) \leqslant 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Lambda^k(t)}{k!} e^{-\Lambda(t)}. \tag{5.4.15}$$

Les estimations effectuées plus haut nous permettent de formuler la très importante conclusion suivante: dans presque tous les cas la grandeur

$$\frac{q_1(t) \ldots q_n(t)}{n!}$$

est soit une bonne approximation pour la fonction $Q_n(t)$, soit une borne supérieure de cette fonction. Remarquons qu'en prenant par excès la non-fiabilité $Q_n(t)$, par cela même nous prenons par excès la non-fiabilité de tout le système. Cela fait que nos prévisions seront quelque peu plus pires que la réalité. Tous ces raisonnements nous donnent le droit d'utiliser la formule approchée (5.4.5), du moins quand les non-fiabilités $q_k(t)$ sont suffisamment petites. La commodité de cette formule approchée réside, entre autres, en ce que pour calculer la fiabilité du groupe de réserve il nous suffit de connaître les valeurs des fiabilités des éléments uniquement à l'instant final t, alors que pour pouvoir utiliser la formule exacte (5.4.2) nous devons connaître le comportement de la fonction de fiabilité sur tout l'intervalle $(0, t)$.

En conclusion comparons les réserves chargées et non chargées. Soient

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$$

les temps aléatoires de fonctionnement des éléments principal et de réserve. Le temps aléatoire de fonctionnement du groupe de réserve pour le cas de la réserve chargée sera alors

$$T_n^{(1)} = \max(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n),$$

et pour le cas de la réserve non chargée

$$T_n^{(2)} = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n.$$

Or, il est clair que

$$T_n^{(1)} = \max(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n) \leqslant \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_n = T_n^2.$$

Nous en concluons : *la réserve non chargée est dans tous les cas plus avantageuse que la réserve chargée* *.

Pour obtenir une comparaison quantitative entre ces deux types de réserve écrivons pour le cas de la réserve chargée la formule exacte

$$Q_n^{(1)}(t) = q_1(t)\, q_2(t) \ldots q_n(t)$$

et pour le cas de la réserve non chargée la formule approchée

$$Q_n^{(2)}(t) = \frac{q_1(t)\, q_2(t) \ldots q_n(t)}{n!}.$$

Comme nous l'avons montré, dans l'intervalle de temps qui nous intéresse, cette dernière est valable, si les fonctions $q_k(t)$ sont approximativement linéaires. Il en découle que

$$\frac{Q_n^{(1)}(t)}{Q_n^{(2)}(t)} \approx n!,$$

autrement dit, lors du passage à la réserve non chargée la non-fiabilité diminue de $n!$ fois. Voyons, enfin, comment augmente le temps moyen. Supposons que tous les éléments ont une même fiabilité soumise à une loi exponentielle.

Alors, pour la réserve chargée nous avons

$$T_{\text{moy}}^{(1)} = t_{\text{moy}} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \approx t_{\text{moy}} (\ln n + C)$$

et pour la réserve non chargée $T_{\text{moy}}^{(2)} = n t_{\text{moy}}$. Nous en tirons

$$\frac{T_{\text{moy}}^{(1)}}{T_{\text{moy}}^{(2)}} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n} \approx \frac{\ln n + C}{n}.$$

* Rappelons que les dispositifs de branchement sont considérés absolument sûrs.

Plus la multiplicité de la réserve est élevée, plus le gain en temps moyen sera grand. Par exemple, pour $n=2$ nous avons

$$\frac{T_{\text{moy}}^{(2)}}{T_{\text{moy}}^{(1)}}=\frac{4}{3}\approx 1{,}3,$$

et pour $n=10$

$$\frac{T_{\text{moy}}^{(2)}}{T_{\text{moy}}^{(1)}}\approx 3{,}4.$$

§ 5.5. Réserve allégée

Dans de nombreux cas il n'est pas avantageux d'utiliser la réserve chargée, car du fait des pannes des éléments de réserve elle ne donne pas le gain escompté en fiabilité. Par ailleurs nous ne pouvons non plus utiliser la réserve non chargée, car à partir de l'instant de branchement de l'élément jusqu'à l'instant, où il commence à fonctionner, il s'écoule un certain temps, l'élément « s'échauffe », alors que les conditions d'exploitation ne tolèrent pas de pause dans le fonctionnement de notre système.

En pareils cas on applique souvent la *réserve* dite *allégée*, dont l'idée principale consiste en ce qu'avant la mise en service l'élément de réserve se trouve à un régime allégé et après être branché commence à fonctionner à un régime normal. L'élément peut également tomber en panne alors qu'il se trouve en réserve, mais, en général, avec une probabilité moindre.

Supposons que le groupe de réserve se compose d'un élément principal et de $n-1$ éléments de réserve. Désignons par $p_k^{(n)}(t)$ la fiabilité du k-ième élément en état de fonctionnement et par $p_k^{(f)}(\tau,\ t)$ la probabilité conditionnelle pour que le k-ième élément de réserve ne tombe pas en panne en se trouvant à l'état de fonctionnement dans l'intervalle de temps $(\tau,\ t)$, sachant qu'il n'est pas tombé en panne dans l'intervalle $(0,\ \tau)$ précédant sa mise en fonctionnement (τ est l'instant, où l'élément est branché). Chaque élément de réserve est branché à l'instant, où le dernier (dans le temps et non par ordre de numération) des éléments précédents tombe en panne.

Désignons par

$$\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_n$$

les temps aléatoires de fonctionnement des éléments principal et de réserve ; soit

$$T_k=\max_{1\leqslant i\leqslant k}\tau_i.$$

Il est évident qu'à l'instant T_k a lieu la mise en service du $(k+1)$-ième élément.

Considérons la fonction

$$Q_k(t) = \mathbf{P}\{T_k < t\}.$$

Il est clair que $Q_1(t)$ est la non-fiabilité de l'élément principal et $Q_k(t)$, la non-fiabilité du groupe de réserve formé de l'élément principal et du $(k-1)$-ième élément de réserve. $Q_n(t)$ est la non-fiabilité cherchée de notre groupe de réserve. Notons encore que les temps aléatoires τ_k dépendent l'un de l'autre, car la durée de vie de l'élément de réserve dépend de l'instant de sa mise en service, autrement dit dépend des temps précédents τ_i.

Etablissons la relation entre deux fonctions consécutives $Q_k(t)$ et $Q_{k+1}(t)$

$$Q_{k+1}(t) = \mathbf{P}\{T_{k+1} < t\} = \mathbf{P}\{T_k < t, \quad \tau_{k+1} < t\} = \\ = \int_0^t \mathbf{P}\{\tau < T_k < \tau + d\tau, \quad \tau_{k+1} < t\} = \\ = \int_0^t \mathbf{P}\{\tau_{k+1} < t \mid T_k = \tau\}\, dQ_k(\tau).$$

Nous avons pour la probabilité

$$\mathbf{P}\{\tau_{k+1} < t \mid T_k = \tau\} = 1 - \mathbf{P}\{\tau_{k+1} > t \mid T_k = \tau\} = 1 - p_{k+1}^{(n)}(\tau)\, p_{k+1}^{(f)}(\tau, t),$$

d'où nous tirons

$$Q_{k+1}(t) = \int_0^t [1 - p_{k+1}^{(n)}(\tau)\, p_{k+1}^{(f)}(\tau, t)]\, dQ_k(\tau). \qquad (5.5.1)$$

Comme $Q_1(t)$, la non-fiabilité de l'élément principal, nous est connue, nous pouvons d'après cette formule déterminer successivement toutes les fonctions $Q_k(t)$. Toutefois, l'application de cette formule est rendue difficile par le fait que nous ne connaissons habituellement pas la fonction $p_k^{(f)}(\tau, t)$. Sa détermination empirique nécessite un énorme matériel statistique, car cette fonction dépend de deux arguments. C'est pourquoi nous pouvons supposer en première approximation que le fonctionnement de l'élément à mi-charge ne se répercute point sur sa fiabilité de fonctionnement à pleine charge. Nous avons alors

$$p^{(f)}(\tau, t) = p_k^{(f)}(t - \tau).$$

Notons encore que les réserves chargée et non chargée sont des cas particuliers de la réserve allégée.

Nous avons pour la réserve chargée, en utilisant les notations doptées plus haut,

$$p_k^{(n)}(\tau)=p_k(\tau), \qquad p_k^{(f)}(\tau,\ t)=\frac{p_k(t)}{p_k(\tau)},$$

et pour la réserve non chargée

$$p_k^{(n)}(\tau)\equiv 1, \qquad p_k^{(f)}(\tau,\ t)=p_k(t-\tau).$$

Pour obtenir des formules efficaces pour la fiabilité du groupe de réserve dans le cas de la réserve allégée supposons que les fiabilités des éléments à l'état de fonctionnement comme au repos suivent une loi exponentielle et que la fiabilité de l'élément à l'état de fonctionnement ne dépend pas du temps passé au repos. Analysons d'abord le cas, où les fiabilités de tous les éléments sont identiques. Soient λ, le risque de panne de l'élément au régime allégé, et Λ, le risque de panne de l'élément au régime de travail. Si jusqu'à l'instant considéré $(k-1)$ éléments sont tombés en panne, alors l'un des éléments non tombés en panne se trouve au régime de travail et les $(n-k)$ autres au régime allégé. C'est pourquoi le risque global de panne est

$$\lambda_k=\Lambda+(n-k)\lambda.$$

Il est clair que notre processus est un cas particulier du processus de mort et nous pouvons appliquer toutes les formules que nous avons établies auparavant.

Portant la grandeur λ_k dans la formule (5.3.4) nous obtenons

$$Q_n(t)=\frac{\Lambda(\Lambda+\lambda)\ \dots\ [\Lambda+(n-1)\lambda]}{2\pi i}\times$$
$$\times\int\limits_C\frac{e^{pt}\,dp}{p(p+\Lambda)(p+\Lambda+\lambda)\ \dots\ [p+\Lambda+(n-1)\lambda]}.$$

Calculons la dérivée par rapport à t des deux membres de cette égalité et dans l'intégrale obtenue effectuons le changement de variables $p+\Lambda=s$.

$$Q_n'(t)=\frac{\Lambda(\Lambda+\lambda)\dots[\Lambda+(n-1)\lambda]}{2\pi i}\int\frac{e^{st-\Lambda t}\,ds}{s(s+\lambda)\dots[s+(n-1)\lambda]}=$$
$$=\Lambda\left(1+\frac{\Lambda}{\lambda}\right)\left(1+\frac{\Lambda}{2\lambda}\right)\dots\left[1+\frac{\Lambda}{(n-1)\lambda}\right]e^{-\Lambda t}\times$$
$$\times\frac{\lambda 2\lambda\dots(n-1)\lambda}{2\pi i}\int\limits_C\frac{e^{st}ds}{s(s+\lambda)\dots[s+(n-1)\lambda]}.$$

On voit aisément que le second facteur est la non-fiabilité du groupe de réserve composé de $n-1$ éléments pour le cas de la réserve chargée. C'est pourquoi

$$Q_n'(t)=\Lambda\left(1+\frac{\Lambda}{\lambda}\right)\dots\left[1+\frac{\Lambda}{(n-1)\lambda}\right](1-e^{-\lambda t})^{n-1}e^{-\Lambda t},$$

d'où nous tirons

$$Q_n(t)=\Lambda\left(1+\frac{\Lambda}{\lambda}\right)\ldots\left[1+\frac{\Lambda}{(n-1)\lambda}\right]\int_0^t(1-e^{-\lambda t})^{n-1}e^{-\Lambda t}\,dt=$$

$$=\Lambda\left(1+\frac{\Lambda}{\lambda}\right)\ldots\left[1+\frac{\Lambda}{(n-1)\lambda}\right]\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^{k}(-1)^k\frac{1-e^{-(\Lambda+k\lambda)t}}{\Lambda+k\lambda}. \quad (5.5.2)$$

Pour des faibles valeurs de n et des fiabilités des éléments pas trop proches de l'unité il est commode d'employer cette formule. Dans le cas des fiabilités élevées on peut utiliser la formule (5.3.10) qui prend alors la forme

$$Q_n(t)\approx\frac{\Lambda(\Lambda+\lambda)\ldots[\Lambda+(n-1)\lambda]}{n!}t^n. \quad (5.5.3)$$

L'erreur relative n'excède pas la valeur

$$\left(\Lambda+\frac{n-1}{2}\lambda\right)t.$$

Nous pouvons enfin utiliser pour calculer $Q_n(t)$ la série (5.3.7).

Considérons maintenant le cas le plus général, où les éléments possèdent des risques de panne différents.

Soient λ_k, le risque de panne du k-ième élément au repos, et Λ_k, le risque de panne du k-ième élément à l'état de fonctionnement.

Lors de la considération de ce cas nous ne pouvons plus utiliser le schéma de mort, car le risque global de panne dépend non seulement du nombre des pannes s'étant produites jusque-là, mais aussi du fait quels sont les éléments qui sont tombés en panne. Pour déterminer la fiabilité du groupe de réserve utilisons la formule générale pour la réserve allégée.

Dans notre cas nous avons

$$p_k^{(n)}(\tau)=e^{-\lambda_k\tau},\quad p_k^{(f)}(\tau, t)=e^{-\Lambda_k(t-\tau)}.$$

Portant ces valeurs dans la formule (5.5.1), nous obtenons

$$\left.\begin{aligned}Q_k(t)&=\int_0^t[1-e^{-\lambda_k\tau-\Lambda_k(t-\tau)}]\,dQ_{k-1}(\tau),\\ Q_1(t)&=1-e^{-\Lambda_1 t}.\end{aligned}\right\} \quad (5.5.4)$$

Nous aurions pu alors calculer la fonction $Q_k(t)$, puisque toutes ces intégrales sont simples. Il est toutefois plus commode d'utiliser la transformation de Laplace. Soit

$$a_k(p)=\int_0^\infty e^{-pt}Q_k'(t)\,dt.$$

Dérivant l'égalité (5.5.4) nous obtenons

$$Q'_k(t) = Q'_{k-1}(t) - e^{-\lambda_k t} Q'_{k-1}(t) + \int_0^t \Lambda_k e^{-\lambda_k \tau - \Lambda_k (t-\tau)} Q'_{k-1}(\tau)\, d\tau.$$

Multipliant cette égalité par e^{-pt} et intégrant en t nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} a_k(p) &= a_{k-1}(p) - \frac{p}{p+\Lambda_k} a_{k-1}(p+\lambda_k), \\ a_1(p) &= \frac{\Lambda_1}{\Lambda_1+p}. \end{aligned}\right\} \tag{5.5.5}$$

Nous en déterminons $a_n(p)$, qui, comme on le remarque aisément, est une fraction rationnelle dont les zéros du dénominateur sont connus

$$a_n(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{A(p)}{(p+p_1)\dots(p+p_n)}.$$

La transformation inverse de Laplace conduit à la formule

$$Q_n(t) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{A(-p_k)}{p_k B'(-p_k)} e^{-p_k t}. \tag{5.5.6}$$

(On aurait pu également obtenir une formule explicite pour $Q_n(t)$, mais elle est trop volumineuse.) On détermine aisément de la formule (5.5.5) le temps moyen de fonctionnement du groupe de réserve.

Soit $T^{(k)}_{\text{moy}}$ le temps moyen de fonctionnement du groupe de réserve formé des k premiers éléments de notre grand groupe de réserve.

Il est évident que

$$T^{(k)}_{\text{moy}} = \int_0^\infty t Q'_k(t)\, dt = -a'_k(0).$$

Dérivant (5.5.6) et posant $p=0$, nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} T^{(k)}_{\text{moy}} &= T^{(k-1)}_{\text{moy}} + \frac{1}{\Lambda_k} a_{k-1}(\lambda_k), \\ T^{(1)}_{\text{moy}} &= \frac{1}{\Lambda_1}, \end{aligned}\right\} \tag{5.5.7}$$

d'où nous pouvons déterminer la grandeur $T^{(n)}_{\text{moy}}$. Etablissons maintenant une formule approchée pour $Q_n(t)$ en supposant que les fiabilités des éléments de réserve sont proches de l'unité. Cela signifie que les risques de panne λ_k et Λ_k sont petits. Nous pouvons choisir une grande unité de temps pour que les grandeurs λ_k et Λ_k ne soient pas petites. Il est alors évident que l'intervalle de temps sur lequel nous considérons notre groupe de réserve sera petit.

C'est pourquoi en établissant notre formule approchée nous pouvons adopter le schéma suivant : les grandeurs λ_k, Λ_k et n sont fixées et le temps $t \to 0$.

Développons la fonction $Q_k(t)$ en une série des puissances de t

$$Q_k(t) = A_k t^k + B_k t^{k+1} + \ldots$$

(Le développement commence à partir de t^k, car, pour qu'au cours d'un petit intervalle de temps t les k premiers éléments de notre groupe de réserve soient tombés en panne, il faut que se soient produites au moins k pannes, la probabilité de chaque panne étant de l'ordre de t, la probabilité de k pannes est de l'ordre de t^k.)

Les grandeurs $a_k(p)$ auront alors le développement

$$a_k(p) = \frac{A_k k!}{p^k} + \frac{B_k (k+1)!}{p^{k+1}} + \ldots$$

Portant cette expression dans la formule (5.5.5) et comparant les éléments des termes principaux nous obtenons

$$A_k = \frac{A_{k-1} [\Lambda_k + (k-1)\lambda_k]}{k},$$

d'où

$$A_n = \frac{\Lambda_1 (\Lambda_2 + \lambda_2)(\Lambda_3 + 2\lambda_3) \ldots [\Lambda_n + (n-1)\lambda_n]}{n!}.$$

Comme le temps $t \to 0$, nous obtenons, en conservant le premier terme du developpement suivant les puissances de t, la formule approchée

$$Q_n(t) \approx \frac{\Lambda_1 (\Lambda_1 + \lambda_2)(\Lambda_3 + 2\lambda_3) \ldots (\Lambda_n + (n-1)\lambda_n]}{n!} t^n. \quad (5.5.8)$$

(Comparez à (5.5.3).)

A l'appui de cette formule posons et résolvons le problème suivant: *dans quel ordre doit-on disposer les éléments de réserve pour que la fiabilité du groupe de réserve soit maximale* ? Il est intéressant de noter que dans le cas des réserves chargée et non chargée la fiabilité du groupe de réserve ne dépend pas de l'ordre des éléments. Supposons que l'ordre soit optimal. Dans ce cas la transposition de deux éléments voisins ne peut qu'accroître la fonction $Q_n(t)$.

C'est pourquoi

$$Q_n(t) = \frac{\Lambda_1 (\Lambda_2 + \lambda_2) \ldots [\Lambda_k + (k-1)\lambda_k](\Lambda_{k+1} + k\lambda_{k+1}) \ldots [\Lambda_n + (n-1)\lambda_n]}{n!} t^n \leqslant$$

$$\leqslant \widetilde{Q}_n(t) = \frac{\Lambda_1 (\Lambda_2 + \lambda_2) \ldots [\Lambda_k + k\lambda_k][\Lambda_{k+1} + (k-1)\lambda_{k+1}] \ldots [\Lambda_n + (n-1)\lambda_n]}{n!} t^n,$$

où $\widetilde{Q}_n(t)$ est la non-fiabilité du groupe de réserve dans lequel les k-ième et $(k+1)$-ième éléments ont été interchangés.

Simplifiant les facteurs communs, nous obtenons

$$[\Lambda_k + (k-1)\lambda_k](\Lambda_{k+1} + k\lambda_{k+1}) \leqslant (\Lambda_k + k\lambda_k)[\Lambda_{k+1} + (k-1)\lambda_{k+1}]$$

ou, après quelques transformations,

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\Lambda_{k+1}} \leqslant \frac{\lambda_k}{\Lambda_k},$$

d'où il découle que dans le cas de la disposition la plus avantageuse des éléments on doit avoir l'inégalité

$$\frac{\lambda_2}{\Lambda_2} \geqslant \frac{\lambda_3}{\Lambda_3} \geqslant \ldots \geqslant \frac{\lambda_n}{\Lambda_n}. \qquad (5.5.9)$$

On peut donner aisément une interprétation physique de ces conditions: si les fiabilités de deux éléments en état de fonctionnement sont égales, il faut d'abord utiliser celui d'entre eux qui en régime allégé est le moins fiable, car dans ce cas il est plus probable que les deux éléments pourront fonctionner; au contraire, si les deux éléments sont également fiables en régime allégé, alors on doit conférer le premier rang à celui d'entre eux qui est le plus sûr en état de fonctionnement, car le premier élément a plus de chances d'être utilisé que le suivant, lequel, au moment où son tour viendra, peut avec une plus grande probabilité tomber en panne. Les inégalités (5.5.9) donnent un sens quantitatif à ces représentations.

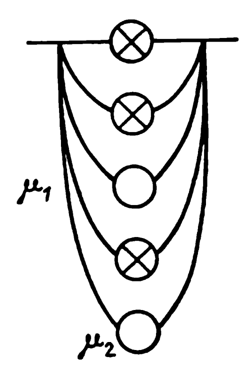


Fig. 5.5.1

Bien que la réserve allégée comporte en tant que cas particuliers extrêmes la réserve chargée et la réserve non chargée, on ne doit pas penser qu'elle représente le schéma le plus général de réservation de l'élément.

On aurait pu s'efforcer de construire par une voie uniquement déductive un tel schéma général, mais cela n'est pas nécessaire. Considérons plutôt deux schémas concrets qui nous indiqueront certaines voies d'une telle généralisation.

1) Supposons que l'on ait un élément principal et $n - 1$ éléments de réserve (fig. 5.5.1). Dans l'intervalle compris entre deux pannes voisines le risque de panne de chaque élément est constant et ne dépend que de la place qu'occupe cet élément dans la série des éléments non tombés en panne.

Soient μ_1, le risque de panne de l'élément fonctionnant à l'instant donné, et μ_2, le risque de panne de l'élément suivant non tombé en panne, etc. Grossièrement parlant, chacun des éléments non tombés en panne, au fur et à mesure que s'approche son tour de tomber en panne, s'échauffe de plus en plus. Sur la figure 5.5.1 des cinq éléments deux ne sont pas tombés en panne. Si à l'instant t s'est produite la $(k - 1)$-ième panne, le risque global de panne est alors

$$\lambda_k = \mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_{n-k},$$

et nous sommes de nouveau en présence du schéma de mort.

2) Le second schéma [4] a un caractère différent. Dans certains systèmes radio-électroniques on distingue deux types de pannes, la rupture et le court-circuit. Si dans un circuit en série un court-circuit s'est produit, l'élément ne fonctionne pas, mais le courant le traverse de sorte que le fonctionnement des autres éléments n'est pas affecté. Au contraire, si c'est une rupture qui a eu lieu, tout le circuit est mis hors service.

Dans le cas d'un couplage en parallèle, un court-circuit provoque la mise hors service de tous les éléments, car la résistance de l'élément dans lequel s'est produit le court-circuit devient pratiquement

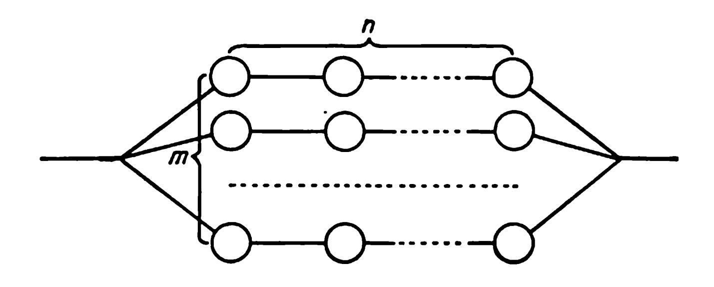


Fig. 5.5.2

nulle et le courant ne passe pas par les autres éléments. Par ailleurs, la rupture de l'un des éléments ne provoque pas la panne des autres.

Ainsi, la réservation en cas d'un court-circuit consiste en un couplage en série et en cas d'une rupture, en un couplage de plusieurs branches en parallèle, et pour se garantir de ses deux sortes de pannes nous employons un couplage série-parallèle. Chaque branche comporte n éléments, et l'on compte m branches dans le circuit (fig. 5.5.2). Pour résoudre le problème supposons que les ruptures et les courts-circuits ne modifient pas la fiabilité des éléments, qui continuent à fonctionner. Nous estimerons également que si la rupture d'un élément a eu lieu, alors un court-circuit ne peut pas se produire, et inversement.

Pour déterminer la fiabilité de tout le groupe de réserve introduisons les événements suivants. Désignons par A_{ij} le fonctionnement normal de l'élément i de la j-ième branche, par B_{ij}, la rupture de cet élément et par C_{ij}, son court-circuit. Soit A_j le fonctionnement normal de la j-ième branche; cet événement a lieu quand aucune rupture ne se produit et que dans un élément au moins on n'observe pas de court-circuit. Soit B_j la rupture de la j-ième branche qui a lieu dans le cas, où se produit la rupture d'un élément au moins de cette branche. Soit C_j le court-circuit de la j-ième branche qui a lieu quand tous ses éléments sont court-circuités.

Soit enfin A le fonctionnement normal de tout le groupe de réserve. Ces divers événements sont liés entre eux par les relations:

$$A_j = \prod_{i=1}^{n} (A_{ij} + C_{ij}) - \prod_{i=1}^{n} C_{ij},$$

$$B_j = \prod_{i=1}^{n} (A_{ij} + C_{ij}),$$

$$C_j = \prod_{i=1}^{n} C_{ij},$$

$$A = \prod_{j=1}^{m} (A_j + B_j) - \prod_{j=1}^{n} B_j.$$

Nous pouvons en tirer la fiabilité cherchée. Soit

$$p = \mathbf{P}(A_{ij}), \quad q = \mathbf{P}(B_{ij}), \quad r = \mathbf{P}(C_{ij}).$$

Nous avons alors

$$\mathbf{P}(A_j) = (p+r)^n = r^n,$$
$$\mathbf{P}(B_j) = 1 - (p+r)^n,$$

et la non-fiabilité du groupe de réserve est

$$P_{mn} = \mathbf{P}(A) = (1 - r^n)^m - [1 - (p+r)^n]^m. \qquad (5.5.10)$$

Cette formule permet, par exemple, de calculer pour un nombre donné d'éléments de réserve $N = mn$ la longueur optimale des branches pour laquelle la fiabilité P_{mn} est maximale.

On étudie exactement de la même manière le schéma dans lequel les groupes d'éléments reliés en parallèle constituent une chaîne en série. Bien entendu, nous n'avons considéré qu'une variante des plus simples et, partant, pas très réelle de notre problème. Le schéma peut être compliqué de diverses manières; il est rationnel, par exemple, d'estimer qu'après une rupture il ne peut pas se produire de court-circuit, mais qu'après un court-circuit il peut se produire une rupture et cela avec une autre probabilité; il est également naturel de supposer que les courts-circuits dans la branche modifient la fiabilité de ses éléments et que la rupture d'une branche modifie la fiabilité des éléments des autres branches.

§ 5.6. Prise en considération de la non-fiabilité des commutateurs

Pour débrancher l'élément tombé en panne et brancher à sa place dans le système un élément de réserve il faut un certain dispositif que nous appellerons dans ce qui suit *commutateur*. Bien entendu,

le rôle de ce « commutateur » peut être tenu par un opérateur, mais en règle générale dans ce cas il faudra un laps de temps appréciable pour trouver et remplacer l'élément défectueux. Là où de tels arrêts dans le fonctionnement du système sont absolument inadmissibles ou indésirables, on a recours à des commutateurs automatiques, qui à l'instant de la panne d'un élément branchent automatiquement l'élément suivant.

Nous avons estimé jusqu'ici, lors du calcul de la fiabilité du groupe de réserve, que les commutateurs sont absolument sûrs, de sorte que nous ne les avons pas pris en considération. Cependant, les commutateurs réels peuvent eux aussi tomber en panne. Nous passerons maintenant au calcul de la fiabilité du groupe de réserve en tenant compte de ce facteur.

Nous résolverons d'abord ce problème dans des hypothèses très simples. Nous estimerons que le commutateur ne peut tomber en panne qu'à l'instant de branchement et que la probabilité de cette panne ne dépend pas du numéro de l'élément de réserve que l'on branche, ni du temps de fonctionnement des éléments de réserve précédents. Nous supposerons enfin que le commutateur fonctionne également dans le cas, où il doit opérer le branchement d'un élément de réserve déjà tombé en panne. Nous pouvons alors considérer deux cas.

Dans le *premier* cas le groupe de réserve tombe en panne dès que le commutateur tombe en panne (cela aura lieu, par exemple, dans le cas, où l'on a prévu un seul commutateur pour tous les éléments de réserve, ou dans le cas, où la panne de l'un des commutateurs entrave le fonctionnement des autres).

Dans le *second* cas chaque élément de réserve possède son propre commutateur. Si l'un des commutateurs tombe en panne un autre vient le remplacer.

Considérons séparément ces cas pour les réserves chargée et non chargée. Nous supposerons pour plus de simplicité que tous les éléments soient également fiables, et nous désignerons leur fiabilité par $p(t)$ et leur non-fiabilité par $q(t)$.

a) **Réserve chargée, premier cas.** Le groupe de réserve se compose d'un élément principal, de $n - 1$ éléments de réserve et de $n - 1$ commutateurs.

Soit A_k l'événement consistant en ce que le k-ième commutateur sera le premier à tomber en panne et A_n, l'événement consistant en ce que tous les commutateurs fonctionneront. Si α désigne la probabilité de la panne d'un commutateur, alors

$$\mathbf{P}\{A_k\} = \alpha(1-\alpha)^{k-1}, \quad \mathbf{P}\{A_n\} = (1-\alpha)^{n-1}.$$

Si l'événement A_k a eu lieu, alors dans notre groupe de réserve fonctionneront l'élément principal et le $(k - 1)$-ième élément de

réserve.

C'est pourquoi, en vertu de la formule des probabilités totales, la non-fiabilité du groupe de réserve sera

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n-1} (1-\alpha)^{k-1} \alpha q^k + (1-\alpha)^{n-1} q^n = \frac{q\alpha + pq^n (1-\alpha)^n}{p+\alpha q}. \quad (5.6.1)$$

Avec la croissance de n cette non-fiabilité tend vers une limite différente de zéro

$$Q_n \to \frac{q\alpha}{p+q\alpha}.$$

C'est la non-fiabilité minimale que l'on peut atteindre dans le cas considéré.

Si $p(t)=e^{-\lambda t}$, nous pouvons calculer, en vertu de la formule (5.6.1), le temps moyen

$$T_{\text{moy}}^{(n)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\alpha)^{k-1}}{k}.$$

b) **Réserve chargée, second cas.** Soit A_k l'événement consistant en ce qu'au cours du fonctionnement du groupe de réserve k des $n-1$ commutateurs ont fonctionné

$$\mathbf{P}(A_k) = C_{n-1}^k (1-\alpha)^k \alpha^{n-k-1}.$$

La non-fiabilité du groupe de réserve est alors

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (1-\alpha)^k \alpha^{n-k-1} q^{k+1} = q\,[(1-\alpha)\,q+\alpha]^{n-1}. \quad (5.6.2)$$

Dans ce cas $Q_n(t)$ tend vers zéro avec la croissance de n et, par conséquent, en augmentant le nombre d'éléments de réserve, nous pouvons atteindre une fiabilité aussi élevée que nous voulons du groupe de réserve.

Si $p(t) = e^{-\lambda t}$, le temps moyen de fonctionnement du groupe de réserve est

$$T_{\text{moy}}^{(n)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\alpha^k}{k} + \frac{\alpha}{\lambda} \frac{1-\alpha^n}{n(1-\alpha)}.$$

c) **Réserve non chargée, premier cas.** Supposons que l'événement A_k ait le même sens que dans le point a). Désignons par $\widetilde{Q}_k(t)$ la non-fiabilité du groupe de k éléments comportant des commutateurs absolument sûrs. Nous avons alors, en vertu de la formule des probabilités totales,

$$Q_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(A_k)\, \widetilde{Q}_k(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha (1-\alpha)^{k-1} \widetilde{Q}_k(t) + (1-\alpha)^{n-1} \widetilde{Q}_n(t). \quad (5.6.3)$$

A l'appui de cette formule il n'est pas difficile de calculer le temps moyen de fonctionnement du groupe de réserve $T^{(n)}_{\text{moy}}$. Si t_{moy} est le temps moyen de fonctionnement de l'élément, alors

$$T^{(n)}_{\text{moy}} = \left[\sum_{k=1}^{n-1} \alpha (1-\alpha)^{k-1} k + n (1-\alpha)^{n-1}\right] t_{\text{moy}} = \frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha} t_{\text{moy}}. \tag{5.6.4}$$

Le plus grand temps moyen auquel nous pouvons parvenir en augmentant indéfiniment le nombre d'éléments de réserve est

$$T^{\infty}_{\text{moy}} = \lim_{n\to\infty} T^{(n)}_{\text{moy}} = \frac{t_{\text{moy}}}{\alpha}.$$

Si la fiabilité des éléments suit une loi exponentielle

$$p^{(t)} = e^{-\lambda t},$$

nous pouvons obtenir une expression finie pour la non-fiabilité $Q_n(t)$. Dans ce cas nous avons

$$\widetilde{Q}_k(t) = \int_0^{\lambda t} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-x}\, dx = 1 - \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^s}{s!} e^{-\lambda t}.$$

Portant ces valeurs dans la formule (5.6.3) et transformant la somme obtenue, nous parvenons à l'expression définitive

$$P_n(t) = 1 - Q_n(t) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{[\lambda t (1-\alpha)]^s}{s!} e^{-\lambda t}. \tag{5.6.5}$$

Avec la croissance de n la fiabilité tend vers la limite

$$\lim_{n\to\infty} P_n(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{[\lambda t (1-\alpha)]^s}{s!} e^{-\lambda t} = e^{-\alpha\lambda t}.$$

Cette égalité montre que dans le cas des commutateurs non fiables du premier type la fiabilité ne peut être rendue aussi élevée que l'on veut.

Si $\lambda t \ll 1$, on peut utiliser la formule approchée

$$Q_n(t) \approx \alpha\lambda t + \frac{[\lambda t (1-\alpha)]^n}{n!}. \tag{5.6.6}$$

Il en découle, par ailleurs, qu'il n'est pas rationnel de prendre le nombre d'éléments de réserve très élevé. Si

$$\frac{[\lambda t (1-\alpha)]^n}{n!} \ll \alpha\lambda t,$$

l'adjonction d'éléments de réserve complémentaires n'augmente pas notablement la fiabilité. Par exemple, si $\lambda t = 0,1$; $\alpha = 0,01$, il n'est pas rationnel d'avoir plus de deux éléments de réserve, puisque

$$\frac{(0,1)^3}{3!} < 0,001.$$

d) **Réserve non chargée, second cas.** Supposons que l'événement A_k ait le même sens que dans le point b) et que $\widetilde{Q}_k(t)$ désigne, comme auparavant, la non-fiabilité du groupe de k éléments dont les commutateurs sont absolument sûrs. Dans ce cas nous avons

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (1-\alpha)^k \alpha^{n-k-1} \widetilde{Q}_{k+1}(t). \tag{5.6.7}$$

On peut montrer qu'à la différence du cas précédent

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(t) \equiv 1.$$

Cela signifie qu'en augmentant le nombre d'éléments de réserve, on peut atteindre une fiabilité aussi élevée que l'on veut du groupe de réserve. La formule (5.6.7) permet de calculer aisément le temps moyen de fonctionnement du groupe de réserve

$$T_{\text{moy}}^{(n)} = t_{\text{moy}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (1-\alpha)^k \alpha^{n-k-1} (k+1) =$$
$$= t_{\text{moy}} [1 + (n-1)(1-\alpha)]. \tag{5.6.8}$$

Dans le cas de la loi exponentielle $p(t) = e^{-\lambda t}$, la formule (5.6.7) est de la forme

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (1-\alpha)^k \alpha^{n-k-1} \int_0^{\lambda t} \frac{x^k}{k!} e^{-x}\, dx \tag{5.6.9}$$

et ne peut plus être simplifiée.

Elle permet toutefois d'obtenir de simples formules approchées. Si, par exemple, $\lambda t \ll 1$, on peut alors calculer les valeurs approchées des intégrales et poser

$$\int_0^{\lambda t} \frac{x^k}{k!} e^{-x}\, dx \approx \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!},$$

et si les probabilités α sont petites, il suffit de conserver dans la somme (5.6.9) un ou deux derniers termes seulement.

Les problèmes que nous avons considérés n'épuisent pas, bien entendu, tous les cas qui peuvent se présenter lors de la réservation avec des commutateurs non fiables.

En premier lieu, les commutateurs peuvent tomber en panne non seulement à l'instant de branchement, mais aussi à d'autres instants.

En second lieu, le commutateur peut parfois fonctionner spontanément à un instant aléatoire du temps et brancher un élément de réserve, alors que cela n'est pas encore nécessaire. Nous appellerons un tel événement la *commutation erronée*.

Il s'est avéré possible de résoudre le problème, c'est-à-dire de trouver la fiabilité du groupe de réserve en tenant compte de ces deux facteurs.

Considérons la réserve non chargée. Supposons que le groupe de réserve se compose de l'élément principal et de n éléments de réserve dont la fiabilité suit une loi exponentielle

$$p(t) = e^{-\lambda t}.$$

Nous supposons encore que la panne du commutateur *ne soit pas réparable*, autrement dit, après une telle panne le groupe de réserve cesse de fonctionner quand tombe en panne l'élément de réserve durant le fonctionnement duquel le commutateur est tombé en panne.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, la panne du commutateur peut être de deux types. C'est, en premier lieu, une panne « graduelle », se produisant durant le fonctionnement de l'un des éléments. Nous estimerons que le temps s'écoulant avant qu'une telle panne se produise est distribué suivant une loi exponentielle de paramètre μ. En second lieu, le commutateur peut tomber en panne à l'instant de branchement. Nous désignerons par α la probabilité de cet événement.

Nous estimons que les pannes des deux types sont indépendantes. En outre, nous supposons l'indépendance de l'apparition des pannes aux instants de commutation. Supposons encore que le flux des commutations erronées soit poissonien de paramètre ν et que les commutations erronées puissent se produire tant que le commutateur fonctionne. Nous estimerons, enfin, que les pannes des éléments, les pannes du commutateur et les commutations erronées sont *indépendantes*.

Construisons un processus de Markov décrivant le fonctionnement de notre groupe de réserve et élaborons le système d'équations différentielles qui lui correspond ; résolvant ce système nous trouverons la fiabilité cherchée du groupe de réserve.

Numérotons les éléments, en affectant l'élément principal de l'indice 0 et les éléments de réserve des indices 1, 2, 3, . . ., n.

Introduisons les états suivants caractérisant le fonctionnement du groupe de réserve :

$$(k, 1), \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

le k-ième élément fonctionne et le commutateur est en bon état ;

$$(k, 0), \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

le k-ième élément fonctionne et le commutateur est défectueux; (0), le groupe de réserve ne fonctionne pas. Désignons respectivement la probabilité de ces états à l'instant t par

$$p_{k1}(t),\ p_{k0}(t),\ p_0(t).$$

Il est évident que $p_0(t)$ est la non-fiabilité cherchée du groupe de réserve. Au cours d'un intervalle de temps infiniment petit Δt les passages suivants d'un état à l'autre sont possibles:

1) $$(k,\ 1) \rightarrow (k+1,\ 1),\ k < n,$$

il s'est produit soit la panne du k-ième élément, soit la commutation erronée durant laquelle le commutateur a fonctionné. La probabilité de cet événement est $(\lambda+\nu)(1-\alpha)\Delta t + o(\Delta t)$.

2) $$(k,\ 1) \rightarrow (k,\ 0),$$

le commutateur est tombé en panne. La probabilité de cet événement est $\mu\Delta t + o(\Delta t)$.

3) $$(k,\ 1) \rightarrow (0),$$

il s'est produit soit la panne de l'élément, soit la commutation erronée et le commutateur n'a pas fonctionné. La probabilité de cet événement est $(\lambda+\nu)\alpha\Delta t + o(\Delta t)$.

4) $$(k,\ 1) \rightarrow (k,\ 1),$$

l'état du système n'a pas changé. La probabilité de cet événement est $1-(\lambda+\mu+\nu)\Delta t + o(\Delta t)$.

5) $$(n,\ 1) \rightarrow (n,\ 0),$$

le commutateur est tombé en panne. La probabilité de cet événement est $\mu\Delta t + o(\Delta t)$.

6) $$(n,\ 1) \rightarrow (0),$$

le dernier élément est tombé en panne ou une commutation erronée s'est produite. La probabitité de cet événement est $(\lambda+\nu)\Delta t + o(\Delta t)$,

7) $$(n,\ 1) \rightarrow (n,\ 1),$$

l'état du système n'a pas changé.

8) $$(k,\ 0) \rightarrow (0),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

un élément est tombé en panne. La probabilité de cet événement est $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$.

9) $$(k,\ 0) \rightarrow (0),$$

aucune modification n'a eu lieu. La probabilité de cet événement est $1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$.

10) $$(0)\rightarrow(0),$$

cet événement a une probabilité unité.

Il est aisé maintenant de composer le système d'équations différentielles

$$\left.\begin{aligned} &p'_{01}=-(\lambda+\mu+\nu)\,p_{01},\\ &p'_{k1}=(\lambda+\nu)(1-\alpha)\,p_{k-1,1}-(\lambda+\mu+\nu)\,p_{k1},\\ &k=1,2,\ldots,n,\\ &p'_{k0}=\mu p_{k1}-\lambda p_{k0},\quad k=0,1,\ldots,n,\\ &p'_0=\sum_{k=0}^{n-1}p_{k1}(\lambda+\nu)\,\alpha+p_{n1}(\lambda+\nu)+\sum_{k=0}^{n}p_{k0}\lambda. \end{aligned}\right\}\qquad(5.6.10)$$

Les conditions initiales sont

$$p_{01}(0)=1,\quad p_{k1}(0)=0,\quad k\rightarrow 0,$$
$$p_{k0}(0)=0,\quad p_0(0)=0.$$

Pour résoudre ce système utilisons la transformation de Laplace et introduisons les fonctions

$$a_{k1}(z)=\int_0^\infty p_{k1}(t)\,e^{-zt}\,dt,$$

$$a_{k0}(z)=\int_0^\infty p_{k0}(t)\,e^{-zt}\,dt,$$

$$a_0(z)=\int_0^\infty p_0(t)\,e^{-zt}\,dt.$$

Le système s'écrit alors pour ces fonctions, compte tenu des conditions initiales, sous la forme

$$\begin{aligned} &-1+za_{01}=-(\lambda+\mu+\nu)\,a_{01},\\ &za_{k1}=(\lambda+\nu)(1-\alpha)\,a_{k-1,1}-(\lambda+\mu+\nu)\,a_{k1},\\ &za_{k0}=\mu a_{k1}-\lambda a_{k0},\\ &za_0=\alpha(\lambda+\nu)\sum_{k=0}^{n-1}a_{k1}+a_{n1}(\lambda+\nu)+\lambda\sum_{k=0}^{n}a_{k0}. \end{aligned}$$

La solution de ce système se trouve simplifiée grâce au fait qu'il se scinde en trois sous-systèmes. Résolvant le premier d'entre eux nous trouvons a_{k1} ; portant cette valeur dans le second sous-système nous

trouvons a_{k0} et portant ces deux valeurs dans la dernière équation nous trouvons $a_0(z)$. Le résultat des calculs nous donne

$$a_{k1}(z)=\frac{[(\lambda+\nu)(1-\alpha)]^k}{(z+\lambda+\mu+\nu)^{k+1}}=\frac{\lambda_2^k}{(z+\lambda_1)^{k+1}},$$

$$a_{k0}=\frac{\mu}{z+\lambda}a_{k1}=\frac{\mu}{z+\lambda}\frac{\lambda_2^k}{(z+\lambda_1)^{k+1}},$$

où $\lambda_1=\lambda+\mu+\nu$ et $\lambda_2=(\lambda+\nu)(1-\alpha)$. Nous en tirons

$$za_0=\left[\alpha(\lambda+\nu)+\frac{\lambda\mu}{z+\lambda}\right]\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_2^k}{(z+\lambda_1)^{k+1}}+\frac{\lambda_2^{n+1}}{(z+\lambda_1)^{n+1}}. \quad (5.6.11)$$

Effectuant la transformation inverse de Laplace nous pouvons obtenir une expression explicite pour $p_0(t)$ sous forme d'une somme volumineuse de termes du type poissonien. Pour des petites valeurs de n cette somme peut d'ailleurs être aisément calculée. A l'appui de (5.6.11) on peut facilement calculer le temps moyen de fonctionnement du groupe de réserve

$$T_n=\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)\frac{1-\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n+1}}{\lambda_1-\lambda_2}. \quad (5.6.12)$$

Il n'est pas difficile à l'aide de cette formule d'établir comment les paramètres λ, μ, ν, α influent sur la fiabilité du groupe de réserve.

§ 5.7. Quelques questions essentielles de la réservation des systèmes

L'échelle de la réservation. Au cours de la réservation du système une réserve peut être prévue soit pour certains éléments du système, soit pour des blocs d'éléments, soit pour le système en entier. Nous appellerons *échelle de réservation* le niveau de réservation du système. Plus grande est la partie du système pour laquelle une unité de réserve est constituée, plus l'échelle de réservation est grande.

Démontrons que tant pour la réserve chargée que pour la réserve non chargée, toute augmentation de l'échelle de réservation fait diminuer la fiabilité du système. On peut se représenter toute augmentation de l'échelle de réservation de la manière suivante:

Le système comporte m parties et chacune de ses parties possède n parties semblables de réserve (fig. 5.7.1). *Ces parties forment dans le système un certain bloc. Réunissant toutes les premières, secondes, etc., parties de réserve, nous obtenons n blocs de réserve, semblables aux nôtres. Nous voulons démontrer que la fiabilité du système décroît lors d'une telle réunion des réserves.*

On peut se représenter toute réunion de la réserve des parties du système comme une réunion en série de la réserve des couples de par-

ties; par exemple, en réunissant la réserve de la première et de la seconde partie, nous obtenons une nouvelle partie du système, nous réunissons sa réserve avec celle de la troisième partie du système, etc. C'est pourquoi lors de la démonstration de notre assertion nous pouvons nous borner à considérer le cas, où l'on réunit les réserves de deux parties du système. La réunion de la réserve de ces deux

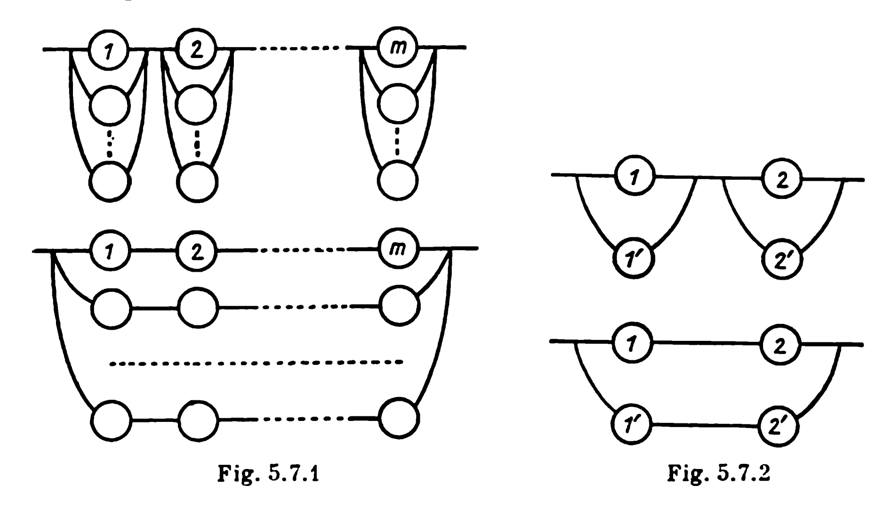


Fig. 5.7.1 Fig. 5.7.2

parties peut être considérée successivement comme la réunion de tous les premiers éléments de réserve, puis de tous les seconds, etc. Il en découle que lors de la démonstration de notre affirmation nous pouvons nous borner au cas, où chacune des deux parties du système possède une partie de réserve (fig. 5.7.2). Considérons ainsi deux parties doubles du système. Nous désignerons chacune de ces quatre parties par le terme familier d'élément.

Soient τ_1, τ'_1, τ_2, τ'_2 les temps aléatoires de fonctionnement des éléments principaux et de leurs réserves. Nous allons comparer deux procédés de réservation et nous voulons montrer que dans le second cas la fiabilité de ce groupe de quatre éléments ne sera pas supérieure à sa fiabilité dans le premier cas.

Considérons séparément le cas de la réserve chargée et non chargée.

Réserve chargée. Le temps de fonctionnement du groupe pour le premier schéma s'exprime sous la forme

$$T_1 = \min [\max (\tau_1, \tau'_1), \max (\tau_2, \tau'_2)],$$

pour le second schéma

$$T_2 = \max [\min (\tau_1, \tau_2), \min (\tau'_1, \tau'_2)].$$

Or, il est évident que

$$T_2 \leqslant \max (\tau_1, \tau'_1)$$

et

$$T_2 \leqslant \max(\tau_2, \tau_2').$$

Par conséquent, nous avons

$$T_2 \leqslant \min[\max(\tau_1, \tau_1'), \max(\tau_2, \tau_2')] = T_1.$$

Mais l'inégalité

$$T_2 \leqslant T_1$$

signifie que pour le second schéma la fiabilité n'est pas plus grande que pour le premier schéma.

Réserve non chargée. Les temps aléatoires de fonctionnement de notre groupe s'expriment ainsi:

$$T_1 = \min[(\tau_1 + \tau_1'), (\tau_2 + \tau_2')],$$
$$T_2 = \min[(\tau_1, \tau_2) + \min(\tau_1', \tau_2').$$

Or, il est évident que

$$T_2 \leqslant \tau_1 + \tau_1' \text{ et } T_2 \leqslant \tau_2 + \tau_2'.$$

Par conséquent, nous avons

$$T_2 \leqslant \min[(\tau_1 + \tau_1'), \quad (\tau_2 + \tau_2')] = T_1,$$

et nous retrouvons le même résultat. Il est intéressant de noter que cette conclusion ne dépend nullement de la loi de fiabilité de l'élément. Ainsi, *plus l'échelle de la réservation est grande, plus la fiabilité est faible.*

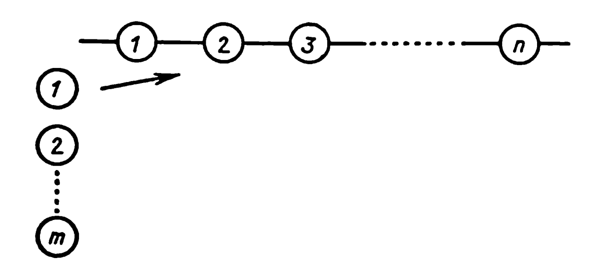


Fig. 5.7.3

Réserve mouvante. Le système se compose habituellement de groupes d'éléments identiques. Dans ce cas, au lieu de former une réserve pour chaque élément particulier, on peut réunir tous les éléments de réserve et élaborer ainsi une réserve dite *mouvante* (fig. 5.7.3).

Ainsi, on dispose d'un groupe d'éléments principaux identiques (interchangeables) et d'un groupe d'éléments de réserve. Quand l'un

des éléments principaux tombe en panne, il est remplacé par l'élément suivant de la réserve. La panne de tout le groupe de réserve a lieu à l'instant de la panne de l'un des éléments principaux après que l'on ait épuisé tous les éléments de la réserve (qui ont été utilisés ou sont tombés en panne en attendant leur tour d'être utilisés).

On peut calculer aisément la fiabilité du groupe de réserve dans le cas d'une réserve mouvante.

Nous supposerons que les fiabilités de tous les éléments, principaux et de réserve, sont identiques et égales à $p(t)$ et les non-fiabilités, à $q(t)$. Considérons séparément les cas de réserves chargée et non chargée.

Réserve chargée. Soient n, le nombre d'éléments principaux, et m, le nombre d'éléments de réserve. Il est évident que notre groupe de réserve ne tombera pas en panne au cours du temps t quand et seulement quand il ne se produira pas plus de m pannes au cours de ce laps de temps.

Par conséquent, la fiabilité du groupe de réserve est

$$P_{nm}(t) = \sum_{k=0}^{m} C_{m+n}^{k} q^{k}(t)\, p^{n+m-k}(t). \qquad (5.7.1)$$

Si la fiabilité suit une loi exponentielle

$$p(t) = e^{-\lambda t},$$

on calcule aisément le temps moyen (cf. § 5.3)

$$T_{nm} = \frac{1}{\lambda(m+n)} + \frac{1}{\lambda(m+n-1)} + \ldots + \frac{1}{\lambda n}. \qquad (5.7.2)$$

Réserve non chargée. Dans le cas général, la fiabilité s'exprime sous une forme très compliquée au moyen des intégrales du type de convolution et même le temps moyen a une forme compliquée. C'est pourquoi nous supposerons que la fiabilité suit la loi exponentielle

$$p(t) = e^{-\lambda t}.$$

Dans ce cas on calcule aisément que la fiabilité du groupe de réserve est

$$P_{nm}(t) = \int_{n\lambda t}^{\infty} \frac{x^m}{m!} e^{-x}\, dx = \sum_{k=0}^{m} \frac{(n\lambda t)^k}{k!} e^{-n\lambda t}, \qquad (5.7.3)$$

étant donné que l'intensité globale de panne est égale à $n\lambda$ et que le fonctionnement du groupe de réserve cesse à l'instant de la $(m+1)$-ième panne. Le temps moyen de fonctionnement est

$$T_{nm} = \frac{m+1}{n\lambda}. \qquad (5.7.4)$$

Considérons en conclusion de ce paragraphe la question générale suivante: supposons que l'on ait deux groupes à réserve mouvante, dont l'un comprend n_1 éléments principaux et m_1 éléments de réserve et l'autre n_2 éléments principaux et m_2 éléments de réserve. Nous réunissons ces deux groupes, de sorte que le groupe unifié comportera $n_1 + n_2$ éléments principaux et $m_1 + m_2$ éléments de réserve. La fiabilité du système s'élèvera-t-elle par suite d'une telle réunion ?

Démontrons pour le cas de la fiabilité identique de tous les éléments entrant dans ces groupes que la *réunion des réserves de ces groupes augmente toujours la fiabilité du système.*

Soient $\tau_1', \tau_2', \tau_3', \ldots$ les instants successifs des pannes des éléments (principaux et de réserve) du premier groupe, $\tau_1'', \tau_2'', \ldots$ les instants successifs des pannes des éléments du second groupe. Le premier groupe tombe alors en panne à l'instant $t' = \tau'_{m_1+1}$ et le second groupe, à l'instant $t'' = \tau''_{m_2+1}$. Par conséquent, le groupe, formé par la réunion de ces deux groupes tombe en panne à l'instant $t_1 = \min(t', t'')$. Nous porterons les pannes des deux groupes sur un même axe et nous désignerons les instants des pannes du groupe unifié par

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$$

Si nous réunissons des réserves de ces deux groupes, la panne du groupe unifié se produira à l'instant $t_2 = \tau_{m_1+m_2+1}$. Supposons pour fixer les idées que

$$\tau'_{m_1+1} < \tau''_{m_2+1}.$$

Dans ce cas jusqu'à l'instant τ'_{m_1+1} ont eu lieu pas plus de m_2 pannes du second groupe et, par conséquent,

$$t_1 = \tau'_{m_1+1} = \tau_k \leqslant \tau_{m_1+m_2+1} = t_2.$$

Cela signifie que la panne du groupe unifié à réserve commune n'aura pas lieu avant la panne de ce groupe avec les réserves séparées. On peut estimer le gain obtenu lors de la réunion des réserves et comparer quantitativement les temps moyens de fonctionnement dans l'un et l'autre cas. Si la fiabilité du système suit une loi exponentielle $p(t) = e^{-\lambda t}$, le temps moyen de fonctionnement sera pour le cas des réserves séparées égal à

$$T_1 = \frac{1}{\lambda(n_1+m_2)} \sum_{s=0}^{m_2} \sum_{k=0}^{m_1} C_{k+s}^k \frac{n_1^k n_2^s}{(n_1+n_2)^{k+s}},$$

et pour le cas d'une réserve commune à

$$T_2 = \frac{m_1+m_2}{\lambda(n_1+n_2)}.$$

On peut évaluer pour des cas concrets à l'aide de ces formules le gain susceptible d'être obtenu au moyen de la réunion des réserves.

Elles permettent également de conclure que le gain minimal sera assuré dans le cas, où

$$\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2}.$$

Il n'est pas difficile de le comprendre d'un point de vue physique, car dans ce cas les deux groupes tombent en panne en moyenne simultanément, de sorte que la réunion de la réserve n'apporte presque aucun avantage.

La réserve mouvante donne un gain fort appréciable de fiabilité, mais il faut avoir en vue dans les applications concrètes un autre côté purement technique du problème : si le remplacement de l'élément tombé en panne est effectué non pas par une personne mais par un dispositif automatique, la réserve mouvante exige une énorme quantité de connexions et de commutateurs, puisque chaque élément de réserve doit être réuni avec chaque élément principal. Cette circonstance dévalorise sensiblement l'idée de la réserve mouvante.

Chapitre 6

RÉSERVATION AVEC RENOUVELLEMENT

§ 6.1. Introduction

En étudiant la réservation dans le chapitre précédent, nous avons supposé que les éléments tombés en panne ne sont pas renouvelés. On a souvent recours en pratique au renouvellement pour élever la fiabilité du système et augmenter sa durée de service. Il est naturel que pour décrire quantitativement le fonctionnement de tels systèmes il a fallu créer les méthodes et les modèles mathématiques correspondants. Il s'est alors avéré que les systèmes dans lesquels a lieu le renouvellement sont bien décrits par les méthodes de la théorie des phénomènes d'attente. On a découvert que de nombreux problèmes qui se posent en théorie de la fiabilité sont mathématiquement identiques aux problèmes connus de la théorie des phénomènes d'attente. De nombreux problèmes de la théorie de la fiabilité peuvent ainsi être traduits dans le langage de la théorie des phénomènes d'attente, si par exemple on remplace le terme « demande » par le terme « panne» et le terme « service » par le terme « réparation ».

La liaison reconnue entre la théorie de la fiabilité et la théorie des phénomènes d'attente a enrichi ces deux disciplines scientifiques. On peut ainsi utiliser en théorie de la fiabilité les méthodes et les solutions toutes prêtes de la théorie des phénomènes d'attente. Par ailleurs, de nouvelles idées, de nouvelles positions des problèmes provenant de l'interprétation sous l'angle de la théorie de la fiabilité apparurent en théorie des phénomènes d'attente.

Quand on étudie la réservation avec renouvellement, on suppose habituellement que la *durée de vie est distribuée suivant une loi exponentielle*. Dans ces conditions le fonctionnement du système est toujours décrit par un processus homogène de Markov, avec un nombre fini (parfois dénombrable) d'états. Le plus souvent on se borne à l'étude des processus en régime permanent, et alors le problème de la description du fonctionnement du système se ramène à la résolution d'un système d'équations algébriques.

Dans de nombreux problèmes de ce genre on utilise avec succès le processus dit *de naissance et de mort* que l'on appliquait auparavant en théorie des phénomènes d'attente, en biologie, en médecine, etc.

Dans le présent chapitre ce processus sera étudié en détail et appliqué au cas des problèmes de la théorie de la fiabilité. Nous avons déjà mentionné plus haut que lors de la description d'un système

avec renouvellement, on suppose habituellement que toutes les lois de distribution sont des lois exponentielles. Il semble, toutefois, que pour la plupart des systèmes ces suppositions ne sont pas justes, ainsi, par exemple, le temps de renouvellement n'est presque jamais distribué, même approximativement, suivant une loi exponentielle. Néanmoins, aujourd'hui encore presque tous les problèmes de la théorie de la fiabilité sont résolus dans l'hypothèse des distributions exponentielles. Le fait est qu'il n'y a pas d'autre issue; si l'on rejette l'hypothèse suivant laquelle les lois de distribution sont exponentielles, tous les problèmes se compliquent énormément. Ces dernières années on a résolu en théorie des phénomènes d'attente divers problèmes pour lesquels une partie des lois de distribution ou même toutes les lois de distribution sont arbitraires. On a élaboré des méthodes de résolution de ces problèmes (théories des chaînes de Markov incluses, méthode des équations intégro-différentielles, méthodes utilisant l'identité de Spitzer, etc.). Ces méthodes sont malheureusement très peu appliquées en théorie de la fiabilité. La cause réside non seulement dans le fait que ces méthodes sont compliquées et difficilement accessibles aux ingénieurs, mais également dans ce que la résolution de ces problèmes conduit à des formules volumineuses, se prêtant difficilement aux calculs.

Il semble que la seule voie, capable de franchir ce fossé entre la théorie ayant donné la solution de nombreux problèmes et la pratique qui ne peut utiliser ces solutions, consiste à rechercher des formules approchées, à démontrer divers théorèmes asymptotiques, dont on peut dégager des formules approchées.

Nous accordons dans ce chapitre une grande attention à l'établissement des formules approchées. Nous considérons spécialement le cas du doublage, quand le groupe de réserve se compose de deux éléments. Tous les problèmes que l'on peut poser dans ce cas se résolvent dans des hypothèses très larges.

§ 6.2. Doublage avec renouvellement *

Nous considérerons tout d'abord le cas le plus simple de réservation, le doublage, quand à chaque élément en fonctionnement on associe un élément de réserve, qui, en cas de panne de l'élément en fonctionnement, vient le remplacer. Nous appellerons succinctement le groupe de réserve composé de deux éléments un *couple*.

En théorie de la réservation sans renouvellement il n'était pas important d'étudier séparément ce cas. Maintenant que nous avons entrepris l'étude de la réservation avec le renouvellement des élé-

---

* Les résultats de ce paragraphe appartiennent principalement à B. Gnédenko.

ments tombés en panne, il est raisonnable de considérer séparément le cas de doublage, étant donné que cela nous permet de résoudre de nombreux problèmes dans des hypothèses les plus générales [1] à [4].

1°. Supposons tout d'abord que la durée de vie de l'élément suit une loi exponentielle et que le temps de renouvellement (ou de réparation) est arbitrairement distribué. Considérons le cas général d'une réserve allégée. Soient λ, le risque de panne de l'élément en fonctionnement, λ_1, le risque de panne de l'élément de réserve, et $G(t)$, la loi de distribution du temps de réparation. Il est évident que pour $\lambda_1 = 0$ nous obtenons le cas de la réserve non chargée, et pour $\lambda = \lambda_1$, le cas de la réserve chargée. Nous estimons que les deux éléments, principal et de réserve, sont identiques mais qu'à l'état de réserve le risque de panne est moindre qu'à l'état de fonctionnement. Quand l'élément principal tombe en panne, il est immédiatement remplacé par l'élément de réserve; l'élément principal commence alors à être renouvelé, et après renouvellement prend place dans la réserve. A ce moment les rôles de l'élément principal et de réserve sont inversés. Nous appellerons *cycle* la distance entre deux instants consécutifs de renouvellement. Il est clair que tous les cycles sont indépendants et identiquement distribués. La panne de notre couple se produit quand au cours d'un cycle quelconque de renouvellement de l'un des éléments l'autre tombe en panne.

Désignons par $p(t)$ la probabilité de fonctionnement sans défaillance du couple jusqu'à l'instant t. On compose aisément l'équation intégrale de la probabilité $p(t)$. L'événement consistant dans le fonctionnement sans défaillance du couple durant $(0, t)$ se décompose en les événements incompatibles suivants:

1) La première panne a lieu après l'instant t. La probabilité de cet événement est $e^{-(\lambda+\lambda_1)t}$.

2) La première panne a lieu avant l'instant t, mais le premier cycle se termine après l'instant t. L'élément de réserve, branché à l'instant de la panne, fonctionne sans défaillance jusqu'à l'instant t. La probabilité de cet événement est

$$\int_0^t (\lambda+\lambda_1)\, e^{-(\lambda+\lambda_1)x}\, [1-G(t-x)]\, e^{-\lambda(t-x)}\, dx.$$

3) Le premier cycle se termine avant l'instant t, le second élément fonctionne sans défaillance durant le premier renouvellement et au cours du laps de temps restant jusqu'à l'instant t le couple fonctionne sans défaillance. La probabilité de cet événement est

$$\int_0^t p(t-x)\, dx \int_0^x (\lambda+\lambda_1)\, e^{-(\lambda+\lambda_1)z-\lambda(x-z)} g(x-z)\, dz,$$

où $g(x) = G'(x)$.

Ajoutant ces trois probabilités, nous obtenons évidemment la probabilité cherchée

$$p(t)=e^{-(\lambda+\lambda_1)t}+e^{-\lambda t}(\lambda+\lambda_1)\int_0^t e^{-\lambda_1 x}[1-G(t-x)]\,dx+$$
$$+\int_0^t p(t-x)\,e^{-\lambda x}(\lambda+\lambda_1)\,dx\int_0^x e^{-\lambda_1 z}g(x-z)\,dz. \qquad (6.2.1)$$

Nous avons obtenu une équation intégrale de la forme

$$p(t)=A(t)+\int_0^t p(t-x)B(x)\,dx,$$

où

$$A(t)=e^{-(\lambda+\lambda_1)t}+e^{-\lambda t}(\lambda+\lambda_1)\int_0^t e^{-\lambda_1 x}[1-G(t-x)]\,dx,$$

$$B(t)=e^{-\lambda t}(\lambda+\lambda_1)\int_0^t e^{-\lambda z}g(t-z)\,dz.$$

Nous pouvons en obtenir un développement en série de la probabilité $p(t)$:

$$p(t)=B_0t+B_1(t)+B_2(t)+\ldots+B_n(t)+\ldots, \qquad (6.2.2)$$

où

$$B_0(t)=A(t), \quad B_{n+1}(t)=\int_0^t B_n(t-x)\,B(x)\,dx.$$

Si le temps t est petit par rapport à la durée moyenne du cycle, on peut utiliser cette série pour calculer la probabilité $p(t)$, car elle converge rapidement, et les deux ou trois premiers termes donnent une valeur suffisamment exacte de la série. Si le temps t est grand, la série (6.2.2) n'est pratiquement d'aucune utilité. En pratique, le cas intéressant est précisément celui pour lequel la probabilité de la panne du couple au cours d'un seul cycle, égale à

$$\alpha=1-\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dG(t)=\int_0^\infty (1-e^{-\lambda t})\,dG(t),$$

est petite, et par conséquent, la durée moyenne de vie du couple est de nombreuses fois plus grande que la durée moyenne du cycle. Pour étudier le comportement asymptotique de la probabilité $p(t)$ quand $\alpha\to 0$, appliquons la transformation de Laplace. Introduisons

les notations

$$a(s)=\int_0^\infty e^{-st}A(t)\,dt,\quad c(s)=\int_0^\infty e^{-st}\,dG(t),$$

$$b(s)=\int_0^\infty e^{-st}B(t)\,dt,\quad \varphi(s)=\int_0^\infty e^{-st}p(t)\,dt.$$

Nous calculons aisément les fonctions $a(s)$ et $b(s)$:

$$a(s)=\frac{s+\lambda+(\lambda+\lambda_1)[1-c(s+\lambda)]}{(s+\lambda+\lambda_1)(s+\lambda)},\quad b(s)=\frac{(\lambda+\lambda_1)c(s+\lambda)}{\lambda+\lambda_1+s}.$$

De l'équation (6.2.1) nous obtenons

$$\varphi(s)=\frac{a(s)}{1-b(s)}=\frac{s+\lambda+(\lambda+\lambda_1)[1-c(s+\lambda)]}{(s+\lambda)[\lambda+\lambda_1+s-(\lambda+\lambda_1)c(\lambda+s)]}. \qquad (6.2.3)$$

Si τ est la durée aléatoire de vie du couple, nous avons

$$\mathrm{P}\{\tau>t\}=p(t).$$

Nous en tirons la durée moyenne de vie du couple

$$T_0=\int_0^\infty p(t)\,dt=\varphi(0)=\frac{\lambda+(\lambda+\lambda_1)[1-c(\lambda)]}{\lambda(\lambda+\lambda_1)[1-c(\lambda)]}=$$

$$=\frac{\lambda+(\lambda+\lambda_1)\alpha}{\lambda(\lambda+\lambda_1)\alpha}=\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{(\lambda+\lambda_1)\alpha}. \qquad (6.2.4)$$

Si le renouvellement des éléments n'avait pas eu lieu, la durée moyenne de vie du couple aurait été

$$T_0'=\frac{1}{\lambda+\lambda_1}+\frac{1}{\lambda}.$$

Par conséquent, le renouvellement donne un gain pour la durée moyenne de vie égal à

$$\frac{T_0}{T_0'}=\frac{\lambda+\lambda_1}{2\lambda+\lambda_1}+\frac{\lambda}{(2\lambda+\lambda_1)\alpha}. \qquad (6.2.5)$$

Plus la probabilité α de la panne du couple au cours d'un cycle est petite, plus le gain est grand.

Etudions maintenant le comportement asymptotique de la probabilité $p(t)$. A cette fin remarquons que quand $\alpha\to 0$

$$T_0=\mathrm{M}\tau\sim\frac{1}{(\lambda+\lambda_1)\alpha}.$$

C'est pourquoi il est naturel de s'attendre à ce que la distribution de la valeur normée $\alpha\tau$ convergera vers une certaine distribution limite. Il n'est pas difficile de trouver la distribution de la grandeur

$$\mathrm{P}\{\alpha\tau>t\}=p\left(\frac{t}{\alpha}\right).$$

La transformation de Laplace de cette fonction est

$$\int_0^\infty e^{-st} p\left(\frac{t}{\alpha}\right) dt = \alpha\varphi(\alpha s) = \alpha \frac{\alpha s+\lambda+(\lambda+\lambda_1)[1-c(\alpha s+\lambda)]}{(\alpha s+\lambda)[\lambda+\lambda_1+\alpha s-(\lambda+\lambda_1)c(\alpha s+\lambda)]}.$$

Supposons maintenant que les paramètres λ et λ_1 sont fixés et que la loi de distribution $G(t)$ varie de telle sorte que

$$\alpha = \int_0^\infty [1-e^{-\lambda t}]\, dG(t) \to 0.$$

Effectuons l'estimation auxiliaire

$$c(\lambda)-c(\alpha s+\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(1-e^{-\alpha s t})\, dG(t) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha s \int_0^\infty t e^{-\lambda t}\, dG(t) \leqslant \frac{\alpha s}{\lambda} \int_0^\infty (1-e^{-\lambda t})\, dG(t) = \frac{\alpha^2 s}{\lambda},$$

autrement dit,

$$c(\lambda)-c(\alpha s+\lambda) = \frac{\alpha^2 s}{\lambda}\theta, \quad \text{où} \quad 0<\theta<1.$$

Par conséquent, quand $\alpha \to 0$ uniformément pour tout intervalle fini de variation de s, on a

$$\alpha\varphi(\alpha s) = \alpha \frac{\alpha s+\lambda+(\lambda+\lambda_1)\left(\alpha+\frac{\alpha^2 s}{\lambda}\theta\right)}{(\alpha s+\lambda)\left[\alpha s+(\lambda+\lambda_1)\left(\alpha+\frac{\alpha^2 s}{\lambda}\theta\right)\right]} \to \frac{1}{s+\lambda+\lambda_1}.$$

Nous avons ainsi démontré la proposition suivante:

Si λ et λ_1 sont fixés, et

$$\alpha = \int_0^\infty (1-e^{-\lambda t})\, dG(t) \to 0,$$

alors

$$\lim_{\alpha\to 0} \mathbf{P}\{\alpha\tau > t\} = e^{-(\lambda+\lambda_1)t}. \tag{6.2.6}$$

Il en découle que pour α petit la probabilité de fonctionnement sans défaillance du couple au cours du temps t s'exprime par la formule approchée

$$p(t) \approx e^{-(\lambda+\lambda_1)\alpha t}. \tag{6.2.7}$$

Une étude plus détaillée montre qu'il est préférable d'utiliser une autre formule approchée

$$p(t) \approx e^{-\frac{t}{T_0}}, \tag{6.2.8}$$

où la valeur de T_0 est prise de (6.2.4).

Si l'erreur relative de la formule (6.2.7) est de l'ordre de α, l'erreur relative de la formule (6.2.8) est de l'ordre de α^2. Une certaine incommodité de ces formules réside dans le fait que, pour les utiliser, il faut connaître la valeur de α. Si, quand $\alpha \to 0$, la variation de la loi $G(t)$ est telle que

$$\frac{\int_0^\infty (\lambda t)^2\, dG(t)}{\int_0^\infty \lambda t\, dG(t)} = \frac{\lambda^2 M\tau_{\text{rép}}^2}{\lambda M\tau_{\text{rép}}} \to 0 \tag{6.2.9}$$

(où $\tau_{\text{rép}}$ est le temps aléatoire de la réparation), alors comme on le voit aisément,

$$\alpha = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda t})\, dG(t) = \int_0^\infty \left[\lambda t - \theta \frac{(\lambda t)^2}{2}\right] dG(t) =$$

$$= \lambda M\tau_{\text{rép}} - \theta_1 \frac{\lambda^2}{2} M\tau_{\text{rép}}^2,$$

où $0 < \theta,\ \theta_1 < 1$, et alors il découle de (6.2.9) que

$$\frac{\lambda M\tau_{\text{rép}}}{\alpha} \to 1.$$

Ainsi, si α est petit et si

$$\lambda^2 M\tau_{\text{rép}}^2 \ll \lambda M\tau_{\text{rép}},$$

alors $\lambda M\tau_{\text{rép}} \approx \alpha$ et on a la formule approchée

$$p(t) \approx e^{-(\lambda+\lambda_1)\lambda T_1 t}, \tag{6.2.10}$$

où

$$T_1 = M\tau_{\text{rép}}.$$

Cela signifie que la loi asymptotique de distribution de la durée de vie du couple ne dépend pas de la loi de distribution du temps de renouvellement $G(t)$, mais dépend uniquement du temps moyen de renouvellement T_1. Notons encore, que l'on peut aisément effectuer la vérification statistique de la condition (6.2.9).

2°. Nous avons considéré plus haut le doublage avec renouvellement pour le cas, où les durées de vie des éléments en fonctionnement et de réserve suivent une loi de distribution exponentielle. Dans divers cas cette supposition est fausse, et l'on doit considérer le cas général quand la durée de vie et le temps de renouvellement sont arbitrairement distribués. Considérons tout d'abord le cas de la réserve non chargée.

Soient $F(t)$, la loi de distribution de la durée de vie de l'élément, et $G(t)$, la loi de distribution du temps de renouvellement de l'élément. Nous supposons que l'élément se trouvant en réserve ne tombe

pas en panne et ne vieillit pas et que la réparation rétablit intégralement les propriétés initiales de l'élément. Le fonctionnement de notre couple s'effectue de la manière suivante: l'élément principal, après avoir fonctionné durant un temps aléatoire τ_0 (fig. 6.2.1), tombe en panne, puis est renouvelé durant un temps aléatoire ξ_1. A l'instant de la panne l'élément de réserve est branché instantanément et fonctionne durant un temps aléatoire τ_1. Après être tombé

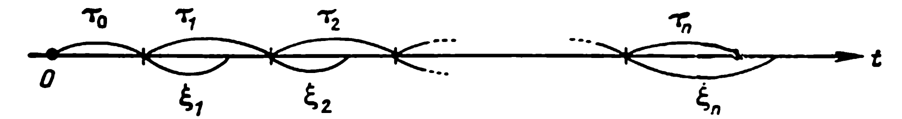


Fig. 6.2.1

en panne, l'élément de réserve est renouvelé durant un temps aléatoire ξ_2 et l'élément principal renouvelé fonctionne un temps aléatoire τ_2, etc. En vertu de nos hypothèses, les grandeurs τ_i et ξ_j sont indépendantes et

$$P\{\tau_i < t\} = F(t) \quad \text{et} \quad P\{\xi_j < t\} = G(t).$$

La panne du couple se produit quand à l'instant de la panne de l'un des éléments l'autre élément n'a pas eu le temps d'être renouvelé. Il est évident que τ peut être écrit sous la forme

$$\tau = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_\nu,$$

où ν est le numéro aléatoire de la période à la fin de laquelle se produit la panne. Pour plus de commodité nous considérons la grandeur

$$\tau' = \tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_\nu.$$

En d'autres termes, nous considérons le fonctionnement de notre couple à partir de l'instant τ_0 que nous adoptons comme instant initial. Désignons la loi de distribution de τ' par $\Phi_1(t)$.

$$\Phi_1(t) = P\{\tau' < t\}.$$

L'événement, consistant dans le fonctionnement sans défaillance du couple jusqu'à l'instant t, peut être décomposé en deux événements incompatibles:

1) La première période τ_1 se termine après l'instant t. La probabilité de cet événement est égale à

$$1 - F(t).$$

2) La première période τ_1 se termine avant l'instant t; à la fin de cette période l'élément se trouvant en réserve a le temps de se renouveler et au cours de la période restante jusqu'à l'instant t

notre couple ne tombe pas en panne. La probabilité de cet événement est

$$\int_0^t [1-\Phi_1(t-x)]\, G(x)\, dF(x).$$

Ajoutant ces deux probabilités nous obtenons la probabilité de fonctionnement sans défaillance du couple

$$1-\Phi_1(t) = 1-F(t) + \int_0^t [1-\Phi_1(t-x)]\, G(x)\, dF(x). \quad (6.2.11)$$

Si l'on désigne la loi de distribution du temps $\tau = \tau_0 + \tau'$ par $\Phi(t)$, on a alors

$$\Phi(t) = \int_0^t \Phi_1(t-x)\, dF(x). \quad (6.2.12)$$

Résolvant l'équation intégrale (6.2.11) par la méthode des approximations successives, on peut obtenir pour la fonction $\Phi_1(t)$, puis pour la fonction $\Phi(t)$ une représentation sous forme d'une série analogue à la série (6.2.2). Or, pour les mêmes raisons que celles que nous avons exposées plus haut, cette série n'est pratiquement d'aucune utilité. Le cas le plus intéressant en pratique est celui pour lequel la probabilité de la panne du couple au cours d'une seule période

$$\alpha = \int_0^\infty [1-G(t)]\, dF(t)$$

est petite. Cela signifie que le temps de renouvellement de l'élément est en moyenne notablement inférieur au temps de fonctionnement sans défaillance de l'élément. Pour étudier le comportement asymptotique de la probabilité $\Phi(t)$ quand $\alpha \to 0$, utilisons comme plus haut la transformation de Laplace. Soit

$$a(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dF(t), \qquad b(s) = \int_0^\infty e^{-st} G(t)\, dF(t),$$

$$A_1(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\Phi_1(t), \qquad A(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\Phi(t).$$

Nous obtenons alors de (6.2.11)

$$A_1(s) = \frac{a(s)-b(s)}{1-b(s)},$$

et nous trouvons de (6.2.12) que

$$A(s) = a(s)\, A_1(s) = a(s)\, \frac{a(s)-b(s)}{1-b(s)}. \quad (6.2.13)$$

Nous en tirons pour le temps de fonctionnement sans défaillance du couple

$$T_0 = -A'(0) = T_1 + \frac{T_1}{1-b(0)} = T_1 + \frac{T_1}{\alpha}, \qquad (6.2.14)$$

où $T_1 = \int\limits_0^\infty t\, dF(t)$ est la durée de vie moyenne de l'élément. La formule (6.2.14) permet d'évaluer le gain que nous obtenons du fait du renouvellement des éléments. Si le renouvellement n'avait pas eu lieu, la durée de vie moyenne du couple aurait été

$$T_0' = 2T_0.$$

Le gain obtenu est donc

$$\frac{T_0}{T_0'} = \frac{1+\alpha}{2\alpha}.$$

Plus la probabilité α de la panne au cours d'une période est petite, plus le gain est important.

Passant à l'étude du comportement asymptotique de la probabilité $\Phi(t)$, nous supposerons que la loi de distribution de la durée de vie de l'élément $F(t)$ est fixée et que la loi de distribution du temps de renouvellement $G_n(t)$ varie de telle manière que

$$\alpha_n = \int\limits_0^\infty [1 - G_n(t)]\, dF(t) \to 0.$$

Conformément à cela adjoignons un indice aux lois et aux transformations de Laplace $\Phi_n(t)$, $A_n(s)$, $b_n(s)$. Introduisons la notation

$$c_n(s) = a(s) - b_n(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st}[1 - G_n(t)]\, dF(t).$$

Il est évident que $c_n(0) = \alpha_n$. Considérons la différence

$$\alpha_n - c_n(\alpha_n s) = \int\limits_0^\infty (1 - e^{-\alpha_n st})[1 - G_n(t)]\, dF(t) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_n s \int\limits_0^\infty t[1 - G_n(t)]\, dF(t) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_n s \left[A_n \int\limits_0^\infty [1 - G_n(t)]\, dF(t) + \int\limits_{A_n}^\infty t\, dF(t)\right].$$

Si l'on pose $A_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}$, les deux termes entre crochets tendent vers zéro, et nous parvenons à la proposition suivante: *on a uniformément sur tout intervalle fini de variation de s*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n(\alpha_n s)}{\alpha_n} = 1. \qquad (6.2.15)$$

Considérons la variable aléatoire normée $\alpha_n\tau$. Sa loi de distribution est

$$\mathbf{P}\{\alpha_n\tau < t\} = \Phi_n\left(\frac{t}{\alpha_n}\right).$$

La transformation de Laplace de cette loi est

$$\int_0^\infty e^{-st}\, d\Phi_n\left(\frac{t}{\alpha_n}\right) = A_n(\alpha_n s).$$

Utilisant (6.2.15) nous obtenons alors, quand $\alpha_n \to 0$,

$$A_n(\alpha_n s) = a(\alpha_n s)\frac{c_n(\alpha_n s)}{1 - a(\alpha_n s) + c_n(\alpha_n s)} =$$

$$= a(\alpha_n s)\frac{\frac{c_n(\alpha_n s)}{\alpha_n}}{\frac{1 - a(\alpha_n s)}{\alpha_n} + \frac{c_n(\alpha_n s)}{\alpha_n}} \to \frac{1}{1 + sT_1}$$

uniformément sur tout intervalle fini de variation de s. Il en découle que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{\alpha_n\tau < t\} = 1 - e^{-\frac{t}{T_1}}. \qquad (6.2.16)$$

Cette relation limite signifie que quand la probabilité de la panne du couple au cours d'une période

$$\alpha = \int_0^\infty [1 - G(t)]\, dF(t)$$

est petite, la probabilité de fonctionnement sans défaillance du couple au cours du temps t s'exprime par la formule approchée

$$\mathbf{P}\{\tau > 1\} = 1 - \Phi(t) \approx e^{-\frac{\alpha t}{T_1}}. \qquad (6.2.17)$$

Cette formule donne une solution pratiquement acceptable de notre problème.

3°. Considérons maintenant le cas de la réserve chargée, en supposant, comme dans le problème précédent, que les lois de distribution des durées de vie et de renouvellement $F(t)$ et $G(t)$ des éléments sont arbitraires. Supposons que chaque élément fonctionne

et est renouvelé indépendamment de l'état de l'autre et que la panne se produit quand les deux éléments tombent en panne. Nous avons considéré au § 2.4 un système de n éléments, qui fonctionnent et sont renouvelés indépendamment de l'état des autres éléments. Le système tombe en panne si l'un au moins des éléments tombe en panne. On a trouvé la distribution exacte du temps de fonctionnement du système et les temps moyens de fonctionnement et de chômage du système au régime stationnaire. Il s'est alors avéré que les temps moyens s'expriment par les mêmes formules que celles que l'on obtient pour les lois exponentielles de durée de vie et de renouvellement des éléments. Si dans ce problème nous interchangeons les rôles des intervalles de fonctionnement et des intervalles de chômage, nous obtenons un système qui tombe en panne quand tombent en panne tous les éléments qui le composent, autrement dit, nous obtenons un groupe de réserve pour le cas de la réserve chargée. La dualité ainsi notée de la position des problèmes permet d'écrire immédiatement les formules donnant la solution de notre problème dans le cas général, quand le groupe de réserve se compose de n éléments.

Soient $T_1 = \int_0^\infty t\, dF(t)$, la durée de vie moyenne de l'élément, et $T_2 = \int_0^\infty t\, dG(t)$, le temps de renouvellement de l'élément. Le temps moyen de fonctionnement sans défaillance au régime stationnaire du groupe de réserve formé de n éléments (y compris l'élément principal) s'exprime ainsi:

$$T_0 = \frac{T_2}{n}\left[\left(1+\frac{T_1}{T_2}\right)^n - 1\right]. \qquad (6.2.18)$$

Bien entendu, la première période de fonctionnement sans défaillance du groupe de réserve au début de laquelle tous les éléments sont en bon état aura un temps moyen différent, un peu plus grand, mais si la grandeur $\left(1 + \frac{T_1}{T_2}\right)^n$ est grande, cette différence est peu importante. Plus encore, il découle des considérations générales que quand $\left(1 + \frac{T_1}{T_2}\right)^n \gg 1$, la loi de distribution du temps moyen de fonctionnement sans défaillance du groupe de réserve doit être suffisamment proche de la loi exponentielle. En d'autres termes, on doit avoir la formule approchée suivante: *la probabilité de fonctionnement sans défaillance du groupe de réserve au cours du temps t est*

$$\mathrm{P}\{\tau > t\} = p(t) \approx e^{-\frac{t}{T_0}}, \qquad (6.2.19)$$

où T_0 s'exprime par la formule (6.2.18).

§ 6.3. Processus de naissance et de mort

Si le problème du doublage avec renouvellement peut être résolu dans des hypothèses très larges sur les lois de distribution de la durée de vie et de renouvellement des éléments, le problème devient nettement plus difficile, quand le nombre des éléments du système est arbitraire. Dans ce cas nous sommes obligés de supposer, pour obtenir une solution efficace du problème, que la durée de vie et le temps de renouvellement des éléments sont distribués suivant une loi exponentielle. Dans cette hypothèse la description du système avec renouvellement se ramène à l'étude d'un certain processus homogène de Markov avec un nombre fini ou dénombrable d'états. L'un des processus de ce genre est celui dit de naissance et de mort [5] que l'on applique avec succès non seulement en théorie des probabilités, mais aussi en théorie des phénomènes d'attente, en biologie, en science économique, etc.

Considérons un processus homogène de Markov avec un nombre fini ou dénombrable des états que nous désignerons par les nombres 0, 1, 2, 3, . . . Si à l'instant t notre processus se trouve à l'état k, il passera au cours d'un laps de temps infiniment petit Δt avec une probabilité $\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$ à l'état $(k+1)$, avec une probabilité $\mu_k \Delta t + o(\Delta t)$ à l'état $(k-1)$ et avec une probabilité $1-(\lambda_k + \mu_k)\Delta t + o(\Delta t)$ il restera à l'état k. De l'état initial 0 il peut passer à l'état 1 avec une probabilité $\lambda_0 \Delta t + o(\Delta t)$ et rester à l'état 0 avec une probabilité $1-\lambda_0 \Delta t + o(\Delta t)$. Si le nombre des états est fini et égal à n, le processus peut de l'état n passer à l'état $(n-1)$ avec une probabilité $\mu_n \Delta t + o(\Delta t)$ et rester à l'état n avec une probabilité $1-\mu_n \Delta t + o(\Delta t)$. Le processus ainsi défini s'appelle *processus de naissance et de mort*. Désignons par $p_k(t)$ la probabilité pour qu'à l'instant t le processus se trouve à l'état k. Comparant le comportement du processus à deux instants infiniment proches du temps t et $t+\Delta t$, nous obtenons d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} p_k(t+\Delta t) = p_{k-1}(t)\,[\lambda_{k-1}\Delta t + o(\Delta t)] &+ \\ + p_k(t)\,[1-(\lambda_k+\mu_k)\,\Delta t + o(\Delta t)] &+ \\ + p_{k+1}(t)\,[\mu_{k+1}\Delta t + o(\Delta t)] &+ o(\Delta t). \end{aligned}$$

Faisons passer le terme $p_k(t)$ dans le premier membre, divisons les deux membres de l'égalité par Δt et faisons tendre Δt vers zéro. Nous obtenons à la limite l'équation

$$p'_k(t) = \lambda_{k-1}p_{k-1}(t) - (\lambda_k+\mu_k)\,p_k(t) + \mu_{k+1}p_{k+1}(t).$$

On établit de même l'équation pour le cas $k=0$

$$p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t).$$

Si le processus possède un nombre fini d'états, cette dernière équation est de la forme

$$p'_n(t) = \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) - \mu_n p_n(t).$$

Posons $\mu_0 = \lambda_{-1} = 0$, et dans le cas d'un nombre fini d'états $\lambda_n = 0$. Les équations auront alors, pour un k arbitraire, une forme identique

$$p'_k(t) = \lambda_{k-1}p_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k)\, p_k(t) + \mu_{k+1}p_{k+1}(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.3.1}$$

Le système obtenu d'équations différentielles détermine le comportement de notre processus. Pour que ce système ait une solution unique, il faut donner les conditions initiales $p_k(0)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, autrement dit donner les probabilités des états initiaux du processus.

Considérons d'abord le cas d'un nombre fini d'états

$$\left.\begin{array}{l} p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p'_k(t) = \lambda_{k-1}p_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k)\, p_k(t) + \mu_{k+1}p_{k+1}(t), \\ \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p'_n(t) = \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) - \mu_n p_n(t). \end{array}\right\} \tag{6.3.1'}$$

On est habituellement intéressé en pratique par le comportement du processus sur les intervalles de temps qui sont éloignés de l'instant initial. On démontre en théorie des probabilités que, pour n'importe quel état initial du processus, les limites

$$\lim_{t \to +\infty} p_k(t) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{6.3.2}$$

existent et que si pour tout $k > 0$ on a

$$\lambda_{k-1} + \mu_k \neq 0, \tag{6.3.3}$$

ces probabilités finales ne dépendent pas de l'état initial du processus. (Les conditions (6.3.3) signifient que l'ensemble des états ne se décompose pas en sous-ensembles non communiquants.) On peut donner une autre interprétation des probabilités finales, différente de celle que donne leur définition.

Considérons une fonction aléatoire unitaire $e_k(t)$ qui est égale à l'unité, si à l'instant t le processus se trouve à l'état k, et à zéro dans le cas contraire. La grandeur

$$\tau_k(T) = \frac{1}{T}\int_0^T e_k(t)\, dt$$

est alors la fraction de temps que le processus passe à l'état k dans l'intervalle $(0, T)$. On a alors la proposition suivante : *la variable aléatoire $\tau_k(T)$ converge en probabilité vers p_k quand $T \to \infty$, autrement dit pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}\{|\tau_k(T) - p_k| > \varepsilon\} = 0. \tag{6.3.4}$$

Cela signifie que pour des grandes valeurs de T on a avec une probabilité proche de l'unité $\tau_k(T) \approx p_k$.

En d'autres termes, la probabilité finale p_k est la fraction moyenne de temps que le processus passe à l'état k. Nous allons utiliser maintes fois plus bas cette probabilité ergodique du processus de Markov. Passant à la limite dans le système (6.3.1), nous obtenons pour les probabilités finales le système d'équations différentielles

$$\left.\begin{aligned} &0 = -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &0 = \lambda_{k-1} p_{k-1} - (\lambda_k + \mu_k) p_k + \mu_{k+1} p_{k+1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &0 = \lambda_{n-1} p_{n-1} - \mu_n p_n. \end{aligned}\right\} \tag{6.3.5}$$

D'autre part, la somme de toutes les probabilités est égale à l'unité

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1. \tag{6.3.6}$$

Le système (6.3.5) se résout aisément.

Introduisons la notation

$$\mu_k p_k - \lambda_{k-1} p_{k-1} = \pi_k.$$

Notre système s'écrit alors sous la forme

$$\pi_0 = 0, \quad \pi_k - \pi_{k+1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad \pi_n = 0.$$

Par conséquent,

$$\pi_k = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \dots n.$$

Si $\mu_k \neq 0$, nous avons

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} p_{k-1},$$

d'où nous tirons

$$p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{k-1}} p_0 = \theta_k p_0.$$

Nous trouvons en définitive de la condition (6.3.6)

$$p_k = \frac{\theta_k}{\sum_{s=0}^{n} \theta_s}, \qquad \theta_0 = 1. \tag{6.3.7}$$

(Remarquons que si k_0 est le plus grand numéro pour lequel $\mu_{k_0} = 0$, alors $p_0 = p_1 = \ldots = p_{k_0-1} = 0$, et $p_k = \frac{\lambda_{k-1}\cdots\lambda_{k_0}}{\mu_k\cdots\mu_{k_0+1}}$ pour $k > k_0$.) Toutes les caractéristiques unidimensionnelles de notre processus s'expriment aisément à l'aide des probabilités finales. En particulier, l'état moyen du système est

$$k_{\text{moy}} = \sum_{k=0}^{n} kp_k = \frac{\sum_{k=0}^{n} k\theta_k}{\sum_{k=0}^{n} \theta_k}. \tag{6.3.8}$$

Passons maintenant à l'étude du processus de naissance et de mort comportant un nombre infini d'états. Un tel processus ne possède pas nécessairement une distribution stationnaire. Pour qu'il en existe une, les paramètres λ_k et μ_k doivent vérifier certaines conditions. Pour trouver ces conditions, supposons que la distribution stationnaire existe. Les probabilités finales p_k doivent alors vérifier le système

$$0 = -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \lambda_{k-1} p_{k-1} - (\lambda_k + \mu_k)\, p_k + \mu_{k+1} p_{k+1},$$

$$k = 1, 2, \ldots$$

Supposons, pour simplifier, que $\mu_k \neq 0$ quand $k > 0$.

Résolvant ce système comme nous l'avons indiqué plus haut, nous obtenons

$$p_k = \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_k}\, p_0 = \theta_k p_0.$$

La somme des probabilités p_k doit être égale à l'unité, c'est pourquoi

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k p_0 = 1.$$

Comme $p_0 \neq 0$ (dans le cas contraire toutes les $p_k = 0$), la série $\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k < \infty$ et nous obtenons la première condition nécessaire pour l'existence de la distribution stationnaire. Il est un peu plus difficile d'établir la deuxième condition. Nous pouvons nous représenter notre processus comme une fonction aléatoire en escalier $\nu(t)$, qui à chaque instant t prend une valeur de k, égale à l'état du processus à ce moment.

Supposons qu'à un certain instant du temps notre processus se trouve à l'état k. Désignons le temps aléatoire s'écoulant jusqu'à

l'instant, où le processus vient pour la première fois occuper l'état l, par τ_{kl} et sa valeur moyenne, par T_{kl}. Adoptons encore les notations $\tau_{0l} = \tau_l$, $T_{0l} = T_l$. Supposons qu'à l'instant initial le processus se trouve à l'état 0. Pour trouver T_n remarquons avant tout que

$$T_n = T_{0n} = T_{01} + T_{12} + \ldots + T_{n-1,\,n}.$$

Pour déterminer la grandeur $T_{k,\,k+1}$ considérons le processus de naissance et de mort comportant un nombre fini d'états, égal à $k+1$, pour lequel les paramètres λ_i et μ_i pour $i \leqslant k$ coïncident avec les paramètres de notre processus, et $\lambda_{k+1} = 0$. Les périodes aléatoires durant lesquelles le processus se trouve à l'état $(k+1)$ sont alternées avec les périodes pour lesquelles le processus se trouve à des états inférieurs à $(k+1)$. En vertu de l'homogénéité du processus, toutes les premières périodes sont identiquement distribuées suivant la loi $1 - e^{-\mu_{k+1}t}$. Par conséquent, la durée moyenne de cette période est $T^{(1)} = \frac{1}{\mu_{k+1}}$. Toutes les périodes pour lesquelles le processus se trouve aux états inférieurs à $(k+1)$, excepté, bien entendu, la période initiale, sont également identiquement distribuées, et comme au début de cette période le processus se trouve à l'état k et à la fin de cette période passe à l'état $(k+1)$, la durée moyenne de cette période est égale à $T^{(2)} = T_{k,\,k+1}$. En outre, comme le processus est markovien, les premières et les secondes périodes sont indépendantes. La probabilité qu'a le système d'occuper l'état $(k+1)$ au régime stationnaire est égale à (cf. chapitre 2, § 3)

$$\frac{T^{(1)}}{T^{(1)} + T^{(2)}}.$$

D'autre part, cette probabilité est égale à $\tilde{p}_{k+1}$, où $\tilde{p}_i$ sont les probabilités finales du processus auxiliaire. Nous avons ainsi obtenu l'égalité

$$\tilde{p}_{k+1} = \frac{T^{(1)}}{T^{(1)} + T^{(2)}},$$

d'où nous trouvons sans difficulté $T^{(1)} = T_{k,\,k+1}$,

$$T_{k,\,k+1} = \frac{1 - \tilde{p}_{k+1}}{\tilde{p}_{k+1}} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{k} \theta_i}{\lambda_k \theta_k} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{k} p_i}{\lambda_k p_k}. \tag{6.3.9}$$

Nous en tirons le temps moyen cherché de passage de l'état zéro à l'état n

$$T_n = T_{0n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sum\limits_{i=0}^{k} \theta_i}{\lambda_k \theta_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sum\limits_{i=0}^{k} p_i}{\lambda_k p_k}. \tag{6.3.10}$$

Revenons maintenant à notre processus comportant un nombre infini d'états. La suite T_n est monotone croissante et, par conséquent, tend soit vers l'infini, soit vers une limite finie.

Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T_0 < \infty$. Il découle alors de l'inégalité de Tchébichev que

$$\mathbf{P}\{\tau_n < AT_0\} > 1 - \frac{T_n}{AT_0} \geqslant 1 - \frac{1}{A}.$$

Cette inégalité signifie que le processus tendra avec une probabilité unité vers l'infini au cours d'un temps fini. Dans ce cas il ne sert à rien de parler d'une distribution stationnaire, puisque notre processus se brise. C'est pourquoi la seconde condition nécessaire d'existence d'une distribution stationnaire est la condition

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \infty.$$

Ainsi, les *conditions nécessaires d'existence d'une distribution stationnaire sont*

$$\left.\begin{aligned} &(\mathrm{I}) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k < \infty, \\ &(\mathrm{II}) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{k} \theta_i}{\lambda_k \theta_k} = \infty, \end{aligned}\right\} \tag{6.3.11}$$

où

$$\theta_n = \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n}, \quad \theta_0 = 1.$$

On peut démontrer que ces conditions sont également suffisantes [6] pour l'existence d'une distribution stationnaire. Notons que la plus importante de ces deux conditions est la première et que quand la première condition est vérifiée, la seconde l'est pratiquement presque toujours. Si la distribution stationnaire existe, les probabilités stationnaires s'expriment par les formules

$$p_k = \frac{\theta_k}{\sum\limits_{i=0}^{\infty} \theta_i}. \tag{6.3.12}$$

§ 6.4. Etude du processus non stationnaire

1ᶜ. Nous avons considéré au paragraphe précédent le processus de naissance et de mort au régime stationnaire. Il est intéressant toutefois d'étudier notre processus au début de la période de temps, quand les probabilités des états dépendent notablement du temps. Une telle étude permettra, en premier lieu, d'établir la vitesse

à laquelle les probabilités $p_k(t)$ tendent vers leurs valeurs finales, et par cela même de déterminer à partir de quel instant on peut estimer, avec un degré suffisant d'exactitude, que le processus est stationnaire. En second lieu, dans les applications de la théorie de la fiabilité nous sommes souvent intéressés par le comportement du processus de naissance et de mort uniquement au stade initial, quand il est notoire que le processus n'est pas encore entré au régime stationnaire.

Considérons maintenant le cas d'un nombre *fini* d'états. Il est décrit par le système (6.3.1'). Pour trouver la solution de ce système sous forme compacte, il est commode d'utiliser la transformation de Laplace. Introduisons les fonctions

$$a_k(s)=\int_0^\infty e^{-st}p_k(t)\,dt.$$

Multipliant chaque équation (6.3.1') par e^{-st} et intégrant en t, nous obtenons le système algébrique

$$\left.\begin{aligned} (\lambda_0+s)\,a_0(s)-\mu_1a_1(s)=1,\\ -\lambda_{k-1}a_{k-1}(s)+(\lambda_k+\mu_k+s)\,a_k(s)-\mu_{k+1}a_{k+1}(s)=0,\\ k=1,\,2,\,\ldots,\,n-1,\\ -\lambda_{n-1}a_{n-1}(s)+(\mu_n+s)\,a_n(s)=0.\end{aligned}\right\}\qquad(6.4.1)$$

Nous supposons, comme plus haut, qu'à l'instant initial le système se trouve à l'état 0. Résolvant ce système d'après la règle de Cramer, nous trouvons une expression explicite pour les fonctions $a_k(s)$:

$$a_k(s)=\frac{\Delta_{nk}(s)}{\Delta_{n+1}(s)},\qquad(6.4.2)$$

où

$$\Delta_{n+1}(s)=\Delta(s,\,\lambda_0,\,\lambda_1,\,\ldots,\,\lambda_n,\,\mu_0,\,\mu_1,\,\ldots,\,\mu_n)=$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda_0+\mu_0+s & -\mu_1 & 0 & \ldots\ldots & & 0\\ -\lambda_0 & \lambda_1+\mu_1+s & -\mu_2 & \ldots\ldots & & 0\\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_2+\mu_2+s & \ldots\ldots & & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & -\lambda_{n-2} & \lambda_{n-1}+\mu_{n-1}+s & & -\mu_n\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_{n-1} & & \lambda_n+\mu_n+s \end{vmatrix}\qquad(6.4.3)$$

et

$$\Delta_{nk}(s)=\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}\Delta(s,\,\lambda_{k+1},\,\ldots,\,\lambda_n,\,\mu_{k+1},\,\ldots,\,\mu_n).\qquad(6.4.4)$$

Si, en appliquant les règles connues, on développe le déterminant $\Delta_{n+1}(s)$ d'après la dernière colonne et la dernière ligne, on obtient

une relation de récurrence

$$\Delta(s, \lambda_0, \ldots, \lambda_n, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n) =$$
$$= (s+\lambda_n+\mu_n)\Delta(s, \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}, \mu_0, \ldots, \mu_{n-1}) -$$
$$-\mu_n\lambda_{n-1}\Delta(s, \lambda_0, \ldots, \lambda_{n-2}, \mu_0, \ldots, \mu_{n-2}), \quad (6.4.5)$$

ou plus succinctement

$$\Delta_{n+1}(s) = (s+\lambda_n+\mu_n)\Delta_n(s) - \mu_n\lambda_{n-1}\Delta_{n-1}(s) \quad (6.4.6)$$

et

$$\Delta_0(s) = 1, \quad \Delta_1(s) = s+\lambda_0+\mu_0.$$

(Notons, pour éviter toute confusion, que les formules (6.4.2) à (6.4.6) sont valables pour tous λ_n et μ_n, mais que dans notre cas $\mu_0 = 0$, et $\lambda_0 = 0$.)

On peut déterminer à partir des relations de récurrence (6.4.5) et (6.4.6) les polynômes $\Delta_{n+1}(s)$ et $\Delta_{nk}(s)$ et, en les portant dans l'égalité (6.4.2), obtenir la représentation de $a_k(s)$ sous forme d'une fraction rationnelle régulière.

On exprime d'après la formule connue d'inversion les probabilités $p_k(t)$ par l'intégrale de contour

$$p_k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{st}\Delta_{nk}(s)}{\Delta_{n+1}(s)}\, ds, \quad (6.4.7)$$

où le contour C englobe tous les zéros du dénominateur. Pour calculer cette intégrale, il faut connaître les racines du polynôme $\Delta_{n+1}(s)$. Utilisant l'équation (6.4.6), on peut montrer que les racines de ces polynômes possèdent les *propriétés suivantes* [9]:

1. *Si les λ_k sont positifs, toutes les racines de $\Delta_k(s)$ sont différentes et négatives.*

2. *Les racines des polynômes voisins $\Delta_{k-1}(s)$ et $\Delta_k(s)$ sont alternées, autrement dit, entre chaque couple de racines du polynôme $\Delta_{k-1}(s)$ (y compris, entre zéro et la racine la plus petite en module) se trouve une racine du polynôme $\Delta_k(s)$.*

3. *La somme des racines de $\Delta_k(s)$ est égale à*

$$-A_k = -(\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_{k-1}+\mu_0+\mu_1+\ldots+\mu_{k-1}).$$

d'où il découle que la racine la plus grande en module se trouve à droite de $-A_k$.

4. *Si $\lambda_k > 0$, quand $k < n$ et $\lambda_n = 0$, alors toutes les propriétés précédentes sont valables, mais l'une des racines est nulle.* (On démontre les propriétés 1 et 2 dans la théorie des polynômes orthogonaux.)

Les propriétés que nous venons de citer permettent de calculer les racines du polynôme $\Delta_k(s)$ si l'on connaît les racines du polynôme précédent. En effet, soient $-\beta_1, -\beta_2, \ldots, -\beta_{k-1}$ les racines

de $\Delta_{k-1}(s)$. Dans chacun des intervalles

$$(-A_k, -\beta_{k-1}), (-\beta_{k-1}, -\beta_{k-2}), \ldots, (-\beta_1, 0)$$

il se trouve alors une racine du polynôme $\Delta_k(s)$. Dans ce cas on calcule aisément les racines, par exemple, par la méthode de la « fourchette », ce qui est particulièrement aisé quand on utilise des calculateurs électroniques.

Ainsi, soient $0, -\alpha_1, \ldots, -\alpha_n$ les racines connues du polynôme $\Delta_{n+1}(s)$. Dans ce cas $\Delta_{n+1}(s) = s(s+\alpha_1)\ldots(s+\alpha_n)$ et nous pouvons décomposer la fraction $\frac{\Delta_{nk}(s)}{\Delta_{n+1}(s)}$ en éléments simples

$$\frac{\Delta_{nk}(s)}{\Delta_{n+1}(s)} = \frac{A_{k0}}{s} + \sum_{l=1}^{n} \frac{A_{kl}}{s+\alpha_l}, \tag{6.4.8}$$

où

$$A_{kl} = \frac{\Delta_{nk}(-\alpha_l)}{\Delta'_{n+1}(-\alpha_l)}.$$

Portant cette expression dans l'intégrale (6.4.7) et utilisant les formules connues d'inversion nous obtenons

$$p_k(t) = A_{k0} + \sum_{l=1}^{n} A_{kl} e^{-\alpha_l t}.$$

Cette formule donne la solution du système (6.4.2).

Comme $\lim p_k(t) = p_k = A_{k0}$, on peut mettre cette égalité sous la forme

$$p_k(t) = p_k + \sum_{l=1}^{n} A_{kl} e^{-\alpha_l t}. \tag{6.4.9}$$

Une estimation de la somme figurant au second membre de cette égalité nous permet d'estimer la vitesse avec laquelle les probabilités tendent vers leurs valeurs finales.

Notons, enfin, un aspect purement technique du problème. Pour de petites valeurs de t et $k > 0$ les probabilités $p_k(t)$ sont petites et les termes du second membre de (6.4.9) sont grands. C'est pourquoi lors du calcul des probabilités $p_k(t)$ avec une erreur relative donnée on doit calculer les termes du second membre avec un nombre élevé de chiffres significatifs.

2°. Dans le cas d'un nombre *infini* d'états le processus est décrit par le système infini d'équations différentielles (6.3.1). La solution explicite de ce système n'a été obtenue que pour quelques cas particuliers. Nous considérerons maintenant deux *exemples* intéressants pour la théorie de la fiabilité et sur ces exemples nous appliquerons les méthodes les plus efficaces de résolutions des systèmes infinis de la forme (6.3.1).

a) $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu$, $\lambda < \mu$. Supposons qu'à l'instant initial le processus se trouve à l'état zéro, autrement dit,

$$p_0(0) = 1, \quad p_n(0) = 0 \text{ pour } n > 0.$$

Utilisons pour résoudre le système (6.3.1) la transformation de Laplace. Soit

$$a_n(s) = \int_0^\infty e^{-st} p_n(t)\, dt.$$

Nous obtenons alors de (6.3.1)

$$\left.\begin{array}{c} -1 = -(\lambda + s)\, a_0(s) + \mu a_1(s), \\ \mu a_{n+1}(s) - (\lambda + \mu + s)\, a_n(s) + \lambda a_{n-1}(s) = 0 \\ \text{quand } n > 0. \end{array}\right\} \qquad (6.4.10)$$

Nous voyons que la suite $a_n(s)$ vérifie une équation linéaire homogène de récurrence à coefficients constants. La solution de cette équation est de la forme

$$a_n(s) = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n,$$

où z_1 et z_2 sont les racines de l'équation du second degré

$$\mu z^2 - (\lambda + \mu + s)\, z + \lambda = 0;$$

$$z_1 = \frac{\lambda + \mu + s}{2\mu} - \sqrt{\left(\frac{\lambda + \mu + s}{2\mu}\right)^2 - \lambda},$$

$$z_2 = \frac{\lambda + \mu + s}{2\mu} + \sqrt{\left(\frac{\lambda + \mu + s}{2\mu}\right)^2 - \lambda}.$$

Déterminons les constantes C_1 et C_2.

Premièrement, du fait que $p_n(t) \to 0$ quand $n \to \infty$, il découle que $a_n(s) \to 0$ quand $n \to \infty$, si $s > 0$. Mais il n'est pas difficile de vérifier que, quand $s > 0$, $z_1 < 1$ et $z_2 > 1$.

Par conséquent, $C_2 = 0$.

Nous avons ensuite $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1$ (puisque la seconde des conditions (6.3.11) est vérifiée). Ainsi nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(s) = \frac{C_1}{1 - z_1} = \frac{1}{s},$$

d'où

$$C_1 = \frac{1 - z_1}{s}.$$

Ainsi

$$a_n(s) = \frac{(1 - z_1)\, z_1^n}{s}.$$

Les probabilités cherchées s'expriment alors à l'aide de la transformation inverse de Laplace par l'intégrale

$$p_n(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st}\,\frac{(1-z_1)\,z_1^n}{s}\,ds,\quad a>0. \qquad (6.4.11)$$

A l'aide de l'intégrale (6.4.11) on peut exprimer les probabilités $p_n(t)$ au moyen des fonctions de Bessel, mais nous ne le ferons pas. Au lieu d'établir des formules volumineuses et inutiles pour $p_n(t)$ nous estimerons, ce qui est beaucoup plus utile, avec quelle vitesse les probabilités $p_n(t)$ tendent vers leurs valeurs finales, qui, comme on peut aisément vérifier, sont égales à

$$p_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right). \qquad (6.4.12)$$

Pour cela nous déplacerons dans l'intégrale (6.4.11) le contour vertical $(a-i\infty,\ a+i\infty)$ dans le demi-plan gauche. Nous isolerons alors le résidu au point $s=0$, égal à la probabilité finale p_n,

$$p_n(t)=p_n+\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st}\,\frac{(1-z_1)\,z_1^n}{s}\,ds,\quad a<0.$$

La fonction $z_1=z_1(s)$ est régulière et uniforme en dehors du segment $[-(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu})^2,\ -(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^2]$ et tend vers zéro à l'infini. Cela fait que nous pouvons transformer le contour vertical en contour fermé allant le long des côtés supérieur et inférieur de ce segment. On calcule aisément que sur un tel contour

$$|z_1(s)|=\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}.$$

L'estimation habituelle de l'intégrale suivant le maximum du module donne alors

$$|p_n(t)-p_n|\leqslant\frac{2\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}+1\right)}{\pi\left(\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}-1\right)^2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{n}{2}}e^{-(\sqrt{\mu}-\sqrt{\lambda})^2 t}. \qquad (6.4.13)$$

Cette inégalité permet d'estimer assez exactement la vitesse de passage du processus au régime stationnaire.

b) Considérons en qualité de second exemple le processus pour lequel

$$\lambda_n=\lambda,\quad \mu_n=n\mu.$$

Supposons comme auparavant qu'à l'instant initial le processus se trouve à l'état 0, autrement dit, que $p_0(0)=1$, $p_n(0)=0$ quand

$n > 0$. Le système (6.4.1) sera alors de la forme

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),$$
$$p_n'(t) = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu)\, p_n(t) + (n+1)\,\mu p_{n+1}(t),$$
$$n = 1, 2 \ldots$$

Pour résoudre ce système la meilleure méthode est celle des fonctions génératrices qui, appliquée à de tels systèmes, conduit habituellement à une certaine équation linéaire aux dérivées partielles. Soit

$$P(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)\, z^n.$$

Multiplions la n-ième équation par z^n et faisons la somme en n. Nous obtenons

$$\frac{\partial P(t, z)}{\partial t} + \mu(z-1)\frac{\partial P(t, z)}{\partial z} = \lambda(z-1)\, P(t, z). \qquad (6.4.14)$$

La méthode de résolution de cette équation est connue. On compose pour cela le système conjugué d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dt}{1} = \frac{dz}{\mu(z-1)} = \frac{dP}{\lambda P(z-1)},$$

dont la solution nous donne deux intégrales

$$(z-1)\, e^{-\mu t} = C_1, \qquad Pe^{-\frac{\lambda}{\mu} z} = C_2.$$

La solution générale de l'équation (6.4.14) est alors de la forme $C_2 = f(C_1)$ ou

$$Pe^{-\frac{\lambda}{\mu} z} = f[(z-1)\, e^{-\mu t}], \qquad (6.4.15)$$

où $f(x)$ est une fonction arbitraire. Pour déterminer cette fonction utilisons les conditions initiales

$$P(0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(0)\, z^n = 1.$$

Posant $t = 0$ dans (6.4.15) nous obtenons

$$e^{-\frac{\lambda}{\mu} z} = f(z-1), \text{ autrement dit } f(x) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}(x+1)}.$$

Nous avons en définitive

$$P(t, z) = e^{\frac{\lambda}{\mu}(z-1)(1-e^{-\mu t})}.$$

Développant cette fonction suivant les puissances de z, nous trouvons les probabilités cherchées

$$p_n(t) = \frac{[a(t)]^n}{n!} e^{-a(t)}, \tag{6.4.16}$$

où $a(t) = \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t})$. Quand $t \to \infty$, $a(t) \to \frac{\lambda}{\mu}$, et par conséquent,

$$\lim_{t\to\infty} p_n(t) = p_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}.$$

Ces formules permettent de juger aisément de la vitesse avec laquelle le processus passe au régime stationnaire.

3°. **Problème de la première intersection d'un niveau élevé.** Dans les applications le problème suivant a une grande importance: *on demande de trouver pour le processus de naissance et de mort comportant un nombre fini ou dénombrable d'états la probabilité pour qu'au cours d'un temps donné t ce processus n'atteigne pas le niveau donné m, autrement dit, pour qu'à un instant arbitraire $t' < t$, $\nu(t') < m$.*

Nous donnerons d'abord la solution *exacte* de ce problème. Supposons, pour simplifier, qu'au moment initial le processus se trouvait à l'état zéro. Considérons le processus auxiliaire de naissance et de mort, qui ne diffère du processus donné que par le fait que pour lui l'état m est absorbant. Cela signifie que si le processus initial était caractérisé par les paramètres (λ_k, μ_k), alors les paramètres $(\bar{\lambda}_k, \bar{\mu}_k)$ du processus auxiliaire seront

$$\bar{\lambda}_k = \lambda_k, \quad \bar{\mu}_k = \mu_k, \quad \text{pour } k < m,$$
$$\bar{\lambda}_m = \bar{\mu}_m = 0.$$

Jusqu'à l'instant, où le processus passe pour la première fois à l'état m, les deux processus se conduisent d'une manière identique; toutefois, en atteignant l'état m le processus auxiliaire y reste définitivement. C'est pourquoi la probabilité pour que le processus initial passe une fois au moins par l'état m est égale à la probabilité pour qu'à l'instant t le processus auxiliaire se trouve à cet état m. Or, cette probabilité peut être trouvée à partir du système d'équations

$$\begin{aligned}
&p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t),\\
&p_k'(t) = \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t),\\
&\qquad k = 1, 2, \ldots, m-1,\\
&p_{m-1}'(t) = \lambda_{m-2} p_{m-2}(t) - (\lambda_{m-1} + \mu_{m-1}) p_{m-1}(t),\\
&p_m'(t) = \lambda_{m-1} p_{m-1}(t).
\end{aligned} \tag{6.4.17}$$

Utilisons comme plus haut la transformation de Laplace. Soit

$$a_k(s) = \int_0^\infty e^{-st} p_k(t)\, dt,$$

$$k = 0,\ 1,\ \ldots,\ m.$$

Nous obtenons aisément de la formule (6.4.2)

$$a_m(s) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}{s \Delta_m(s)},$$

où les polynômes $\Delta_k(s)$ vérifient l'équation de récurrence (6.4.6). La probabilité cherchée est alors

$$p_m(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{st} \lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}{s \Delta_m(s)}\, ds. \tag{6.4.18}$$

Au § 6.3 nous avons considéré la grandeur τ_n, le temps aléatoire au cours duquel le processus passe de l'état 0 à l'état n. Pour notre problème τ_m est l'instant aléatoire, où le processus atteint pour la première fois l'état m. Il en découle que la probabilité $p_m(t) = \mathbf{P}\{\tau_m < t\}$ est la loi de distribution de la grandeur τ_m. La formule (6.4.18) donne la solution exacte de notre problème et pour des petites valeurs de m on peut l'utiliser pour calculer les probabilités $p_m(t)$ de la même façon que nous l'avons fait au début de ce paragraphe. Pour les grandes valeurs de m cette formule est peu efficace, et c'est pourquoi il est souhaitable d'avoir une expression simple, bien qu'approchée, pour cette probabilité. Une telle approche est également raisonnable du fait que le processus de naissance et de mort est dans la plupart des applications un modèle grossier, approché des processus réels. Le problème de la première intersection d'un niveau donné est posé habituellement soit pour les processus stationnaires, soit pour les processus qui passent rapidement à l'état stationnaire. L'intersection d'un niveau donné signifie pour les processus réels un événement non souhaitable, une catastrophe, de sorte que ce niveau est choisi assez « élevé ». Cela signifie que la probabilité d'atteindre ou de dépasser ce niveau est très petite. Il est alors clair que la solution approchée doit consister à déterminer le comportement asymptotique de la variable aléatoire τ_m quand $m \to \infty$. Des considérations grossières d'ordre probabiliste permettent de comprendre quelle doit être la distribution asymptotique de la grandeur τ_m. Si le niveau m est élevé, la grandeur τ_m est grande en moyenne et l'on peut estimer que notre processus est *stationnaire* sur l'intervalle de temps considéré (on suppose que la distribution stationnaire existe). Désignons par $P(t)$ la probabilité pour que, sur un intervalle de longueur t, le processus n'atteigne aucune fois le niveau m. En vertu de la stationnarité, cette probabilité ne dépend pas de la position de l'intervalle. Considérons deux intervalles voisins de

longueur t_1 et t_2. Soient A_1, l'événement consistant en ce que le niveau m ne sera pas atteint sur le premier intervalle, et A_2, la probabilité correspondante pour le second intervalle. Si le niveau m est très élevé, les événements A_1 et A_2 sont, comme on peut le deviner intuitivement, pratiquement indépendants. Il en découle que

$$P(t_1+t_2) = \mathbf{P}\{A_1A_2\} \approx \mathbf{P}\{A_1\}\,\mathbf{P}\{A_2\} = P(t_1)\,P(t_2),$$

ou

$$P(t_1+t_2) \approx P(t_1)\,P(t_2).$$

Il découle de cette équation fonctionnelle (cf. § 2.2) que

$$P(t) \approx e^{-\lambda t}.$$

Or, par définition

$$P(t) = 1 - p_m(t) = \mathbf{P}\{\tau_m > t\},$$

c'est pourquoi

$$\frac{1}{\lambda} = \mathbf{M}\tau_m = T_m = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sum_{l=0}^{k} \theta_l}{\lambda_k \theta_k}.$$

Par conséquent, nous avons

$$P(t) \approx e^{-\frac{t}{T_m}}.$$

Il découle ainsi de considérations grossières d'ordre probabiliste que, *sous certaines conditions naturelles, la grandeur τ_m suit asymptotiquement une loi exponentielle.*

Pour *démontrer rigoureusement* cette proposition [10] considérons la variable aléatoire normée

$$\xi_m = \frac{\tau_m}{T_m}.$$

Sa loi de distribution est

$$\mathbf{P}\{\xi_m < x\} = p_m(T_m x) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{sx}\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}{s\Delta_m\left(\frac{s}{T_m}\right)}\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{sx}}{s\bar{\Delta}_m\left(\frac{s}{T_m}\right)}\, ds, \qquad (6.4.19)$$

où $\bar{\Delta}_m(s) = \frac{\Delta_m(s)}{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{m-1}}$. Il découle de cette égalité que pour que la grandeur τ_m soit, avec la croissance de m, asymptotiquement distribuée suivant une loi exponentielle, autrement dit,

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{P}\{\xi_m < x\} = 1 - e^{-x},$$

il est nécessaire et suffisant que

$$\lim_{m\to\infty} \overline{\Delta}_m\left(\frac{s}{T_m}\right) = 1+s \qquad (6.4.20)$$

uniformément en s dans tout domaine fini. Comme il découle de (6.4.6.), les polynômes normés $\overline{\Delta}_m(s)$ vérifient la relation de récurrence

$$\overline{\Delta}_{n+1}(s) = \left(1+\frac{\mu_n}{\lambda_n}+\frac{s}{\lambda_n}\right)\overline{\Delta}_n(s) - \frac{\mu_n}{\lambda_n}\overline{\Delta}_{n-1}(s), \qquad (6.4.21)$$

$$n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

$$\overline{\Delta}_0(s) = 1,\ \overline{\Delta}_1(s) = 1+\frac{s}{\lambda_0}.$$

Ecrivons cette relation sous la forme

$$[\overline{\Delta}_{n+1}(s) - \overline{\Delta}_n(s)] - \frac{\mu_n}{\lambda_n}[\overline{\Delta}_n(s) - \overline{\Delta}_{n-1}(s)] = \frac{s}{\lambda_n}\overline{\Delta}_n(s)$$

et résolvons par rapport aux différences $\overline{\Delta}_{n+1}(s) - \overline{\Delta}_n(s)$. Après quelques transformations nous obtenons

$$\overline{\Delta}_{n+1}(s) - \overline{\Delta}_n(s) = s\,\frac{\sum_{k=0}^{n}\overline{\Delta}_k(s)\,\theta_k}{\lambda_n\theta_n}. \qquad (6.4.22)$$

On montre aisément, à partir de (6.4.21), que $\Delta_n(0) = 1$. Soit

$$\overline{\Delta}_n(s) = 1 + c_{n1}s + c_{n2}s^2 + \ldots + c_{nn}s^n.$$

Nous obtenons facilement de l'inégalité (6.4.22) une relation de récurrence pour les coefficients c_{nl}

$$c_{n+1,\,l} - c_{nl} = \frac{\sum_{l=0}^{n} c_{kl-1}\theta_k}{\lambda_n\theta_n}. \qquad (6.4.23)$$

Il en découle, en particulier, que le premier coefficient

$$c_{n1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sum_{l=0}^{k}\theta_l}{\lambda_k\theta_k} = T_n$$

est égal au temps moyen s'écoulant avant la première entrée du processus en état n. Introduisons encore la notation $c_{n+1,\,l} - c_{nl} = b_{nl}$. Nous voyons de (6.4.23) que tous les coefficients c_{nl} sont positifs et monotonement croissants suivant l'indice n. Par conséquent,

$$c_{n+1,\,l} - c_{nl} \leqslant c_{n,\,l-1}(c_{n+1,\,1} - c_{n1}) \leqslant$$
$$\leqslant c_{n+1,\,l-1}c_{n+1,\,1} - c_{n,\,l-1}c_{n1}. \qquad (6.4.24)$$

Faisant la somme de ces inégalités suivant l'indice n, nous obtenons

$$c_{nl} \leqslant c_{n,\,l-1} c_{n1}.$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité (6.4.24) nous démontrons par récurrence que

$$c_{nl} \leqslant \frac{c_{n1}^{l}}{l\,!}. \tag{6.4.25}$$

Pour $l=1$ cette inégalité est triviale. Supposons qu'elle soit démontrée pour un certain l. Nous avons alors

$$c_{n+1,\,l+1} - c_{n,\,l+1} \leqslant c_{nl}\,(c_{n+1,\,1} - c_{n,\,1}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c_{n1}^{l}}{l\,!}(c_{n+1,\,1} - c_{n1}) \leqslant \frac{c_{n+1,\,1}^{l+1} - c_{n1}^{l+1}}{(l+1)\,!}.$$

Cette dernière inégalité découle du fait que si $b > a > 0$, on a

$$a^{l}\,(b-a) \leqslant \int_{a}^{b} x^{l}\,dx = \frac{b^{l+1} - a^{l+1}}{l+1}.$$

Sommant les inégalités

$$c_{n+1,\,l+1} - c_{n,\,l+1} \leqslant \frac{c_{n+1,\,1}^{l+1} - c_{n1}^{l+1}}{(l+1)\,!}$$

suivant l'indice n, nous obtenons

$$c_{n,\,l+1} \leqslant \frac{c_{n1}^{l+1}}{(l+1)\,!}.$$

L'inégalité (6.4.25) est ainsi démontrée.

Considérons maintenant les polynômes

$$\overline{\Delta}_m\left(\frac{s}{T_m}\right) = \overline{\Delta}_m\left(\frac{s}{c_{m1}}\right) = 1 + s + a_{m2}s^2 + \ldots + a_{mm}s^m.$$

Il est évident que $a_{ml} = \frac{c_{ml}}{c_{m1}^{l}}$, de sorte qu'il découle des inégalités (6.4.24) et (6.4.25) les inégalités

$$\left.\begin{aligned} a_{ml} &\leqslant a_{m,\,l-1}, \\ a_{ml} &\leqslant \frac{1}{l\,!}. \end{aligned}\right\} \tag{6.4.26}$$

Nous pouvons maintenant démontrer le **théorème**:

La condition nécessaire et suffisante pour que soit remplie la condition (6.4.20) *est que*

$$\lim_{m\to\infty} a_{m2} = \lim_{m\to\infty} \frac{c_{m2}}{c_{m1}^{2}} = 0. \tag{6.4.27}$$

Démonstration. La nécessité de la condition (6.4.27) est évidente. Supposons que cette condition soit remplie. Considérons un domaine fini arbitraire D dans le plan complexe s, et soit

$$R = \sup_D |s|.$$

Prenons un $\varepsilon > 0$ arbitraire et choisissons l_0 de sorte que

$$\sum_{l=l_0+1}^{\infty} \frac{R^l}{l!} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixant le numéro l_0 choisissons le nombre m_0 de manière que pour $m > m_0$ on ait

$$a_{m2} < \frac{\varepsilon}{2 l_0 R^{l_0}}.$$

Nous obtenons alors, en utilisant l'inégalité (6.4.26), que pour $m > m_0$ et $s \in D$ on a

$$\bar{\Delta}_m\left(\frac{s}{c_{m1}}\right) - 1 - s \Big| \leqslant \sum_{l=2}^{l_0} a_{ml} R^l + \sum_{l=s_0+1}^{m} a_{ml} R^l \leqslant a_{m2} l_0 R^{l_0} +$$

$$+ \sum_{l=l_0+1}^{\infty} \frac{R^l}{l!} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

uniformément en $s \in D$, autrement dit,

$$\lim_{m \to \infty} \Delta_m\left(\frac{s}{c_{m1}}\right) = 1 + s.$$

Le théorème est démontré. Par cela même nous avons démontré que la condition (6.4.27) est nécessaire et suffisante pour que la variable aléatoire $\xi_m = \frac{\tau_m}{c_{m1}} = \frac{\tau_m}{T_m}$ soit distribuée asymptotiquement suivant une loi exponentielle. Démontrons maintenant une autre proposition utile: *Si avec le temps le processus de naissance et de mort passe en régime permanent, c'est-à-dire si les conditions* (6.3.11) *sont vérifiées, alors la condition* (6.4.27) *l'est aussi, autrement dit, la grandeur* τ_m *est asymptotiquement distribuée suivant une loi exponentielle.*

Démonstration. Supposons que les conditions (6.3.11)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{l=0}^{k} \theta_l}{\lambda_k \theta_k} = \infty$$

soient vérifiées.

Il découle des relations (6.4.23) que

$$c_{m2}=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\sum\limits_{l=0}^{k}c_{l1}\theta_l}{\lambda_k\theta_k}\leqslant\sum_{l=0}^{m-1}c_{l1}\theta_l\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{\lambda_k\theta_k}<c_{m1}\sum_{l=0}^{m-1}c_{l1}\theta_l,$$

d'où

$$a_{m2}=\frac{c_{m2}}{c_{m1}^2}<\frac{\sum\limits_{l=0}^{m-1}c_{l1}\theta_l}{c_{m1}}.$$

Prenons un $\varepsilon>0$ arbitraire et choisissons l_0 de sorte que $\sum\limits_{l=l_0+1}^{\infty}\theta_l<\frac{\varepsilon}{2}$. Puis, après avoir fixé l_0, choisissons m_0 de sorte que

$$\frac{c_{l_0 1}}{c_{m_0 1}}<\frac{\varepsilon}{2S},\quad \text{où}\quad S=\sum_{k=0}^{\infty}\theta_k.$$

Nous avons alors pour $m>m_0$

$$a_{m2}<\sum_{l=0}^{l_0}\frac{c_{l1}}{c_{m1}}\theta_l+\sum_{l=l_0+1}^{m-1}\frac{c_{l1}}{c_{m1}}\theta_l<\frac{c_{l_0 1}}{c_{m1}}S+\sum_{l=l_0+1}^{\infty}\theta_l<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Par conséquent,

$$\lim_{m\to\infty}a_{m2}=0,$$

et notre affirmation est démontrée.

Ainsi, si le processus de naissance et de mort devient stationnaire avec le temps, l'instant, où le processus atteint pour la première fois un niveau élevé, est asymptotiquement distribué suivant une loi exponentielle

$$\mathbf{P}\{\tau_m<t\}=p_m(t)\approx 1-e^{-\frac{t}{T_m}}. \tag{6.4.28}$$

Formulons maintenant quelques *remarques* importantes.

1. Lors de la résolution du problème de la première intersection d'un niveau élevé nous avons supposé qu'à l'instant initial le processus se trouve à l'état zéro. On montre aisément que le comportement asymptotique de la grandeur τ_m, quand $m\to\infty$, ne dépend pas de l'état initial du processus. En effet, supposons qu'à l'instant initial le processus se trouve à l'état k. Nous avons désigné par τ_{km} (§ 6.3) le temps aléatoire après lequel le processus passe pour la première fois à l'état m, et par T_{km} le temps moyen. Or,

$\tau_{km} = \tau_m - \tau_k$ et $T_{km} = T_m - T_k$. Considérons la grandeur normée

$$\xi_{km} = \frac{\tau_{km}}{T_{km}} = \frac{\tau_m}{T_m} \frac{1 - \frac{\tau_k}{\tau_m}}{1 - \frac{T_k}{T_m}}.$$

Comme nous l'avons montré, la première fraction possède à la limite une distribution exponentielle, et la seconde tend en probabilité vers l'unité. Par conséquent, la grandeur ξ_{km} possède la même distribution asymptotique que la grandeur ξ_m.

2. En considérant le comportement asymptotique de la grandeur τ_m, nous avons estimé que les paramètres λ_k et μ_k sont fixés et que le niveau $m \to \infty$. Dans les applications de ce problème à la théorie de la fiabilité nous avons souvent affaire au cas, où les paramètres λ_k et μ_k varient avec le niveau m. Pour englober une classe plus large de cas que l'on rencontre en théorie de la fiabilité, élargissons la position du problème de l'intersection d'un niveau élevé. Soit donné un processus de naissance et de mort comportant un nombre fini ou dénombrable d'états. Supposons que les paramètres du processus λ_k et μ_k, le nombre des états n et le niveau donné m dépendent d'un certain paramètre orienté α:

$$\lambda_k = \lambda_k(\alpha); \quad \mu_k = \mu_k(\alpha), \quad n = n(\alpha), \quad m = m(\alpha).$$

On peut estimer sans restreindre la généralité que $\alpha \to 0$. On demande de trouver les conditions pour lesquelles l'instant τ_m, où le niveau m est atteint pour la première fois, est asymptotiquement distribué suivant une loi exponentielle, autrement dit,

$$\lim_{\alpha \to 0} \mathrm{P}\left\{\frac{\tau_m}{T_m} > x\right\} = e^{-x}. \tag{6.4.29}$$

Si l'on étudie attentivement la démonstration de la nécessité et de la suffisance des conditions (6.4.27), on peut remarquer que cette démonstration reste encore valable pour une telle position élargie du problème. En d'autres termes, la condition nécessaire et suffisante pour la validité de l'égalité (6.4.29) est

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{c_{m2}}{c_{m1}^2} = 0, \tag{6.4.30}$$

où

$$c_{m1} = T_m = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sum_{l=0}^{k} \theta_l}{\lambda_k \theta_k}$$

et

$$c_{m2} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sum_{l=0}^{k} c_{l1}\theta_l}{\lambda_k \theta_k}. \tag{6.4.31}$$

La condition (6.4.30) peut être également vérifiée pour chaque problème concret. On peut encore démontrer que dans cette condition l'erreur relative de l'égalité (6.4.28) sera de l'ordre de

$$a_{m2}=\frac{c_{m2}}{c_{m1}^2}.$$

Considérons un *exemple* important.

Dans les applications des processus de naissance et de mort à la théorie de la fiabilité les paramètres λ_k sont égaux aux intensités des pannes et les paramètres μ_k, aux intensités des renouvellements. En règle générale, le temps moyen de renouvellement est de nombreuses fois inférieur au temps moyen de fonctionnement sans défaillance. Cela signifie que les paramètres λ_k sont de nombreuses fois plus petits que les paramètres μ_k. Dans ces conditions il est raisonnable de considérer le schéma suivant : *le niveau m et les paramètres μ_k sont fixés et pour les paramètres λ_k on a $\lambda_k(\alpha)=\lambda_k\alpha$, où $\alpha\to 0$.* Des calculs et des estimations simples nous montrent alors que, quand $\alpha\to 0$, on a les relations

$$\theta_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}\alpha^k=\theta_k^{(0)}\alpha^k,$$

$$c_{m1}\sim\frac{1}{\lambda_{m-1}\theta_{m-1}^{(0)}\alpha^{m-1}},$$

$$c_{m2}\sim\frac{\sum\limits_{l=1}^{m-1}\frac{1}{\mu_l}}{\lambda_{m-1}\theta_{m-1}^{(0)}\alpha^{m-2}},$$

$$\frac{c_{m2}}{c_{m1}^2}\sim\lambda_{m-1}\theta_{m-1}^{(0)}\alpha^m\sum_{l=1}^{m-1}\frac{1}{\mu_l},$$

d'où l'on voit que la condition (6.4.30) est remplie et, par conséquent, que la grandeur τ_m est asymptotiquement distribuée suivant une loi exponentielle. Notons encore que dans cette position du problème on peut améliorer la formule approchée (6.4.28). Il s'avère que, quand $\alpha\to 0$, on peut obtenir la formule

$$P\{\tau_m<t\}\approx 1-e^{-\frac{t-\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{1}{\mu_k}}{T_m-\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{1}{\mu_k}}},\qquad (6.4.32)$$

dont l'exactitude est d'un ordre de grandeur plus élevée. Cela permet à son tour d'estimer l'erreur de la formule (6.4.28). Comme il découle de (6.4.28) et (6.4.32), le terme principal de l'erreur relative

dans la formule (6.4.28) est égal à

$$\frac{T_m - t}{T_m^2} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\mu_k}. \tag{6.4.33}$$

3. Nous avons considéré plus haut la distribution du temps s'écoulant avant le premier passage à l'état m. Le comportement ultérieur du processus ne nous intéressait pas. En théorie de la fiabilité quand on utilise le processus de naissance et de mort un problème se pose souvent : *trouver la durée moyenne de tous les intervalles sur lesquels le processus se trouve à un état non inférieur à m.* On suppose alors naturellement que le processus possède une distribution stationnaire. Désignons par $T^{(1)}$ la longueur moyenne de chaque intervalle, à partir du second, sur lequel $\nu(t) < m$, et par $T^{(2)}$, la longueur moyenne de chaque intervalle sur lequel $\nu(t) \geqslant m$. La suite des longueurs de ces intervalles, à partir du second, forme ce que nous avons appelé (cf. § 2.3) un processus de renouvellement avec un temps fini de renouvellement. Nous avions alors montré que

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{P}\{\nu(t) < m\} = \sum_{k=0}^{m-1} p_k = \frac{T^{(1)}}{T^{(1)} + T^{(2)}}. \tag{6.4.34}$$

Par ailleurs, nous avons

$$T^{(1)} = T_{m-1,\, m} = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} \theta_k}{\lambda_{m-1}\theta_{m-1}} = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} p_k}{\lambda_{m-1} p_{m-1}}.$$

Nous en tirons, compte tenu de (6.4.34), le temps moyen cherché

$$T^{(2)} = \frac{\sum_{k=m}^{\infty} p_k}{\lambda_{m-1} p_{m-1}}. \tag{6.4.35}$$

§ 6.5. Application du processus de naissance et de mort à la réservation avec renouvellement

1°. Le processus de naissance et de mort peut être appliqué à l'étude des systèmes de réserve dans lesquels se produit le renouvellement des éléments tombés en panne.

Supposons que l'on ait un système dans lequel le temps de fonctionnement sans défaillance de chaque élément est distribué suivant une loi exponentielle (fig. 6.5.1). Après la panne chaque élément est envoyé dans le dispositif de réparation, y est renouvelé et après renouvellement est de nouveau réintégré au système. Supposons que le temps de renouvellement soit également distribué suivant une

loi exponentielle. En vertu du caractère exponentiel de toutes les lois, le fonctionnement de ce système est toujours décrit par un processus markovien à nombre fini d'états. Le nombre d'états est dans le cas général égal à 2^N, où N désigne le nombre d'éléments du système, puisque pour décrire le système nous devons connaître à chaque instant l'ensemble des éléments tombés en panne, et le nombre total de ces ensembles est 2^N. La solution du système d'équations différentielles, et dans le cas stationnaire du système d'équations algébriques, est liée à de grandes difficultés arithmétiques et algébriques. Or, le nombre d'états peut être notablement réduit pour divers systèmes réels. Si pour chaque état du système l'intensité globale des pannes et l'intensité globale des renouvellements dépendent non pas de l'ensemble des éléments défectueux à un instant donné, mais seulement de leur nombre, un tel système peut alors être décrit par un processus markovien avec un nombre d'états égal à $(N + 1)$.

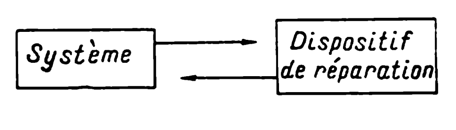


Fig. 6.5.1

Soit λ_k l'*intensité globale des pannes* et μ_k l'*intensité globale des renouvellements* sous la condition que k éléments du système sont défectueux. Alors, au cours du laps de temps Δt il se produira avec une probabilité $\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$ une panne, autrement dit, le système passe à l'état $(k + 1)$, et avec une probabilité $\mu_k \Delta t + o(\Delta t)$ aura lieu un renouvellement, autrement dit, le système passe à l'état $(k - 1)$. Or, cela signifie que notre système est décrit par un processus de naissance et de mort.

Considérons maintenant un système concret de ce genre (fig. 6.5.2). Le système comporte $N = n + m + l + s$ éléments identiques (notons que par *élément* nous pouvons entendre aussi bien l'élément en tant que *partie indécomposable* du système, qu'une *partie composée du système* et, généralement, un *dispositif quelconque*). Le temps de fonctionnement sans défaillance de chaque élément est distribué suivant une loi exponentielle, n éléments se trouvent en état de service et leur risque de panne est λ, m éléments constituent la réserve chargée avec le même risque de panne λ, l éléments composent la réserve allégée et ont un risque de panne ν et, enfin, s éléments forment la réserve non chargée et à cet état ne tombent pas en panne. Chaque élément tombé en panne est immédiatement transféré dans le dispositif de réparation, qui se compose de r unités de réparation. Chaque unité de réparation peut réparer (ou renouveler) simultanément un élément. Le temps aléatoire de réparation de l'élément est distribué suivant une loi exponentielle de paramètre μ. Si toutes les unités de réparation sont occupées, l'élément est placé dans une file d'attente. Chaque élément tombé en panne est immédiate-

ment remplacé par un élément de la réserve chargée, chaque élément de la réserve chargée tombé en panne ou passé à l'état de fonctionnement est remplacé par un élément de la réserve allégée et, enfin, chaque élément de la réserve allégée tombé en panne ou passé dans la réserve chargée est immédiatement remplacé par un élément

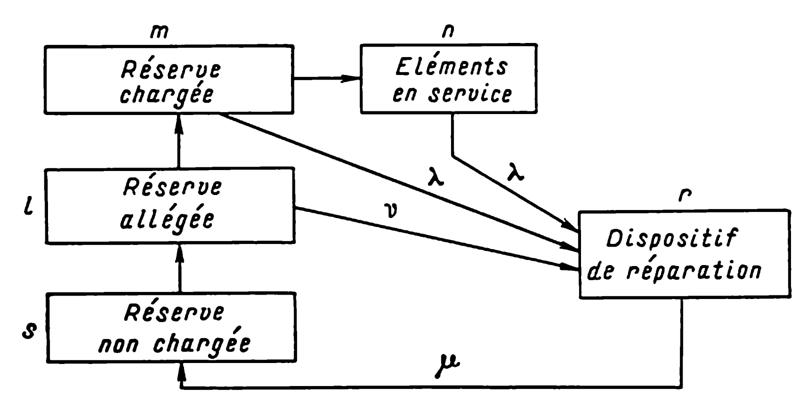


Fig. 6.5.2

de la réserve non chargée. Chaque élément renouvelé est transféré dans la réserve non chargée. Le système fonctionne normalement si le nombre d'éléments non défectueux n'est pas inférieur à n. Par *état* du système nous entendrons le nombre d'éléments non défectueux à un instant donné. Il est clair que le fonctionnement d'un tel système est décrit par un processus de naissance et de mort, dont les paramètres (λ_k, μ_k) s'expriment par les formules

$$\lambda_k = \begin{cases} (n+m)\lambda + \nu l, & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant s, \\ (n+m)\lambda + \nu(l+s-k), & \text{si } s < k \leqslant s+l, \\ (n+m+l+s-k)\lambda, & \text{si } l+s < k \leqslant N; \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu, & \text{si } k \leqslant r, \\ r\mu, & \text{si } k > r. \end{cases} \tag{6.5.1}$$

Notons encore un cas qui n'entre pas dans notre schéma. Le nombre d'éléments de la réserve non chargée peut pratiquement être illimité, $s = \infty$. Il est évident que dans ce cas il n'y a aucun sens à introduire une réserve chargée ou allégée. Un tel système est décrit par un processus de naissance et de mort avec un nombre infini d'états, et les paramètres de ce processus s'expriment ainsi:

$$\lambda_k = n\lambda, \quad \mu_k = \begin{cases} k\mu, & \text{si } k \leqslant r, \\ r\mu, & \text{si } k > r. \end{cases} \tag{6.5.2}$$

Notre schéma inclut un grand nombre de cas particuliers. Notons les cas que l'on rencontre souvent en pratique de fiabilité et calculons pour ces cas-là les probabilités finales.

a) Le système se compose de n éléments. Parmi eux $(n - m)$ sont en état de service et m forment la réserve chargée. Le nombre d'unités de réparation est $r \geqslant n$.

$$\lambda_k = (n-k)\lambda, \quad \mu_k = k\mu,$$
$$p_k = C_n^k \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n}. \tag{6.5.3}$$

b) Le système est le même, mais il y a une seule unité de réparation, $r = 1$. Pour ce cas nous avons

$$\lambda_k = (n-k)\lambda, \quad \mu_k = \mu,$$
$$p_k = \frac{\frac{1}{(n-k)!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-k}}{\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^l}. \tag{6.5.4}$$

c) Le système comporte n éléments en fonctionnement et une réserve non chargée illimitée. Le nombre d'unités de réparation est aussi illimité. Ici nous avons

$$\lambda_k = n\lambda, \quad \mu_k = k\mu,$$
$$p_k = \frac{\left(\frac{n\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} e^{-\frac{n\lambda}{\mu}}. \tag{6.5.5}$$

d) Le système est le même, mais il y a une seule unité de réparation, $r = 1$. Pour un tel système

$$\lambda_k = n\lambda, \qquad \mu_k = \mu.$$

Ici la distribution stationnaire existe sous la condition $n\lambda < \mu$, et dans ce cas les probabilités finales s'expriment par les formules

$$p_k = \left(\frac{n\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{n\lambda}{\mu}\right). \tag{6.5.6}$$

2°. **Paramètres de fiabilité des systèmes de réserve avec renouvellement.** La fiabilité du système de réserve avec renouvellement peut, suivant sa structure et le caractère des fonctions qu'il remplit, être estimée à l'aide de divers paramètres. Considérons les principaux paramètres de fiabilité d'un tel système. Pour fixer les idées convenons que tous nos raisonnements se rapportent au système considéré plus haut de paramètres

$$(n, m, l, s, r, \lambda, \nu, \mu).$$

Probabilité de fonctionnement sans défaillance au cours d'un temps *t*. Le système fonctionnera sans défaillance jusqu'à l'instant t, si le nombre d'éléments tombés en panne avant cet instant ne dépasse pas $N-n$, autrement dit, $\nu(t') \leqslant N-n$ quand $t' < t$. Nous supposons qu'à l'instant initial tous les éléments du système soient en état de service, autrement dit, $\nu(0)=0$.

Par conséquent, la probabilité de fonctionnement sans défaillance est

$$p(t)=1-p_{N-n+1}(t),$$

où $p_{N-n+1}(t)$ s'exprime par la formule exacte (6.4.18). Si le niveau $N-n+1$ est élevé, c'est-à-dire si la condition $a_{N-n+1,2} \ll 1$ (cf. (6.4.27)) est remplie, alors la probabilité de fonctionnement sans défaillance s'exprime par la formule approchée (6.4.28)

$$p(t) \approx e^{-\frac{t}{T_{N-n+1}}} \qquad (6.5.7)$$

Considérons les exemples concrets

a) $$\lambda_k=(n-k)\lambda, \quad \mu_k=k\mu.$$

Dans ce cas la panne du système se produit quand le nombre des éléments tombés en panne devient égal à $(m+1)$. Le temps moyen de fonctionnement sans défaillance du système est

$$T_{m+1}=\sum_{k=0}^{m} \frac{\sum\limits_{l=0}^{k} C_n^l p^l q^{n-l}}{(n-k)\lambda C_n^k p^k q^{n-k}},$$

où

$$p=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \quad q=\frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

Cette somme peut être mise sous une forme plus simple

$$T_{m+1}=\frac{\sum\limits_{l=0}^{m}\left[C_n^{m-l}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{l+1}\frac{1}{l+1}+\frac{1}{m+1-l}\right]}{(\lambda+\mu)\,C_n^{m+1}}. \qquad (6.5.8)$$

En particulier, si $m=n-1$, c'est-à-dire s'il y a un élément de service, alors

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right)^k}{(\lambda+\mu)^k}. \qquad (6.5.9)$$

On peut démontrer que la formule approchée (6.5.7) est valable si

$$\frac{m+1-np}{\sqrt{npq}} \gg 1.$$

b) $$\lambda_k = (n-k)\lambda, \quad \mu_k = \mu.$$

La panne du système, comme dans le premier exemple, se produit quand le système passe à l'état $(m+1)$. Le temps moyen de fonctionnement sans défaillance s'exprime par la formule

$$T_{m+1} = \sum_{k=n-m}^{n} \sum_{l=k}^{n} \frac{(k-1)!}{\lambda l!} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{l-k} \qquad (6.5.10)$$

La formule approchée (6.5.7) est valable, par exemple, si λ et μ sont fixés et m est grand.

Coefficient de service du système. Soit $p(t)$ la probabilité pour qu'à l'instant t le système soit en bon état. Appelons *coefficient de service* du système la valeur limite de cette probabilité

$$k_s = \lim_{t\to\infty} p(t).$$

On voit aisément que pour notre système

$$k_s = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\{\nu(t) < N-n+1\} = \sum_{k=0}^{N-n} p_k. \qquad (6.5.11)$$

Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, le coefficient de service est égal à la fraction moyenne de temps au cours duquel le système se trouve en état de service. En certains cas la connaissance du coefficient de service est insuffisante pour estimer la fiabilité du système, il faut connaître en plus la longueur moyenne des intervalles, où le système est en bon état ou en panne. La durée moyenne de l'état de service du système (y compris la période initiale) est égale à

$$T^{(1)} = T_{N-n,\, N-n+1} = \frac{\sum_{k=0}^{N-n} p_k}{\lambda_{N-n} p_{N-n}}, \qquad (6.5.12)$$

et en vertu de la formule (6.4.35) la durée moyenne de l'état défectueux du système est

$$T^{(2)} = \frac{\sum_{k=N-n+1}^{N} p_k}{\lambda_{N-n} p_{N-n}}. \qquad (6.5.13)$$

Caractéristiques principales de capacité de réparation du système. Comme nous l'avons mentionné, chaque élément tombé en panne est transféré dans le dispositif de réparation composé de r unités.

Si toutes les unités de réparation sont occupées au renouvellement, l'élément est placé dans une file d'attente. La qualité du dispositif de réparation peut être caractérisée par deux paramètres:

k', le nombre moyen d'éléments dans la file d'attente,
k'', le nombre moyen des unités de réparation occupées.

Ces caractéristiques sont naturellement définies pour le régime stationnaire et ne dépendent pas du temps. Il n'est pas difficile d'exprimer ces nombres en fonction des probabilités finales. Supposons, comme plus haut, que $\nu(t)$ soit le nombre d'éléments défectueux à l'instant t. La longueur de la file d'attente à ce moment est alors égale à 0, si $\nu(t) \leqslant r$, et est égale à $\nu(t) - r$, si $\nu(t) > r$. La longueur moyenne de la file d'attente à l'instant t s'exprime ainsi:

$$\sum_{k=r+1}^{N} (k-r)\, p_k(t).$$

Dans ce cas au régime stationnaire on a

$$k' = \sum_{k=r+1}^{N} (k-r)\, p_k. \tag{6.5.14}$$

Nous trouvons de même le second paramètre

$$k'' = \sum_{k=0}^{r} k p_k + r \sum_{k=r+1}^{N} p_k. \tag{6.5.15}$$

On peut exposer une autre approche du problème de l'estimation de la capacité de réparation de notre système. Chaque élément du système passe maintes fois au cours du processus de fonctionnement du système par le cycle

fonctionnement-attente de réparation-réparation-réserve.

Soient t_1, le temps moyen durant lequel l'élément est en état de service, t_2, le temps moyen d'attente de la réparation, t_3, le temps moyen de la réparation, et t_4, le temps moyen passé dans la réserve.

Introduisons la notation $t_0 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$. Les rapports

$$k_1 = \frac{t_1}{t_0}, \quad k_2 = \frac{t_2}{t_0}, \quad k_3 = \frac{t_3}{t_0} \quad \text{et} \quad k_4 = \frac{t_4}{t_0}$$

nous donnent respectivement la fraction moyenne de temps durant lequel l'élément se trouve à un état donné. Du fait de l'équivalence des éléments, il est clair que ces coefficients ne dépendent pas du numéro de l'élément considéré.

Les coefficients ainsi introduits définissent suffisamment bien la qualité de notre système de réserve avec renouvellement. Par exemple, une grande valeur du coefficient k_3 indique que la réparation est lente, une grande valeur du coefficient k_2 signifie que le nombre d'unités de réparation est petit, et une grande valeur du

coefficient k_4 témoigne du fait qu'une si grande réserve pour le système n'est pas justifiée.

Exprimons nos coefficients en fonction des probabilités finales. Introduisons, conformément aux quatre états de l'élément — fonctionnement, attente de réparation, réparation, réserve — quatre fonctions unitaires $e_k^{(i)}(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$. La fonction $e_k^{(i)}(t)$ est égale à l'unité, si le k-ième élément se trouve à l'instant t à l'état i, et est égale à zero dans le cas contraire. Du fait de l'ergodicité de notre système (cf. § 6.2)

$$k_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e_k^{(i)}(t)\, dt.$$

Soit

$$\nu_i(t) = \sum_{k=1}^{N} e_k^{(i)}(t)$$

le nombre d'éléments se trouvant à l'instant t à l'état i. Comme tous les éléments sont équivalents, nous pouvons écrire

$$k_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T e_k^{(i)}(t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{NT} \int_0^T \nu_i(t)\, dt = \frac{1}{N} \int_0^T \lim_{t\to\infty} \mathrm{M}\nu_i(t). \tag{6.5.16}$$

Or, il est facile de voir que $\mathrm{M}\nu_1(t)$ est le nombre moyen d'éléments se trouvant en état de service, $\mathrm{M}\nu_2(t)$, le nombre moyen d'éléments attendant la réparation, $\mathrm{M}\nu_3(t)$, le nombre moyen d'éléments en réparation et $\mathrm{M}\nu_4(t)$, le nombre moyen d'éléments se trouvant en réserve.

Nous avons ensuite

$$\nu_1(t) = \begin{cases} n, & \text{si } \nu(t) \leqslant N-n, \\ N-\nu(t), & \text{si } \nu(t) > N-n, \end{cases}$$

$$\nu_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } \nu(t) \leqslant r, \\ \nu(t)-r, & \text{si } \nu(t) > r, \end{cases}$$

$$\nu_3(t) = \begin{cases} \nu(t), & \text{si } \nu(t) \leqslant r, \\ r, & \text{si } \nu(t) > r, \end{cases}$$

$$\nu_4(t) = \begin{cases} N-n-\nu(t), & \text{si } \nu(t) < N-n, \\ 0, & \text{si } \nu(t) \geqslant N-n. \end{cases}$$

Cela nous permet d'obtenir aisément les formules définitives de nos coefficients :

$$k_1=\frac{n}{N}\sum_{k=0}^{N-n}p_k+\sum_{k=N-n+1}^{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)p_k, \tag{6.5.17}$$

$$k_2=\frac{1}{N}\sum_{k=r+1}^{N}(k-r)\,p_k, \tag{6.5.18}$$

$$k_3=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{r}kp_k+\frac{r}{N}\sum_{k=r+1}^{N}p_k, \tag{6.5.19}$$

$$k_4=\sum_{k=0}^{N-n}\left(1-\frac{n+k}{N}\right)p_k. \tag{6.5.20}$$

Notons en conclusion que les caractéristiques que nous avons introduites ne donnent pas, bien entendu, une description complète de notre système ; pour différents systèmes et dans d'autres conditions d'autres caractéristiques sont également possibles. Il était important pour nous de montrer, d'une part, que toutes ces caractéristiques peuvent être exprimées en fonction des probabilités finales, et, d'autre part, nous avons voulu exposer les méthodes qui permettent de calculer ces caractéristiques le plus commodément possible.

Chapitre 7

MÉTHODES STATISTIQUES DU CONTRÔLE DE LA QUALITÉ ET DE LA FIABILITÉ DE LA PRODUCTION EN MASSE

§ 7.1. Notions premières

L'opération de contrôle est la base du contrôle statistique. Le présent chapitre est consacré à l'exposé systématique des questions liées à la planification du contrôle d'acceptation principalement d'après un indice qualitatif (conforme, non conforme). Les problèmes du contrôle statistique sont étroitement liés au problème d'assurance de la fiabilité. Tout dépend de la forme concrète de l'opération de contrôle. Si lors de l'opération de contrôle on peut déceler l'éventualité d'apparition d'une panne, le contrôle statistique est en même temps un contrôle de la fiabilité. Toutefois, les tâches du contrôle statistique sont plus larges. Par exemple, le contrôle d'après l'aspect extérieur n'est pas lié directement au contrôle de la fiabilité. L'inclusion dans ce livre de fiabilité d'un chapitre consacré au contrôle statistique s'explique par le fait que l'organisation juste du contrôle statistique est une mesure efficace pour élever la fiabilité des articles.

Dans le présent paragraphe on considère les questions liées aux problèmes du contrôle statistique dans la production. On introduit la notion de déroulement normal de la production et de distribution a priori du nombre d'articles défectueux. On donne les définitions des types de plans de contrôle d'acceptation et de leurs caractéristiques opérationnelles. On rapporte des exemples des diverses violations qui peuvent se présenter lors de l'utilisation pratique des plans de contrôle d'acceptation. Au § 7.2 on étudie divers indices de plans de contrôle d'acceptation ; au § 7.3 on rapporte un exemple du standard basé sur la qualité limite de sortie et on expose les standards des plans de contrôle d'acceptation largement utilisés. Le procédé économique, dont les bases ont été proposées par. A. Kolmogorov, est exposé au § 7.4. Le calcul des tables d'après ce standard n'est pas encore terminé, de sorte que nous ne donnons dans ce livre que les tables du plan du type d'échantillon unique. Les formules pour l'estimation ultérieure des indices d'efficacité des plans de contrôle utilisés sont données au § 7.5. Le cas des plans du type d'échantillon unique a été étudié dans les travaux de Kolmogorov [1], Sirajdinov et Eidelnant [2]. Le matériel du § 7.6, consacré aux problèmes du contrôle courant d'après un indice quantitatif, sort quelque peu du cadre général de ce chapitre.

Nous nous bornons ici principalement à la position des problèmes qu'il est nécessaire d'étudier pour l'organisation juste du contrôle courant d'après un indice quantitatif. L'organisation du contrôle courant est une partie importante du programme général de l'organisation du contrôle statistique à l'entreprise.

A l'heure actuelle la production des éléments est (surtout en radioélectronique) assurée au moyen de processus technologiques compliqués, qui comportent des dizaines et parfois des centaines d'opérations différentes. De nombreux facteurs influent sur la qualité et la fiabilité des éléments produits. Il n'est pas possible de contrôler tous ces facteurs. Il en résulte que deux éléments produits l'un après l'autre peuvent avoir des propriétés fort différentes, bien que toutes les conditions essentielles des régimes technologiques aient été observées. Si, en outre, on a observé de sérieux écarts du déroulement normal de la production, le nombre d'éléments non conformes, défectueux, peut fortement augmenter. La production des pièces défectueuses est liée à deux sortes de pertes. Premièrement, une dépense inutile de travail et de matière pour produire un élément défectueux; deuxièmement, l'utilisation des pièces défectueuses peut causer des pertes dues aux avaries et aux arrêts de l'équipement pour le renouvellement.

Comment peut-il se faire que la production non fiable et de mauvaise qualité soit livrée par l'entreprise, puis utilisée par le consommateur ? La raison en est que, premièrement, de nombreuses propriétés des éléments constituant les attributs de leur qualité sont soit très difficilement contrôlables dans les conditions d'usine, soit simplement incontrôlables du fait du caractère destructif des essais (un exemple classique est fourni par le contrôle des fusées-détonateurs). Deuxièmement, la mauvaise qualité des éléments peut résider dans la non-stabilité des paramètres caractérisant leur fonctionnement. Durant le contrôle leurs valeurs sont entièrement acceptables pour le consommateur, mais par la suite, après le stockage et un faible temps d'exploitation, elles se trouvent modifiées de façon inadmissible. La conduite des opérations de contrôle (O. C.) pour déterminer le niveau de la qualité des matières premières, des produits semi-fabriqués ou d'un élément fini est souvent une opération complexe exigeant des recherches préliminaires spéciales sur la méthodologie des essais et de l'élaboration d'un appareillage d'essais spécialisé. Imaginons-nous le processus technologique comme une chaîne d'opérations technologiques élémentaires, auxquelles sont soumis les produits semi-fabriqués avant de se transformer en un article-élément fini (fig. 7.1.1). La section de contrôle technique (S. C. T.) doit décider à la base d'études préliminaires de l'emplacement rationnel des postes de contrôle (P. C.) de la production et déterminer les paramètres qui doivent être mesurés pour cela. En règle générale, de tels P. C. sont placés tout au début du processus

technologique pour vérifier la qualité des matières premières (*contrôle d'entrée*), ainsi qu'à la fin pour vérifier la qualité et la fiabilité des articles produits (*contrôle d'acceptation*). Un P. C. est également placé après chaque opération technologique importante ou difficile à régler pour vérifier le déroulement normal du processus technologique sur ces opérations. Un contrôle de ce genre est appelé *contrôle courant*.

Le degré de rigueur du contrôle aux P. C. poursuit le but suivant : la production doit se composer d'éléments susceptibles d'être utilisés

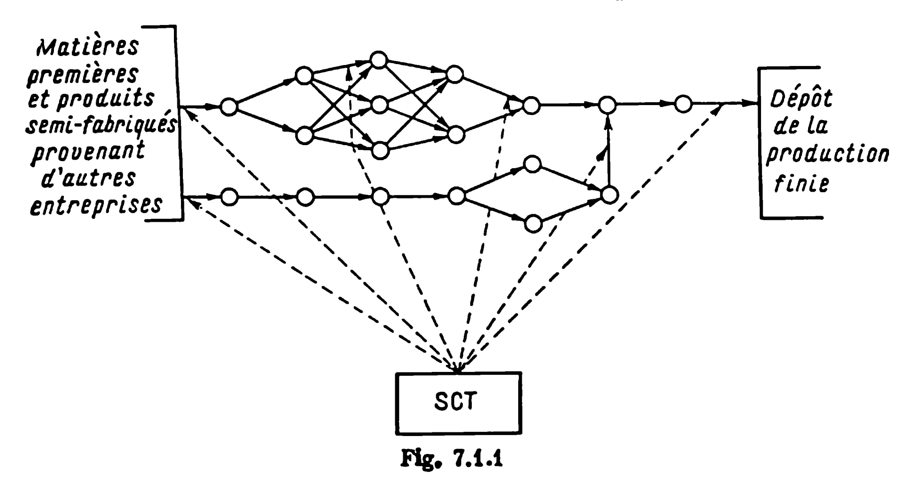


Fig. 7.1.1

par le consommateur. L'introduction du contrôle conduit, d'une part, à l'élévation du prix de revient de la production, d'autre part, à l'abaissement du prix de revient, puisque les dépenses liées à la production d'éléments défectueux diminuent. Il est relativement facile de prendre en considération l'influence de l'introduction du contrôle sur l'élévation du prix de revient. Il est bien plus difficile de tenir compte du gain que fournit l'introduction du contrôle. Le gain ne dépassera les dépenses de contrôle que sous la condition que ce contrôle soit scientifiquement fondé.

Les exigences envers le contrôle du producteur et du consommateur sont contradictoires. Pour l'entreprise, en l'absence de concurrence, le contrôle semble être une charge liée à des dépenses non productives, de sorte qu'une tendance se dessine à minimiser le nombre de postes de contrôle ; le consommateur, au contraire, est intéressé à ce que le niveau de la qualité soit le plus élevé possible et, donc, que le contrôle soit rigoureux (avant tout, en ce qui concerne les contrôles de sortie et d'acceptation). Parfois même le consommateur ne se satisfait pas des données des S. C. T. et vérifie encore la production finie. Ainsi le degré de rigueur et le volume du contrôle sont

déterminés en définitive par un compromis sur la qualité admissible des articles fabriqués. Aux P.C. on a déterminé quels paramètres des articles (des éléments ou des produits semi-fabriqués) doivent être mesurés. La qualité des articles qu'on soumet au contrôle peut être déterminée de différentes façons. On peut enregistrer les valeurs numériques exactes des paramètres (contrôle suivant un *indice quantitatif*) ou ne mentionner que des catégories, des classes auxquelles doit appartenir l'article à vérifier. On peut enfin adopter l'une des deux décisions suivantes: l'article est bon ou n'est pas bon pour l'utilisation ultérieure. Si l'article n'est pas bon, il est déclaré défectueux et classé au rebut. Un contrôle de ce genre est dit *qualitatif*. Dans le présent chapitre nous nous bornerons principalement au cas de contrôle qualitatif.

La notion même de rebut de l'article dépend intimement du genre d'article et des conditions de son utilisation. Très souvent le rebut est défini par la sortie de l'un au moins des paramètres mesurés en dehors des limites admissibles. Par exemple, si une résistance est marquée $10k\Omega \pm 2$ % et si la valeur réelle de la résistance ohmique sort des limites indiquées et sera égale par exemple à $10{,}3k\Omega$, cette résistance sera estimée défectueuse. Toutefois, si la tolérance était fixée à ± 5 %, cette résistance aurait été estimée conforme. On peut rencontrer dans la pratique des cas, où un même article s'avère au cours de mesures successives soit défectueux, soit conforme. Un exemple peut être donné par la mesure du courant inverse de grille après les essais des tubes sur les stands de vibrations. En effectuant de tels essais successivement l'un après l'autre et en enregistrant le courant inverse on peut considérer qu'un même tube est ou bien conforme, ou bien défectueux du fait de l'importance du courant inverse. Le contrôle suivant un indice qualitatif présente certains avantages par rapport au contrôle quantitatif. Premièrement, il est plus simple tant en ce qui concerne le volume des calculs que les méthodes de vérification. On peut préparer des calibres ou des dispositifs automatiques de mesure qui permettront de juger si l'élément est conforme ou non. Deuxièmement, la méthode basée sur le contrôle qualitatif ne dépend pas de la loi de distribution des paramètres mesurés et, par conséquent, est plus universelle, alors que dans la grande majorité des cas lors du contrôle suivant un indice quantitatif on estime que les paramètres mesurés suivent une distribution normale (cf. W. Allen Wallis, Techniques of Statistical Analysis, 1947). Il convient toutefois de noter que lors du contrôle suivant un indice qualitatif on n'utilise qu'une petite partie de l'information recelée dans les observations, ce qui conduit à la nécessité d'exécuter un grand nombre de mesures. L'opération de contrôle peut présenter un double caractère. Dans certains cas elle ne porte aucun tort aux articles, autrement dit, l'article déclaré conforme reste également conforme après le contrôle. En d'autres cas

l'opération de contrôle est liée à une modification de la qualité et parfois même à la destruction des articles à vérifier. Les essais de résistance et de fiabilité présentent, en règle générale, un caractère destructif. Ainsi, en première approximation le contrôle peut être divisé en contrôle *destructif* et *non destructif*.

Comme en théorie de la fiabilité il est important de vérifier la stabilité des paramètres en fonction des diverses influences extérieures, le contrôle est habituellement destructif ou du moins modifiant la qualité des articles. C'est pourquoi l'*élaboration des méthodes de contrôle par des indices indirects sans destruction des articles, méthodes permettant de juger de la qualité des articles d'après les paramètres exigeant pour être estimés un contrôle destructif, présente un très grand intérêt.*

Les essais peuvent notablement différer par le nombre de paramètres vérifiés. De temps en temps on conduit des essais suivant un programme élargi, comprenant diverses conditions climatiques, vibrations, chocs, etc. Les essais de ce genre sont appelés *périodiques*.

Les opérations de contrôle doivent permettre de décider si l'article vérifié est bon ou défectueux. On rencontre parfois des cas (un exemple peut être fourni par les mesures du courant inverse de grille dont nous avons parlé plus haut), où l'on ne peut déterminer la défectuosité des articles vérifiés qu'avec une certaine probabilité donnée. Nous ne considérerons plus bas que les cas, où la division des articles en conformes et défectueux est exempte d'erreurs. Si l'opération de contrôle est non destructive et si son coût est assez bas, on procède très souvent dans ces conditions au contrôle *intégral*. Lors du contrôle intégral on vérifie tous les articles. On rencontre bien plus souvent une situation telle que soit les dépenses générales liées au contrôle sont élevées, soit le contrôle est destructif. Dans ces cas seuls certains articles spécialement choisis à cet effet sont soumis à l'opération de contrôle. Un tel contrôle est appelé contrôle *d'échantillonnage*. Parmi les P.C. desservant le processus technologique (cf. fig. 7.1.1) une partie effectue un contrôle intégral et une partie, un contrôle d'échantillonnage. Si le but général de l'introduction du contrôle est l'abaissement du taux d'articles défectueux dans la production finie, on adopte pour cela à chaque poste de contrôle diverses décisions. Dans les P.C. intérieurs on effectue le contrôle courant d'après les résultats duquel on adopte les décisions de régler l'équipement. Dans les P.C. d'entrée et de sortie on organise le contrôle d'acceptation. Il est ici indispensable d'adopter une décision relative à la qualité des groupes d'éléments, les lots. Si parmi les éléments composant le lot, les éléments défectueux sont nombreux, un tel lot doit être soit soumis à un contrôle intégral, soit mis au rebut. Cette dernière solution est adoptée dans les cas, où le contrôle intégral est soit trop coûteux, soit destructif. Pour déterminer le taux d'articles défectueux dans le lot, il n'est pas

nécessaire d'effectuer le contrôle intégral de tous les articles. Il suffit de vérifier une partie du lot et ensuite de décider à l'appui des résultats de ce contrôle de ce qui doit être fait avec les autres articles.

Le contrôle peut être « *rectifiant* » ou « *préventif* ». Cette division est quelque peu conventionnelle. On applique le contrôle rectifiant quand il n'est pas destructif et quand fréquents sont les lots comportant une forte proportion d'articles défectueux. La vérification du lot d'après les résultats du contrôle d'échantillonnage signifie le contrôle de la partie restante du lot avec élimination de tous les articles défectueux et leur remplacement par des articles conformes. Lors du contrôle rectifiant on vérifie une proportion importante de tous les articles présentés. Si, par contre, la production est bien réglée et si presque tous les lots ne contiennent qu'un faible pourcentage d'articles défectueux, le contrôle d'acceptation doit présenter un caractère préventif. Cela signifie que d'après les résultats du contrôle la décision de mettre un lot au rebut sera prise pour des lots comportant un nombre anormalement grand d'articles défectueux. Si le contrôle d'acceptation est destructif, il ne peut présenter qu'un caractère préventif. En effet, dans le cas du contrôle destructif nous ne pouvons pas réduire (en moyenne) le taux d'articles défectueux dans le lot, puisqu'en déterminant la qualité de l'article nous le détruisons. Nous pouvons toutefois d'après les résultats d'un contrôle d'acceptation judicieusement organisé, après n'avoir vérifié qu'une partie du lot, juger avec un degré élevé de certitude de l'importance de la proportion d'articles défectueux dans le lot donné.

Déroulement normal du processus de production. L'une des notions importantes qui peut être fortement utilisée lors d'une organisation judicieuse du contrôle d'acceptation est celle du *taux* d'articles défectueux lors du déroulement normal du processus de production. On entend par *déroulement normal* du processus de production un état tel que les principales exigences technologiques sont observées. Le taux d'articles défectueux lors du déroulement normal du processus de production est faible, mais croît rapidement s'il se produit des violations notables dans la technologie. On a montré sur la figure 7.1.2 les résultats du contrôle intégral de 108 lots dont chacun comportait 1000 éléments. On a construit des colonnes au-dessus des nombres $d(N)$ d'articles défectueux décelés dans le lot. Après avoir vérifié le lot et y décelé un nombre $d(N)$ d'articles défectueux nous traçons un trait dans la colonne correspondant à la valeur $d(N)$. Ainsi, la présence de quatre traits dans la colonne correspondant à $d(N) = 0$ signifie que sur 108 lots vérifiés seuls quatre ne comportaient pas d'articles défectueux. Supposons que pour chacun de ces 108 lots l'on connaisse si ce lot a été obtenu lors d'un déroulement normal du processus de production ou si un certain déréglage s'était produit. Supposons alors que les lots recelant jusqu'à huit articles défectueux ont été fabriqués dans les

conditions normales de fabrication, les lots recelant 10, 12, 13, 14 articles défectueux, en présence de certains écarts mineurs des régimes technologiques, et les lots pour lesquels $d(N) = 29$, 41, 80, 89, en présence d'un déréglage sérieux du régime technologique. On voit sur la figure 7.1.2 que dans les conditions du déroulement normal du processus de production on peut considérer que le nombre $d(N)$ d'articles défectueux dans un lot composé de N articles est une variable aléatoire possédant une distribution bien déterminée. La

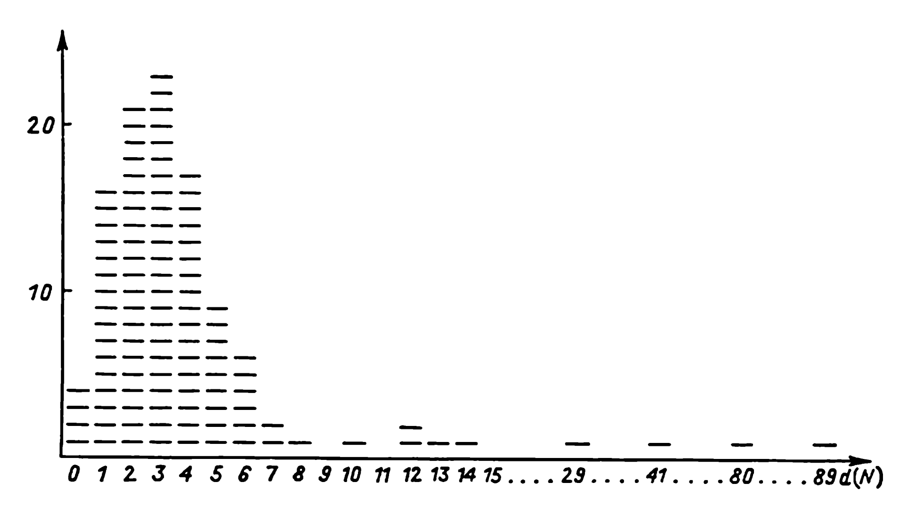


Fig. 7.1.2

forme de cette distribution $F_n(D) = \mathbf{P}\{d(N) < D\}$ ne peut être trouvée qu'après avoir réalisé des études spéciales. En certains cas on peut utiliser en première approximation la distribution binomiale ou de Poisson. Le nombre $d(N)$ suivra une distribution binomiale quand chaque élément a la même probabilité d'être défectueux. La distribution $F_n(D)$ est dite distribution *a priori* du nombre d'articles défectueux dans le lot fabriqué durant le déroulement normal de la production. Il semble fort douteux que l'on puisse fixer une distribution $F_{der}(D)$ pour le nombre d'articles défectueux dans le lot en présence de déréglages.

Supposons momentanément qu'une telle distribution $F_{der}(D)$ existe et qu'avec une probabilité p proche de l'unité soient conservées toutes les principales conditions déterminant le déroulement normal de la production et avec une probabilité $q = 1 - p$ un déréglage se soit produit. Dans ce cas la distribution a priori $F(D)$ du nombre D d'articles défectueux dans un lot est déterminée par la formule

$$F(D) = pF_n(D) + qF_{der}(D),$$

autrement dit, elle représente la superposition de deux distributions. Si les distributions $F_n(D)$ et $F_{der}(D)$ sont telles que $F_n(D)$ est déjà proche de 1, alors que $F_{der}(D)$ est encore petite, le problème de l'organisation du contrôle d'acceptation consiste en ce qui suit. Il faut organiser le contrôle de telle sorte que la plupart des lots fabriqués dans les conditions normales de production soient acceptés, alors que la plupart des lots fabriqués en présence d'un déréglage du processus de production soient rejetés.

Appelons cela pour être plus concis la propriété de discrimination. Lors de l'organisation d'un contrôle discriminant on peut partir de la forme concrète de la distribution $F_n(D)$, toutefois cette propriété de discrimination doit être conservée par rapport aux diverses distributions $F_{der}(D)$. L'exigence de la non-sensibilité par rapport à la forme de $F_{der}(D)$ s'explique par la forte dépendance de $F_{der}(D)$ de la nature des causes provoquant le déréglage.

La fixation de la distribution a priori $F(D)$ est souvent le point faible des plans basés sur des raisonnements économiques. La forme de la distribution a priori influe fortement sur l'efficacité de l'utilisation du plan de contrôle. A. Kolmogorov a proposé aux auteurs l'exemple suivant. Supposons que l'on effectue un contrôle d'échantillonnage pour lequel on prélève sur chaque lot une certaine quantité d'articles à vérifier. Si l'on découvre dans l'échantillon un seul article défectueux, le lot est rejeté. S'il n'y a pas d'articles défectueux dans l'échantillon, le lot est accepté. Il pourrait sembler naturel à première vue qu'un tel contrôle ne puisse jamais abaisser la qualité de la production acceptée. Supposons, toutefois, que la distribution a priori $F(D)$ est telle que dans chaque lot présenté au contrôle ou bien tous les éléments sont conformes, ou bien un seul élément est défectueux. Dans le cas d'une telle distribution a priori on rejettera précisément les lots dans lesquels on a décelé l'unique article défectueux possible. Il est clair que la qualité de la production acceptée lors de l'utilisation du plan de contrôle statistique sera plus mauvaise que sans le contrôle. Toutefois, pour d'autres distributions a priori ce même plan de contrôle peut s'avérer pleinement efficace.

Pour l'organisation du contrôle d'acceptation d'échantillonnage on doit donner un système de règles, le *plan de contrôle*, dans lequel on indique comment doit être choisi l'article soumis au contrôle, à partir de quelle quantité d'articles vérifiés doit-on adopter la décision d'accepter le lot, de le rejeter ou de poursuivre le contrôle. Trois types de plans de contrôle d'échantillonnage suivant un principe qualitatif ont connu la plus large application.

I. *Plans du type d'échantillonnage simple*. Sur un lot de taille N on prélève d'une manière aléatoire n éléments ($n \leqslant N$) que l'on soumet au contrôle. Si le nombre des éléments défectueux parmi les n choisis est égal à $d(n) \leqslant c$, où c est un nombre entier appelé *nombre d'acceptation*, on accepte le lot. Si $d(n) > c$, le lot est rejeté.

II. *Plans du type d'échantillonnage double.* Dans un lot de taille N on choisit d'une manière aléatoire n_1 éléments (*premier* échantillon) ; si le nombre d'articles défectueux $d(n_1) \leqslant c$, le lot est accepté, et si $d(n_1) > c_2 > c_1$, le lot est rejeté ; si, par contre, $c_1 < d(n_1) \leqslant \leqslant c_2$, on prélève un second échantillon de n_2 éléments. Si le nombre global d'éléments défectueux recensés dans les deux échantillons $d(n_1 + n_2) \leqslant c_3$, le lot est accepté, si $d(n_1 + n_2) > c_3$, le lot est rejeté. On utilise souvent des plans du type d'échantillonnage double tronqués pour lesquels $c_2 = c_3$.

III. *Plans du type progressif.* Lors de l'utilisation de ces plans on se donne les tailles des échantillons successifs n_i, $i = 1, 2, \ldots$, $n_1 < N$, $n_1 + n_2 < N$, etc., et aussi des couples de nombres entiers c_i, c'_i. Soit $d_i = d(n_1 + \ldots + n_i)$ le nombre d'articles défectueux décelés dans les i premiers échantillons. Au début du contrôle on prélève un échantillon de taille n_1. Si $d_1 \leqslant c_1$, on accepte le lot, si $d_1 > c'_1$, on le rejette; si, par contre, $c_1 < d_1 \leqslant c'_1$, on prélève un second échantillon de taille n_2, etc. Au i-ième pas, si $d_i \leqslant c_i$, on accepte le lot ; si $d_i > c'_i$, on le rejette ; si $c_i < d_i \leqslant c'_i$, on prélève encore un échantillon de taille n_{i+1}, etc.

Chacun des types de plans que nous venons d'indiquer possède ses avantages et ses inconvénients. Nous donnerons une analyse plus détaillée dans le paragraphe suivant. Nous noterons simplement que les plans du type d'échantillonnage simple sont bien moins compliqués du point de vue de l'organisation. En outre, on connaît à l'avance la taille de l'échantillon à prélever. Dans les plans du type d'échantillonnage double et les plans progressifs on peut obtenir un niveau très élevé de certitude que les décisions prises sont conformes avec la réalité. On peut toutefois rencontrer des cas, où le volume de l'inspection sera beaucoup trop grand. L'estimation de la qualité de la production pour les plans des types II et III est bien plus compliquée que pour les plans du type I.

Caractéristique opérationnelle. L'utilisation des méthodes du contrôle d'acceptation est liée au risque de rejeter à tort de bons lots et d'accepter des lots contenant un taux élevé d'articles défectueux. Lors du prélèvement aléatoire des articles on peut, quand le nombre d'articles défectueux dans le lot est peu élevé, choisir pour le contrôle un nombre important d'articles défectueux, ce qui conduira à une décision erronée de rejeter un bon lot (erreur de première espèce). D'autre part, il peut arriver que, quand le taux d'articles défectueux est élevé, il n'y ait qu'une faible quantité d'articles défectueux dans l'échantillon et un mauvais lot sera accepté (erreur de seconde espèce). De telles décisions erronées sont inévitables quand on applique la méthode de contrôle d'échantillonnage. Le problème de l'organisation juste du contrôle d'échantillonnage consiste, en particulier, à faire en sorte que les décisions erronées se rencontrent rarement. autrement dit soient des événements peu

probables. Pour cela il faut choisir judicieusement les paramètres définissant le contrôle.

L'une des caractéristiques probabilistes les plus importantes du plan de contrôle d'échantillonnage est la caractéristique dite *opérationnelle*. On entend par caractéristique opérationnelle la fonction $\pi(q)$ égale à la probabilité d'accepter un lot contenant un taux d'articles défectueux égal à $q = \frac{D}{N}$, si l'acceptation est réalisée conformément au système de règles définissant le plan de contrôle initial.

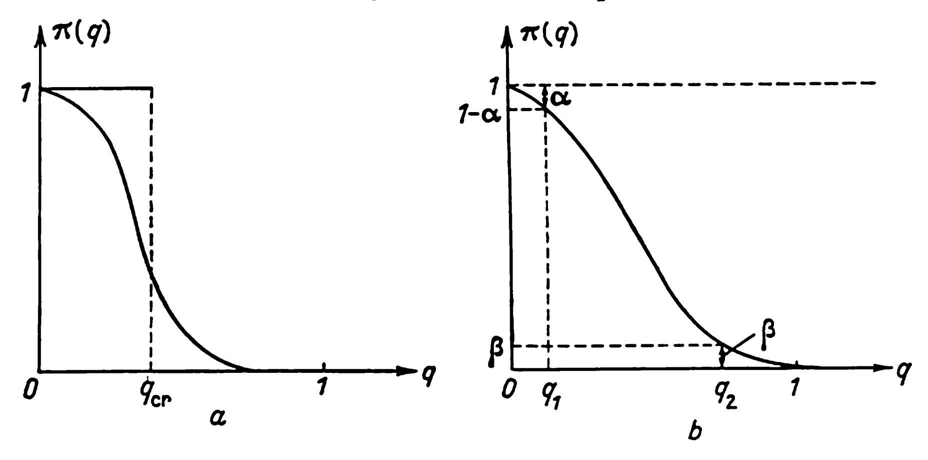


Fig. 7.1.3

A l'appui de la caractéristique opérationnelle on peut donner divers indices numériques des plans. Nous mesurons la qualité du lot par le taux d'articles défectueux $q = \frac{D}{N}$. Il peut s'avérer à l'appui de considérations économiques ou autres que les lots pour lesquels le taux d'articles défectueux $q < q_{cr}$ sont estimés bons et qu'il faut les accepter, et les lots pour lesquels $q > q_{cr}$ sont mauvais et il faut les rejeter. Dans ces cas il aurait été souhaitable d'utiliser le plan correspondant à une caractéristique opérationnelle idéale (fig. 7.1.3,*a*), qui est égale à 1 pour les valeurs $q < q_{cr}$ et est égale à zéro pour les valeurs $q > q_{cr}$. Il n'existe pas toutefois de tels plans de contrôle d'échantillonnage avec une taille relative de l'échantillon $\nu = \frac{n}{N} < 1$ parmi les plans du type d'échantillonnage simple. Il n'en existe pas non plus parmi les autres types de plans. La caractéristique opérationnelle de chaque plan de contrôle est une fonction monotone décroissante. L'allure générale de la caractéristique opérationnelle est montrée sur la même figure 7.1.3,*a*. Pour plus de clarté les caractéristiques opérationnelles sont partout

représentées par des lignes continues, bien qu'en fait elles n'ont de sens que pour les points $q = \frac{D}{N}$.

Il n'est pas toujours possible de diviser de façon catégorique à l'aide d'un seul nombre q_{cr} les lots en bons et mauvais. Il apparaît souvent une zone d'indétermination, où nous ne pouvons pas dire exactement si le lot est bon ou mauvais. Dans de tels cas le lot est estimé foncièrement bon si $q < q_1$ et foncièrement mauvais si $q > q_2$, $q_2 > q_1$. Comme la caractéristique opérationnelle du plan de contrôle d'échantillonnage est une fonction monotone décroissante et comme des décisions erronées sur l'acceptation ou le rejet sont inévitables, il est souhaitable que les probabilités des décisions erronées soient faibles. Soit $\pi(q)$ la caractéristique opérationnelle du plan. On impose au plan les exigences consistant en ce que $\pi(q) \geqslant 1 - \alpha$ quand $q < q_1$ et $\pi(q) \leqslant \beta$ quand $q > q_2$. La probabilité $1 - \pi(q_1)$, c'est-à-dire la probabilité de rejeter un lot bon, est appelée erreur de première espèce, ou *risque du producteur*, le taux q_1 est appelé *qualité admissible*. La probabilité $\pi(q_2)$ d'accepter à tort un mauvais lot est appelée *risque du consommateur*, et le taux q_2, *qualité limite admissible* dans ce sens que si $q_1 < q < q_2$, on estime que le lot est encore acceptable. Ainsi les exigences envers le plan peuvent consister en ce que les probabilités des erreurs, autrement dit les risques du producteur et du consommateur, soient respectivement non supérieures à α et β (fig. 7.1.3,*b*).

On utilise habituellement dans les tables certains ensembles uniquement de valeurs de α, β, par exemple 0,1 ; 0,05 ; 0,01. Si l'on utilise le plan de contrôle d'échantillonnage pour lequel les risques $\alpha = 0{,}01$; $\beta = 0{,}05$ pour des valeurs $q_1 = 0{,}01$ et $q_2 = 0{,}05$, cela signifie qu'en moyenne dans chaque 100 lots pour lesquels le taux d'articles défectueux ne dépasse pas 1 % on ne rejettera pas plus d'un lot, et de 100 lots contenant plus de 5 % d'articles défectueux on acceptera en moyenne pas plus de 5 lots. Le choix du couple de nombres q_2, β est réalisé en tenant compte des exigences du consommateur. Le choix de q_1 et α est réalisé de manière à se garantir d'un rejet injustifié des bons lots. On choisit souvent la valeur de q légèrement supérieure à la valeur moyenne du taux d'articles défectueux lors du déroulement normal du processus de fabrication, ce qui garantit que presque tous les lots fabriqués en tenant compte des exigences technologiques seront acceptés. Nous désignerons par q_α le taux d'articles défectueux dans un lot tel que la probabilité d'accepter ce lot est égale à α, autrement dit $\pi(q_\alpha) = \alpha$. On appelle $q_{1/2}$ la *qualité indifférente* lors de l'utilisation du plan associé à la caractéristique opérationnelle $\pi(q)$. Si le plan de contrôle a déjà été choisi et si le taux d'articles défectueux dans le lot coïncide avec la qualité indifférente, alors en moyenne la moitié de lots de ce genre sera rejetée et l'autre moitié acceptée.

Par exemple, pour les plans du type d'échantillonnage simple on doit donner la taille n de l'éc antillon et la valeur du nombre d'acceptation c. Considérons en qualité d'exemple le cas du choix des valeurs du nombre d'acceptations c sur la base des données rapportées sur la figure 7.1.2, quand il a été décidé de choisir dans les fins de contrôle un échantillon de $n = 100$ articles de chaque lot de taille $N = 1000$. Supposons que les contrôleurs ne connaissent pas les résultats du contrôle intégral et que tous les articles défectueux soient laissés dans tous les 108 lots. Les résultats du contrôle d'échantillonnage se sont avérés les suivants: les articles défectueux étaient absents dans les échantillons prélevés sur 75 lots, dans 24 échantillons on a découvert un article défectueux par lot, dans quatre échantillons deux, dans deux échantillons quatre, dans un échantillon six et dans deux échantillons huit articles défectueux (fig. 7.1.4). En les comparant avec les résultats du contrôle intégral on remarque que tous les 75 lots dans lesquels le nombre d'articles défectueux recensés $d(n) = 0$ avaient été fabriqués lors du déroulement normal du processus de production, que parmi les 24 lots pour lesquels $d(n) = 1$, 23 avaient

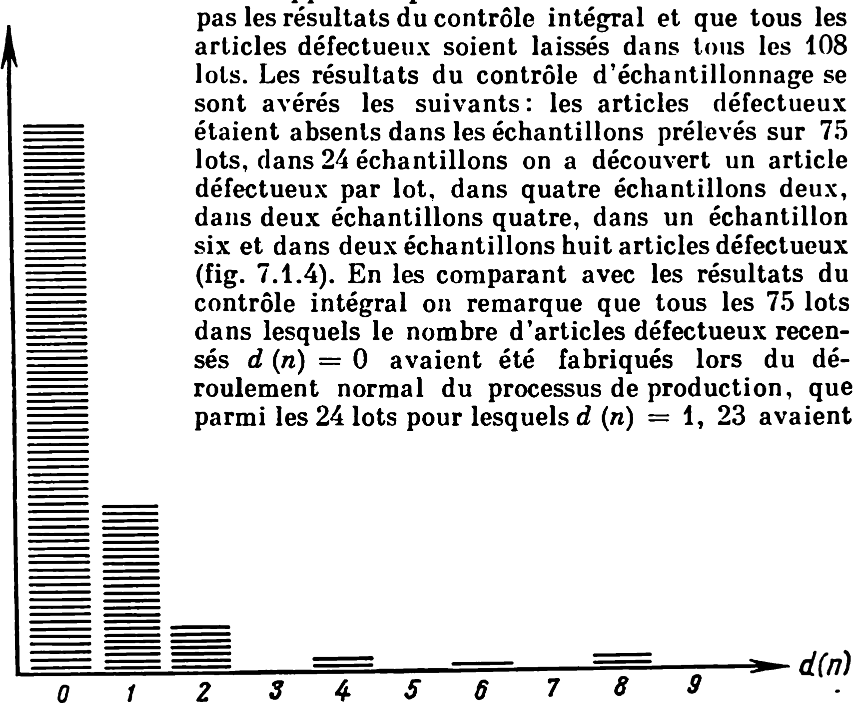


Fig. 7.1.4

été fabriqués lors du déroulement normal du processus de fabrication, parmi les 4 pour lesquels $d(n) = 2$ deux seulement avaient été fabriqués lors du déroulement normal du processus de production.

Il apparaît ainsi qu'il n'est pas intéressant de poser $c = 0$, puisque 23 lots fabriqués lors du déroulement normal du processus de production et recelant un nombre relativement faible d'articles défectueux seraient rejetés. On a montré dans la table 7.1.1 la probabilité de rejeter un lot de taille $N = 1000$ contenant D articles défectueux d'après un échantillon de taille $n = 100$, quand $c =$ $= 1, 2, 3$. Le calcul a été conduit en utilisant la distribution hyper-

géométrique d'après les formules du § 7.2. Les calculs montrent que quand $c = 0$ les probabilités des erreurs de première et de seconde espèces sont respectivement égales à 0,41 et 0,04; quand $c = 1$, à 0,08 et 0,18; quand $c = 2$, à 0,01 et 0,42; quand $c = 3$, à 0,002 et 0,66. Un lot est ici estimé bon si $D \leqslant 5$, et mauvais si $D \geqslant 30$. La valeur la plus convenable du nombre d'acceptation c est $c = 1$.

Table 7.1.1

c \ D	3	5	10	20	30	50	100
$c=0$	0,271244	0,410168	0,653072	0,880975	0,959003	0,995516	0,999974
$c=1$	0,027788	0,082284	0,263705	0,610773	0,817792	0,969173	0,999648
$c=2$	0,000978	0,009702	0,069238	0,322752	0,585332	0,894179	0,997651
$c=3$	0,000000	0,001773	0,011980	0,130887	0,341777	0,471999	0,989713

Il est très difficile d'effectuer chaque fois de tels calculs en tenant compte de la variation de N et n. C'est pourquoi on élabore des systèmes spéciaux de choix des plans de contrôle d'acceptation à partir d'un grand nombre de plans de ce genre. A l'heure actuelle on a édité de nombreux ouvrages recelant des tables de plans que l'on peut utiliser pour organiser le contrôle d'acceptation (cf. [4] à [7]). La revue critique de divers plans standards est donnée au § 7.3. Toutefois, la solution définitive du problème n'est pas encore donnée à l'heure actuelle. La difficulté d'élaborer la méthode de choix des plans de contrôle les plus acceptables réside principalement non pas dans l'aspect mathématique du problème, mais dans la prise en considération de tous les facteurs de production prédéterminant ce choix. Il existe divers indices numériques de l'efficacité d'utilisation de chaque plan. Des exemples en sont fournis par les erreurs de première et de seconde espèces. Des indices entièrement différents seront définis au paragraphe suivant. Dans le choix judicieux du plan de contrôle d'acceptation en divers cas un rôle important appartient aux considérations économiques. L'une des variantes possibles de l'organisation du contrôle d'acceptation à la base des indices de coût est considérée au § 7.4.

Violations possibles des règles de contrôle. On donne au § 7.5 les méthodes d'estimation de la qualité de la production à la base des résultats du contrôle. On rapporte des estimations non biaisées, c'est-à-dire justes en moyenne, de la qualité de la production pro-

posée et acceptée. Le problème principal consiste en ce qui suit. Supposons qu'on présente au contrôle des lots de taille N_i contenant D_i articles défectueux. Après avoir effectué le contrôle on accepte $N_{i\,ac}$ articles de chaque lot dans lequel $D_{i\,ac}$ sont défectueux. Connaissant les résultats du contrôle on demande d'estimer le taux d'articles défectueux dans la production présentée (*qualité d'entrée*) et le taux d'articles défectueux dans la production acceptée (*qualité de sortie*). En utilisant les méthodes de calcul des estimations non biaisées pour les qualités d'entrée et de sortie de la production, il convient d'accorder une attention particulière à l'observation des règles de réalisation du contrôle d'acceptation à partir desquelles on a établi les formules des estimations. Il se produit toutefois diverses sortes de violations. Rapportons deux exemples de violations possibles.

Exemple 1. Pour effectuer le contrôle on prélève dans chaque lot 100 éléments indépendamment de la taille du lot. On vérifie tous les articles prélevés; si le nombre des articles défectueux décelés $d > 2$, on rejette le lot, si par contre $d \leqslant 2$, le lot est accepté. Le nombre global d'articles défectueux ainsi décelés est alors enregistré dans un cahier. A la base des données enregistrées on dessine un trait dans la colonne respective, correspondant au nombre $d(n)$ d'articles défectueux décelés. Les données obtenues sont rapportées sur la figure 7.1.5,*a*. Il s'avère, d'après les données enregistrées, que l'on n'a pas du tout rencontré de lots dont les échantillons contenaient plus de trois articles défectueux. Nous voyons de la figure 7.1.5,*a* que le nombre de lots contenant $d = 3$ articles défectueux est égal à 35, et pour $d = 0$, $d = 1$, $d = 2$, les nombres de lots sont respectivement 60, 45 et 33. L'explication la plus plausible consiste en ce que le contrôle avait été poursuivi jusqu'à ce que l'on décèle les trois premiers éléments défectueux. Il semblait au contrôleur, qui ne savait pas comment influe la violation du plan de contrôle sur l'estimation de la qualité, tout à fait inutile de vérifier le reste de l'échantillon, puisque le lot devait être rejeté. Si les règles du contrôle avaient été scrupuleusement observées, les résultats du contrôle auraient eu la forme que montre la figure 7.1.5,*b*. On voit, sans même effectuer de calculs, que la violation du plan de contrôle a conduit à surestimer la qualité de la production.

Exemple 2. La représentation graphique des données sous forme de colonnes a l'allure que montre la figure 7.1.6,*a*.

On remarque la réduction brutale du nombre de lots pour lesquels $d = 3$. On en compte seulement 10, alors qu'il y a 60 lots dont l'échantillon contient $d = 2$ articles défectueux. Il est écrit dans le plan de contrôle que l'on doit prélever sur chaque lot 100 articles et que quand on découvre plus de deux articles défectueux le contrô-

0 1 2 3 d(n)

a

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 d(n)

b

Fig. 7.1.5

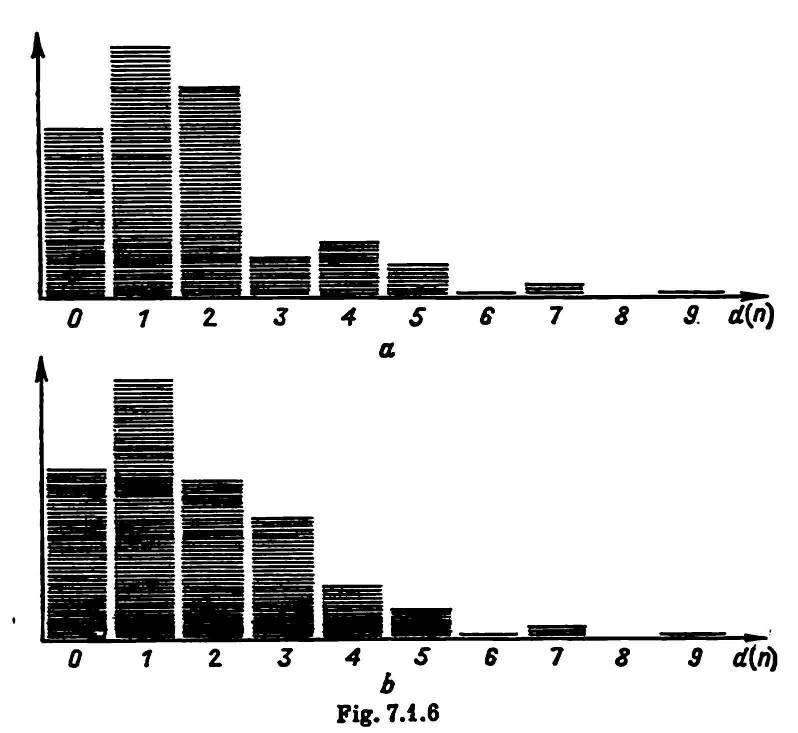


Fig. 7.1.6

leur vérifie intégralement la partie restante du lot. Ainsi, le rejet d'un lot signifie un fort accroissement du travail du contrôleur. Si les articles sont utilisés dans des secteurs peu importants de la production (par exemple, dans la production d'outils), le contrôleur, après avoir découvert dans l'échantillon exactement trois articles défectueux, accepte un tel lot en réduisant ainsi artificiellement le volume de son travail. Si l'on a ainsi accepté 15 lots, alors, en observant scrupuleusement le plan de contrôle, le matériel empirique aurait la forme que montre la figure 7.1.6,*b*.

Dans les exemples cités, bien que les chiffres rapportés ont été inventés, l'essence du problème est réelle. On aurait pu certainement allonger la liste de cas semblables, peut-être plus originaux.

Le but de ces exemples est de montrer que même une simple analyse statistique, semblable à celle que nous avons utilisée pour composer les figures 7.1.5 et 7.1.6, peut parfois mettre en évidence des faits essentiels.

§ 7.2. Caractéristiques numériques des plans de contrôle d'acceptation

Plans du type d'échantillonnage simple. Nous avons déjà indiqué plus haut que l'organisation judicieuse du contrôle d'acceptation exige que l'on sache estimer l'efficacité d'utilisation des divers plans à l'aide des critères numériques. Chaque plan de contrôle est déterminé par l'instant, où l'on doit interrompre le contrôle, et aussi par l'indication de la décision que l'on doit adopter.

En règle générale (cf. [7]), on adopte l'une des trois décisions suivantes:

D_1, rejeter la partie restante non vérifiée du lot sans contrôle;

D_2, effectuer un contrôle intégral de toute la partie restante du lot;

D_3, accepter la partie restante du lot sans contrôle ultérieur.

D'autres décisions sont parfois possibles en certains cas, comme l'abaissement du label de qualité, le renvoi de la partie restante du lot pour un traitement approprié éliminant les défauts, etc.

Les plans du type d'échantillonnage simple sont caractérisés par deux paramètres, la taille de l'échantillon n et le nombre d'acceptation c. Si l'on désigne par $d(n)$ le nombre d'articles défectueux dans l'échantillon, le lot est rejeté quand $d(n) > c$ (c'est-à-dire que l'on adopte l'une des décisions D_1 ou D_2), et si $d(n) < c$, le lot est accepté (c'est-à-dire que l'on adopte l'une des décisions D_3 ou D_2). Convenons de désigner les plans du type d'échantillonnage simple par leurs paramètres (n, c). Dans ce cas, si le rejet signifie l'adoption de la décision D_i et l'acceptation, l'adoption de la décision D_j, ce plan sera noté $(n, c)_{ij}$.

Trois types de plans sont possibles $(n, c)_{12}$, $(n, c)_{13}$, $(n, c)_{23}$. Par exemple, le plan $(120; 1)_{23}$ signifie que dans chaque lot on doit prélever d'une manière aléatoire et vérifier 120 articles. Si $d(120) > 1$, il faut effectuer le contrôle intégral de la partie restante du lot. Si $d(120) \leqslant 1$, alors on accepte la partie restante du lot sans contrôle ultérieur. Les plans du type $(n, c)_{12}$ sont utilisés dans les cas, où le contrôle est *non destructif*, son coût est important et les exigences de qualité sont élevées. Les plans du type $(n, c)_{13}$ sont utilisés principalement lors du contrôle *destructif* ou dans les cas, où le coût du contrôle est élevé. Enfin, les plans $(n, c)_{23}$ sont appliqués aussi bien lors du contrôle destructif que lors du contrôle non destructif, quand il est intéressant d'obtenir une information complémentaire sur la qualité de la production.

On voit sans aucuns calculs que le nombre moyen d'articles vérifiés est différent pour chacun de ces plans. De même, le taux d'articles défectueux dans la production acceptée d'après les résultats du contrôle sera différent, ainsi que les méthodes de son estimation que l'on étudiera au § 7.5. Si le contrôle n'est pas destructif, les articles défectueux ainsi décelés peuvent être remplacés par des articles conformes. Dans ce cas la taille du lot accepté ne sera pas modifiée. Le fait que les articles défectueux sont remplacés par des articles conformes sera noté par le signe prime $(n, c)'$, l'absence de remplacement par une croix $(n, c)^{\times}$, le fait que le contrôle est destructif par un astérisque $(n, c)^*$.

Des plans du type d'échantillonnage simple à double niveau de contrôle peuvent parfois s'avérer utiles. On fixe ici la taille de l'échantillon n et deux nombres critiques: le nombre d'acceptation c et le nombre de rejet c'. Si le nombre d'articles défectueux décelés $d(n) \leqslant c$, alors on adopte la décision D_3, si $c < d(n) < c'$, on adopte la décision D_2, si enfin $d(n) \geqslant c'$, on adopte la décision D_1. De tels plans peuvent s'avérer économiquement plus rationnels quand le contrôle est non destructif mais coûteux, et si l'on rencontre souvent des lots présentant un taux élevé d'articles défectueux. De tels plans sont notés à l'aide du triplet (n, c, c').

Etudions l'influence du taux d'articles défectueux sur la probabilité d'adopter telle ou telle décision et sur le volume global de l'inspection. Le lot présenté au contrôle peut être caractérisé par deux nombres: la taille du lot N et le nombre d'articles défectueux D qu'il contient et qui nous est inconnu. Supposons que l'on utilise le plan $(n, c)_{ij}$. Le nombre d'articles défectueux décelés $d(n)$ est une variable aléatoire. On peut aisément calculer les probabilités $\pi_d = \mathrm{P}\{d(n) = d\}$, $d = 0\,(1)\,n$ par deux méthodes différentes.

Dans la première méthode nous considérons tous les rangements possibles de D éléments dans N places, parmi lesquelles n places fixées définissent l'échantillon. Le nombre global de rangements des éléments différant uniquement d'après l'indice de la conformité ou

de la défectuosité est égal à C_N^D. On peut alors ranger d articles défectueux de C_n^d différentes façons dans n places fixées pour l'échantillon et les $D - d$ articles défectueux ne tombant pas dans l'échantillon de C_{N-n}^{D-d} façons dans les $N - n$ places restantes. Le nombre global de cas favorables pour l'événement $\{d(n) = d\}$ est égal à $C_n^d C_{N-n}^{D-d}$. Nous obtenons ainsi

$$\pi_d = \mathrm{P}\{d(n) = d\} = \frac{C_n^d C_{N-n}^{D-d}}{C_N^D}. \qquad (7.2.1)$$

Dans la seconde méthode nous considérons tous les divers échantillons possibles de N éléments n à n. Le nombre total de ces échantillons est C_N^n. Le nombre d'échantillons de D éléments défectueux d à d est C_D^d et le nombre d'échantillons de $N - D$ éléments conformes $n - d$ à $n - d$ est C_{N-D}^{n-d}. Le nombre global de cas favorables est ainsi égal à $C_D^d C_{N-D}^{n-d}$, d'où nous tirons

$$\pi_d = \frac{C_D^d C_{N-D}^{n-d}}{C_N^n}. \qquad (7.2.2)$$

On dit qu'une variable aléatoire $d(n)$ prenant les valeurs entières $0\,(1)\,n$ avec les probabilités π_d données par les formules (7.2.1), (7.2.2) suit une *distribution hypergéométrique*. On peut montrer que la valeur moyenne et la variance du taux d'éléments défectueux sont données par les formules

$$\mathrm{M}\frac{d(n)}{n} = \frac{D}{N}; \qquad \mathrm{M}\left(\frac{d(n)}{n} - \frac{D}{N}\right)^2 = \frac{1}{n}\,\frac{N-n}{N-1}\,\frac{D(N-D)}{N^2}. \qquad (7.2.3)$$

En effet, le nombre de tous les échantillons possibles de N éléments n à n, en tenant compte de l'ordre, sera $A = N(N-1)\ldots(N-n+1)$. Le nombre de cas pour lesquels un article donné sera vérifié le i-ième est $A = (N-1)(N-2)\ldots(N-n+1)$, le nombre de cas pour lesquels il sera défectueux est $B = D(N-1)(N-2)\ldots(N-n+1)$. Ainsi, la probabilité pour que le i-ième article prélevé pour le contrôle sera défectueux est égale à $\frac{B}{A} = \frac{D}{N}$. Comme $d(n) = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, où $\xi_i = 1$ quand le i-ième article est défectueux, $\left(\mathrm{P}\{\xi_i = 1\} = \frac{D}{N}\right)$, et $\xi_i = 0$ dans le cas contraire, alors $\mathrm{M}\left(\frac{d(n)}{n}\right) = n^{-1}\mathrm{M}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) = \mathrm{P}_i(\xi_i = 1) = \frac{D}{N}$. Par conséquent, le taux d'articles défectueux decelés dans l'échantillon est une estimation non biaisée du taux d'articles défectueux dans le lot. On peut démontrer d'une manière analogue la seconde formule (7.2.3). Pour souligner la dépendance de cette dis-

tribution des trois paramètres N, D, n nous désignerons partout les probabilités π_d de la distribution hypergéométrique par le symbole B_{ND}^{nd}. Pour le plan $(n, c)_{ij}$ la probabilité Π_c d'accepter le lot en adoptant la décision j est

$$\Pi_c(D) = \mathrm{P}\{d(n) \leqslant c\} = \sum_{d=0}^{c} B_{ND}^{nd}. \tag{7.2.4}$$

La probabilité de rejeter le lot en adoptant la décision i sera alors respectivement $1 - \Pi_c(D)$.

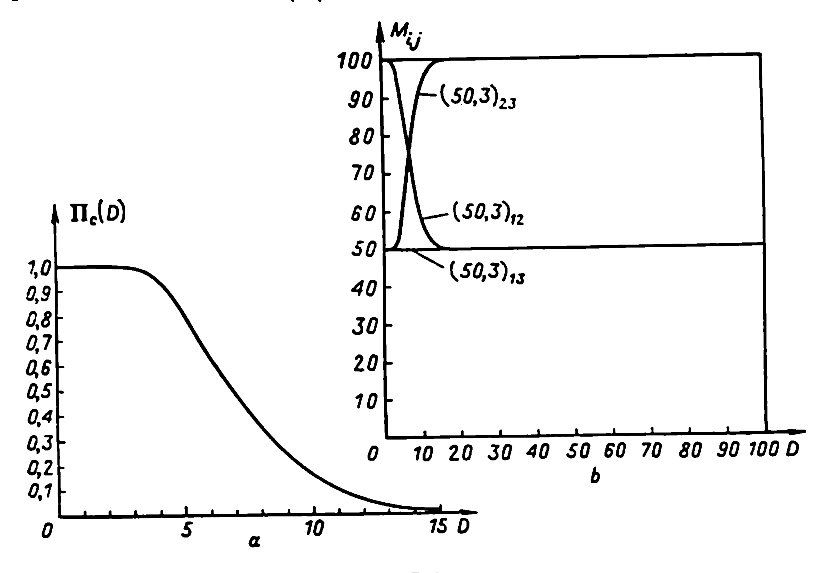


Fig. 7.2.1

La grandeur $\Pi_c(D)$ en tant que fonction du taux D d'articles défectueux dans le lot est appelée *caractéristique opérationnelle*. C'est l'un des indices fonctionnels les plus complets de l'efficacité du plan. La forme de la caractéristique opérationnelle pour le plan (50, 3) et $N = 100$ est montrée sur la figure 7.2.1,*a*. On voit de la figure que la probabilité d'accepter le lot décroît rapidement avec l'accroissement du taux d'articles défectueux dans le lot. Déjà quand $D = 10$, $\Pi_3 = 0{,}18$ et pour $D = 15$, $\Pi_3 < 0{,}02$.

La seconde caractéristique importante du contrôle est la dépendance de l'espérance mathématique du volume global d'éléments vérifiés de la valeur D. Quand on utilise le plan $(n, c)_{12}$, les $N - n$ articles restant non vérifiés sont vérifiés si $d(n) \leqslant c$. Ainsi, le volume global moyen de l'inspection $M_{12}(D)$ est donné par la formule

$$M_{12}(D) = n + (N - n)\,\Pi_c(D). \tag{7.2.5}$$

D'une manière analogue pour le plan $(n, c)_{13}$ on a

$$M_{13}(D) = n, \tag{7.2.6}$$

et pour le plan $(n, c)_{23}$

$$M_{23}(D) = n + (N-n)\,[1 - \Pi_c(D)]. \tag{7.2.7}$$

On a montré sur la figure 7.2.1, *b* les graphiques $M_{ij}(D)$ pour les plans $(50, 3)_{ij}$ et une taille du lot $N = 100$.

Approximations binomiale et poissonienne. La distribution hypergéométrique est difficile à tabuler du fait de la présence de trois paramètres indépendants N, D, n.

C'est pourquoi il est d'un grand intérêt pratique d'obtenir diverses approximations recelant les distributions connues avec un nombre moindre de paramètres. Nous nous bornerons ici à quelques exemples d'approximations binomiale et poissonienne. Notons que l'on peut mettre les formules (7.2.1) et (7.2.2) sous la forme

$$B_{ND}^{nd} = C_n^d \prod_{j=}^{d-1}\left(q-\frac{j}{N}\right)\prod_{k=0}^{n-d-1}\left(1-q-\frac{k}{N}\right)\left\{\prod_{l=0}^{n-1}\left(1-\frac{l}{N}\right)\right\}^{-1}, \tag{7.2.8}$$

$$B_{ND}^{nd} = C_D^d \prod_{j=0}^{d-1}\left(\nu-\frac{j}{N}\right)\prod_{k=0}^{D-d-1}\left(1-\nu-\frac{k}{N}\right)\left\{\prod_{l=0}^{D-1}\left(1-\frac{l}{N}\right)\right\}^{-1}, \tag{7.2.9}$$

où $q = \frac{D}{N}$ est le taux d'articles défectueux dans le lot, et $\nu = \frac{n}{N}$, la taille relative de l'échantillon. Nous obtenons de la formule (7.2.8) que

$$B_{ND}^{nd} \approx C_d^n q^d (1-q)^{n-d} \tag{7.2.10}$$

si seulement $n \ll \min(N, N-d)$ et $d \ll D$. Dans ces conditions on suppose en fait que $N \gg 1$ et $D \gg 1$.

Nous trouvons de la formule (7.2.9) que

$$B_{ND}^{nd} \approx C_D^d \nu^d (1-\nu)^{D-d} \tag{7.2:11}$$

si seulement $D \ll \min(N, N-n)$, $d \ll n$. Dans ces conditions on suppose en fait que $N \gg 1$ et $n \gg 1$. Ainsi, la distribution hypergéométrique peut être approchée par les distributions binomiales, qui sont déterminées par deux paramètres indépendants: q et n dans le premier cas et ν et D dans le second. Pour simplifier l'écriture nous les appellerons distributions q-binomiale et ν-binomiale. Les conditions pour lesquelles la distribution q-binomiale est une bonne approximation consiste en ce que la taille relative de l'échantillon

est faible et le taux d'articles défectueux est supérieur à la taille relative de l'échantillon; la distribution ν-binomiale donne de bons résultats quand la taille relative de l'échantillon est supérieure au taux q des articles défectueux.

Si $n \gg 1$, $d \ll n$, $q \ll 1$, $\nu \ll 1$, on peut utiliser l'approximation poissonienne

$$B_{ND}^{nd} \approx \left(\frac{\lambda^d}{d\,!}\right) e^{-\lambda}, \qquad (7.2.12)$$

où $\lambda = nq = D\nu$ est le nombre moyen d'articles défectueux tombés dans l'échantillon. La table (7.2.1) contient les données relatives pour les valeurs exactes des probabilités B_{ND}^{nd} et des diverses approximations considérées plus haut (comparer [6], p. 445).

Tab .2.1

k	$N=100;\ n=10;\ q=0{,}05$				$N=100;\ n=10;\ q=0{,}2$			
	B_{ND}^{nk}	b_n^k	$b_{Nq}^k\left(\frac{n}{N}\right)$	$l_k(nq)$	B_{ND}^{nk}	b_n^k	$b_{Nq}^k\left(\frac{n}{N}\right)$	$l_k(nq)$
0	0,584	0,599	0,590	0,607	0,095	0,107	0,122	0,135
1	0,339	0,315	0,328	0,303	0,268	0,268	0,270	0,271
2	0,070	0,075	0,073	0,076	0,318	0,285	0,302	0,271
3	0,006	0,010	0,008	0,013	0,209	0,190	0,201	0,180
4	0,000	0,001	0,001	0,002	0,084	0,090	0,088	0,090
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,022	0,034	0,026	0,036
6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,004	0,009	0,006	0,012
7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,000	0,030

Convenons d'utiliser les notations

$$\begin{gathered} b_l^k(a) = C_l^k a^k (1-a)^{l-k}, \quad l_k(x) = \left(\frac{x^k}{k\,!}\right) e^{-x}, \\ B_l^c(a) = \sum_{d=0}^{c} b_l^d(a), \quad L_c(x) = \sum_{d=0}^{c} l_d(x). \end{gathered} \qquad (7.2.13)$$

Nous obtenons des formules (7.2.10), (7.2.11), (7.2.12) que la caractéristique opérationnelle peut être calculée à l'aide des formules

$$\Pi_c(D) \approx B_n^c(q), \quad \Pi_c(D) \approx B_D^c(\nu), \quad \Pi_c(D) \approx L_c(\lambda). \quad (7.2.14)$$

Dans les cas, où l'on peut utiliser les distributions mentionnées plus haut et où la taille de l'échantillon $n > 30$, il est rationnel d'introduire au lieu du paramètre discret n le paramètre continu $t = \frac{n}{n_0}$, où n_0 est le nombre des articles parmi lesquels, lors du déroulement normal du processus de production, on rencontre en moyenne un article défectueux. Connaissant t, nous pouvons trouver la valeur n de l'égalité $n = tn_0$. Les nombres fractionnaires ainsi trouvés seront arrondis jusqu'à l'entier le plus proche. Par exemple, si $n_0 = 50$ et $t = 2{,}331$, alors $n = 116{,}55$, et en arrondissant nous trouvons $n = 117$. Les erreurs d'arrondi seront faibles et on peut les négliger, compte tenu que nous commettons par ailleurs une autre erreur en utilisant les approximations binomiale ou poissonienne. Supposons que les articles choisis au hasard soient vérifiés successivement l'un après l'autre, et soit n_i le numéro de l'essai durant lequel l'article vérifié s'avère défectueux. Posons $n_0 = \lambda\left(\frac{N}{D}\right)$, $t_i = \frac{n_i}{n_0}$, nous avons alors le théorème suivant.

Théorème 7.2.1. *Si* $\frac{D}{N} \to 0$, $N \to \infty$, $D \to \infty$, *la suite des instants* t_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, *constitue un flux poissonien d'intensité* λ.

La *démonstration* de ce théorème peut être obtenue à partir de la formule combinatoire exacte, en montrant qu'à la limite, les distributions à dimensions finies des instants t_i coïncident avec les distributions du flux poissonien. Nous omettons toutefois cette démonstration pour ne pas alourdir notre exposé par des formules volumineuses.

On peut ainsi considérer la taille de l'échantillon comme un paramètre temporel et les articles défectueux décelés, comme l'apparition d'un événement d'un flux aléatoire. De ce point de vue la présence de la distribution poissonienne (7.2.12) s'explique par le fait que nous observons les événements d'un flux aléatoire (le décèlement des articles défectueux) au cours d'un « temps » fixé $\lambda = \frac{n}{n_0} = nq$, $n_0 = q^{-1}$.

Il est également utile de noter que l'approximation poissonienne reste valable aussi pour des tailles relatives ν de l'échantillon arbitrairement grandes, si la distribution a priori du nombre d'articles défectueux est binomiale et que la valeur du paramètre q_0 est suffisamment petite ($q_0 < 0{,}1$).

Comme nous l'avons déjà souligné plus haut (cf. § 7.1), lors du déroulement normal du processus de production on peut estimer que

le nombre D d'articles défectueux dans un lot de taille N est une variable aléatoire, dont la fonction de répartition est $F_n(D)$. Si chaque article peut, indépendamment des autres et avec une même probabilité q_0, s'avérer défectueux, alors $F_n(D) = B_N^D(q_0)$.

Théorème 7.2.2. *Si la distribution a priori du nombre d'articles défectueux D est binomiale et sa fonction de répartition est* $F_n(D) = B_N^D(q_0)$, *alors la distribution du nombre d'articles défectueux* $d(n)$ *decelés dans un échantillon de taille n est aussi binomiale et sa fonction de répartition est* $B_n^d(q_0)$.

La *démonstration* est basée sur l'identité

$$B_{ND}^{nd} b_N^D(q_0) = b_n^d(q_0)\, b_{N-n}^{D-d}(q_0) \tag{7.2.15}$$

que l'on peut directement vérifier. En vertu de cette identité nous avons

$$P\{d(n)=d\} = \sum_{D=0}^{N} P\{d(n)=d \mid D\}\, b_N^D(q_0) =$$

$$= \sum_{D=0}^{N} B_{ND}^{nd} b_N^D(q_0) = b_n^d(q_0) \sum_{D=0}^{N} b_{N-n}^{D-d}(q_0) = b_n^d(q_0),$$

ce qui termine la démonstration.

En divers cas la distribution a priori n'est pas binomiale, mais on peut l'approcher par une superposition de distributions binomiales. En d'autres termes, l'approximation est réalisée avec la distribution $F_n(D) = \int_0^1 B_N^D(q_0)\, dG_n(q_0)$, où $G_n(q_0)$ est la fonction de répartition $G_n(-0) = 0$, $G_n(1) = 1$. Ainsi, la distribution a priori est approchée par la distribution binomiale de paramètre aléatoire q_0. Nous nous bornerons lors des calculs du § 7.5 uniquement au cas d'une distribution purement binomiale pour laquelle $G_n(q) = 0$ si $q < q_0$, $G_n(q) = 1$ si $q > q_0$, $0 < q_0 < 1$. On peut s'attendre à ce que $G_n(q)$ possède deux sauts, si au contrôle sont présentés d'une manière aléatoire des lots fabriqués par des équipes différentes et si chaque équipe est caractérisée par une valeur q du taux d'articles défectueux.

Plans du type d'échantillonnage double. Dans les cas, où le problème de la réduction du volume des essais se pose avec acuité, on peut utiliser des plans du type d'échantillonnage double ou progressif (cf. § 7.1). Considérons tout d'abord les plans tronqués du type d'échantillonnage double. Lors de l'utilisation de ces plans on choisit d'abord n_1 articles; si $d(n_1) \leqslant c_1$, on adopte la décision D_{ac1} (habituellement $D_{ac1} = D_3$ ou D_2); si $d(n_1) > c_2 > c_1$, le lot est rejeté et l'on adopte la décision D_{rej1} ($D_{rej1} = D_1$ ou D_2); si par contre

$c_1 < d(n_1) \leqslant c_2$, on prélève un échantillon complémentaire de taille n_2. Si $d(n_1 + n_2) \leqslant c_2$, le lot est accepté avec la décision D_{ac2} ($D_{ac2} = D_2$ ou D_3), et si $d(n_1 + n_2) > c_2$, le lot est rejeté avec la décision D_{rej2} ($D_{rej2} = D_1$ ou D_2). Sur la figure 7.2.2,*a*

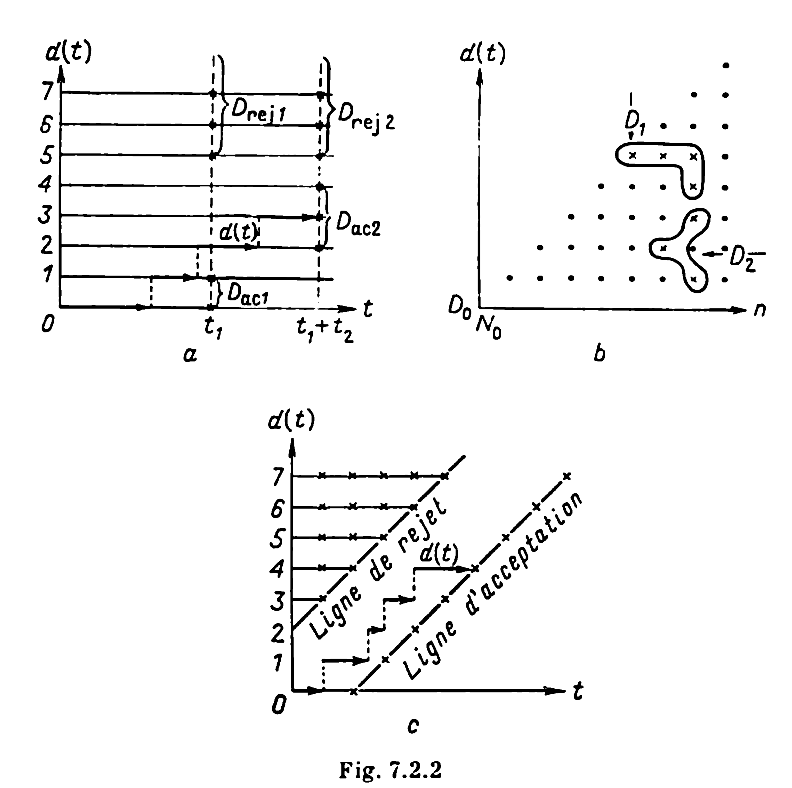


Fig. 7.2.2

on a donné la représentation schématique d'un plan tronqué du type d'échantillonnage double. Ici $t = \frac{n}{n_0}$ est proportionnel au volume de la production vérifiée, par exemple $t_1 + t_2 = \frac{n_1+n_2}{n_0}$. On a noté par des petites croix les points, où l'on adopte telle ou telle décision, et par la ligne brisée $d(t)$, le nombre d'articles défectueux jusqu'à l' « instant » $t = \frac{n}{n_0}$. A chacun des points frontières on associe absolument une décision que l'on adopte si la trajectoire $d(t)$ atteint ce point frontière. Ainsi, le plan tronqué du type d'échantillonnage double est caractérisé par un ensemble de quatre paramètres n_1, n_2, c_1, c_2 et par la disposition des décisions suivant quatre secteurs frontières. Nous désignerons de tels plans par l'ensemble (n_1, n_2,

$c_1, c_2)_{irej1, iac1, irej2, iac2}$, où $i_{ac1} = i$ si $D_{ac1} = D_i$, etc. Par exemple, le plan $(20, 20, 0,1)_{1312}$ signifie que si $d\,(20) = 0$, la partie restante non vérifiée du lot est acceptée sans contrôle, et si $d\,(20) \geqslant 2$, la partie non vérifiée du lot est rejetée sans contrôle. Dans le cas, où dans le premier échantillon on n'a enregistré qu'un seul article défectueux, on prélève un autre échantillon de 20 articles. Si maintenant on ne découvre pas de nouveaux articles défectueux, le lot est accepté avec contrôle ultérieur, si par contre $d\,(40) > 1$, le lot est rejeté sans contrôle ultérieur. On peut utiliser ici également les signes $(\ \ )'$, $(\ \ )^*$ que nous avions introduits plus haut.

Utilisant la formule des probabilités totales on peut aisément écrire les formules pour les probabilités d'accepter telles ou telles décisions. Nous avons ici

$$\mathbf{P}\{D_{ac\,1}\} = \sum_{d=0}^{c_1} B_{DN}^{n_1 d}, \qquad \mathbf{P}\{D_{rej\,1}\} = \sum_{d=c_2+1}^{N} B_{ND}^{n_1 d}, \tag{7.2.16}$$

$$\mathbf{P}\{D_{ac\,2}\} = \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} B_{ND}^{n_1 d_1} \sum_{d_2=0}^{c_2-d_1} B_{N-n_1,\,D-d_1}^{n_2 d_2}, \tag{7.2.17}$$

$$\mathbf{P}\{D_{rej\,2}\} = \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} B_{ND}^{n_1 d_1} \sum_{d_2=c_2-d_1+1}^{n_2} B_{N-n_1,\,D-d_1}^{n_2 d_2}. \tag{7.2.18}$$

On a très souvent $D_{ac1} = D_{ac2} = D_i$, $D_{rej1} = D_{rej2} = D_j$, autrement dit, on accepte et on rejette le lot avec une seule décision. En pareils cas un indice important du plan est la caractéristique opérationnelle $\Pi\,(D)$ qui indique la dépendance de la probabilité d'accepter le lot du nombre d'articles défectueux. Nous trouvons de (7.2.16) et (7.2.17) que

$$\Pi\,(D) = \sum_{d_1=0}^{c_1} B_{ND}^{n_1 d_1} + \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} B_{ND}^{n_1 d_1} \sum_{d_2=0}^{c_2-d_1} B_{N-n_1,\,D-d_1}^{n_2 d_2}. \tag{7.2.19}$$

Nous obtenons de manière analogue que le volume moyen de l'inspection pour le plan $(n_1, c_1, n_2, c_2)_{1313}$ est égal à

$$M_{1313}\,(D) = n_1 + n_2 \Big(\sum_{d_1=4}^{c_2} B_{ND}^{n_1 d_1} \Big). \tag{7.2.20}$$

Pour le plan $(n_1, c_1, n_2, c_2)_{1212}$ nous obtenons

$$\begin{aligned} M_{1212}\,(D) = n_1 \sum_{d_1=c_2+1}^{D} B_{ND}^{n_1 d_1} &+ \\ + (n_1+n_2) \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} B_{ND}^{n_1 d_1} \sum_{d_2=c_2-d_1+1}^{n_2} B_{N-n_1,\,D-d_1}^{n_2 d_2} &+ \\ + N \Big(\sum_{d_1=0}^{c_1} B_{ND}^{n_1 d_1} + \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} B_{ND}^{n_1 d_1} \sum_{d_2=0}^{c_2-d_1} B_{N-n_1,\,D-d_1}^{n_2 d_2} \Big)&. \end{aligned} \tag{7.2.21}$$

On peut écrire des formules analogues pour les autres plans tronqués du type d'échantillonnage double.

Si les conditions du théorème 7.2.1 sont vérifiées, on peut utiliser l'approximation poissonienne. La formule (7.2.19) de la caractéristique opérationnelle sera alors de la forme

$$\Pi(D) = L_{c_1}(n_1 q) + \sum_{d_1 = c_1 + 1}^{c_2} \left[\frac{(n_1 q)^{d_1}}{d_1 !} \right] L_{c_2 - d_1}(n_2 q), \qquad (7.2.22)$$

où $L_c(x)$ est déterminée par (7.2.13).

Plans progressifs. On peut obtenir la classe plus générale de plans de contrôle d'acceptation du type progressif, si après le contrôle de chaque article ou bien on adopte la décision de poursuivre le contrôle d'un autre article, ou bien on arrête le contrôle et on adopte l'une des décisions possibles, par exemple, D_i, $i = 1, 2, 3$. Si l'on suppose qu'une décision quelconque n'est prise qu'en tenant compte du nombre d'articles vérifiés n et du nombre d'articles défectueux recensés $d(n)$, on peut représenter une telle classe de règles sous forme d'un cheminement aléatoire sur les points du réseau de nombres entiers (n, d). L'arrivée dans le point (n, d) signifie que l'on a vérifié n articles dont d étaient défectueux. Les points (n, d), où l'on prend une décision, seront appelés points frontières. On a montré sur la figure 7.2.2, b, c des exemples de tels plans. Les points frontières sont notés par des croix. On note aisément que tous les plans de contrôle du type d'échantillonnage simple ou double que nous avons considérés auparavant sont des cas particuliers des plans du type progressif. En règle générale, il n'existe pas pour les plans progressifs de simples formules explicites pour la probabilité de prendre telle ou telle décision par suite du contrôle effectué ni d'expressions simples pour le volume moyen de l'inspection. On peut indiquer toutefois une méthode élémentaire d'après laquelle on peut, à l'aide des relations récurrentes simples que nous rapportons plus bas, trouver les valeurs numériques des caractéristiques indiquées. Soit Γ_i l'ensemble des points frontières (n, d) où l'on adopte une même décision D_i. La probabilité d'adopter la décision D_i signifie alors qu'au cours du processus de réalisation du contrôle le premier point frontière sera $(n, d) \in \Gamma_i$. Désignons par $\mathbf{P}_{\Gamma_i}(n, d)$ la probabilité pour que le premier point frontière atteint appartienne à l'ensemble Γ_i, à condition que l'observation commence à partir du point (n, d). Dans les cas, où (n, d) est un point frontière et $(n, d) \in \Gamma_i$, nous avons

$$\mathbf{P}_{\Gamma_i}(n, d) = 1. \qquad (7.2.23)$$

Si (n, d) est n point frontière mais si par contre $(n, d) \notin \Gamma_i$, nous avons alors

$$\mathbf{P}_{\Gamma_i}(n, d) = 0. \qquad (7.2.24)$$

Ces conditions aux limites reflètent le fait que le contrôle cesse après qu'un point frontière est atteint. En particulier, la condition (7.2.24) signifie que si au cours de la réalisation du contrôle nous avons atteint le point frontière $(n, d) \bar{\in} \Gamma_i$, alors les essais cessent et nous ne pouvons plus tomber au point $(n, d) \in \Gamma_i$. Notons maintenant que si l'on vérifie un lot de taille N, recelant D articles défectueux, alors l'arrivée au point (n, d) signifie que n'ont pas encore été vérifiés $N - n$ articles, parmi lesquels se trouvent $D - d$ articles défectueux. Il en découle que, lors du choix aléatoire du $(n+1)$-ième article, il s'avère conforme avec une probabilité $\frac{N-n-D+d}{N-n}$ et défectueux avec une probabilité $\frac{D-d}{N-n}$. Dans le premier cas nous passons du point (n, d) au point $(n+1, d)$, dans le second cas au point $(n+1, d+1)$. Supposons que les probabilités $\mathrm{P}_{\Gamma_i}(n+1, d)$ sont calculées pour toutes les valeurs possibles $(n+1, d)$; alors, pour chaque point possible (n, d) nous avons

$$\mathrm{P}_{\Gamma_i}(n, d) = \left[\frac{D-d}{N-n}\right] \mathrm{P}_{\Gamma_i}(n+1, d+1) + \\ + \left(\frac{N-n-D+d}{N-n}\right) \mathrm{P}_{\Gamma_i}(n+1, d). \qquad (7.2.25)$$

En diminuant successivement les valeurs de n, nous parvenons au point $(0, 0)$. La probabilité $\mathrm{P}_{\Gamma_i}(0, 0)$ est précisément la probabilité $\mathrm{P}(D_i)$ cherchée d'adoption de la décision D_i. Nous avons ainsi démontré le théorème suivant.

Théorème 7.2.3. *La probabilité* $\mathrm{P}(D_i) = \mathrm{P}_{\Gamma_i}$ *d'adopter la décision* D_i *est déterminée par les conditions aux limites, les conditions* (7.2.23), (7.2.24) *et les relations récurrentes* (7.2.25).

Si à la fin du contrôle on adopte seulement deux décisions: D_i lors du rejet $(i = 1, 2)$ et D_j lors de l'acceptation du lot $(j = 2, 3)$, la caractéristique opérationnelle est l'expression fonctionnelle de la dépendance de la probabilité d'acceptation du lot $\mathrm{P}(D_j)$ du nombre D d'articles défectueux qu'il contient.

Nous pouvons démontrer de manière analogue le théorème suivant.

Théorème 7.2.4. *Le volume moyen de l'inspection* $m = m(0, 0)$ *est déterminé, quand on utilise un plan progressif de contrôle du lot de taille* N, *contenant* D *articles défectueux, à partir des conditions aux limites*

$$m(n, d) = 0 \qquad (7.2.26)$$

(*quand* (n, d) *est un point frontière*) *et des relations récurrentes*

$$m(n, d) = 1 + \frac{D-d}{N-n} m(n+1, d+1) + \\ + \frac{N-n-D+d}{N-n} m(n+1, d). \qquad (7.2.27)$$

Remarque. S'il est nécessaire de calculer le volume global de l'inspection, la condition (7.2.26) est remplacée par la condition

$$m(n, d) = \begin{cases} N-n, & \text{si l'on adopte la décision } D_2, \\ 0, & \text{si l'on adopte l'une des décisions } D_1 \text{ ou } D_3. \end{cases}$$

Les calculs à effectuer à l'aide des formules récurrentes sont simples. Toutefois, l'élaboration de tables exhaustives même pour des classes

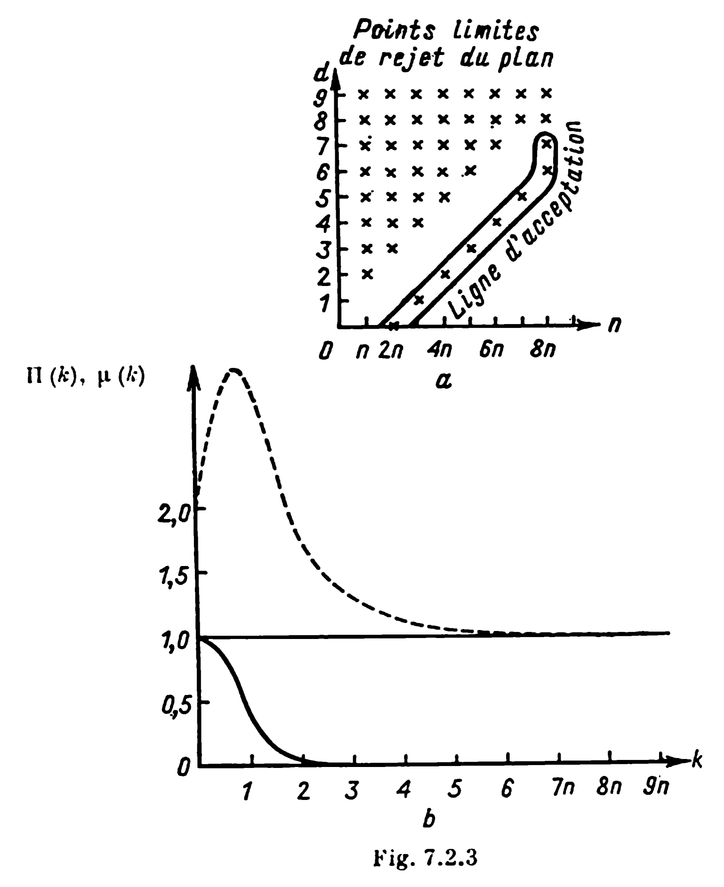


Fig. 7.2.3

concrètes de plans progressifs est fort laborieuse du fait du grand nombre de paramètres. C'est pourquoi on utilise habituellement diverses approximations. Par exemple, on estime que $\frac{D-d}{N-n} \approx \text{const}$, etc.

On a montré sur la figure 7.2.3,*b* par une ligne continue les valeurs de la caractéristique opérationnelle Π (*k*), et par une ligne en

pointillé les valeurs du volume d'inspection $\mu(k)$ pour le plan progressif de la figure 7.2.3,*a*. Le plan de contrôle est réalisé par une inspection successive des échantillons de taille n. Le lot est rejeté sans contrôle ultérieur si $d(n) \geqslant 2$; si par contre $d(n) < 2$, alors on prélève un second échantillon de même taille n. Le lot est accepté sans contrôle ultérieur si $d(2n) = 0$, il est rejeté si $d(2n) \geqslant 3$; un échantillon aléatoire de taille n est prélevé si $d(2n) = 1$ ou 2, etc., conformément à la figure 7.2.3, *a*. Lors des calculs on avait utilisé l'approximation poissonienne; $k = nq$, autrement dit, k est égal au nombre moyen d'articles défectueux décelés dans l'échantillon. Le volume de l'inspection $\mu(k)$ est donné sur la figure 7.2.3, *b* en unités relatives, multiples de n. Ainsi, pour $n = 20$ et $k = 1$, $\mu(1) = 2{,}91$, ce qui est équivalent à un volume moyen d'inspection $2{,}91 \times 20 \approx 58$ articles.

§ 7.3. Standards des plans de contrôle d'acceptation

Notions générales. Exemple. Considérons les exigences que l'on formule envers les standards déterminant le procédé d'utilisation du contrôle d'échantillonnage en pratique. Avant tout, un standard des plans de contrôle d'échantillonnage doit être suffisamment simple, pour que le personnel de l'entreprise ne possédant pas une préparation mathématique spéciale puisse l'utiliser. Le standard doit comprendre un nombre relativement élevé de plans possédant diverses caractéristiques opérationnelles. Cela permet une grande souplesse de modification des plans de contrôle en fonction des variations de la qualité de la production et des exigences des consommateurs. Outre la description du plan concret du standard, on doit citer les diverses caractéristiques du plan utilisé. Par exemple, il est souhaitable de disposer de graphiques des caractéristiques opérationnelles et de volumes de l'inspection en tant que fonction du taux d'articles défectueux du lot. Il est enfin désirable que soient indiqués dans le standard les plans de divers types: les plans d'échantillonnage simple, double et les plans du type progressif. L'utilisation du standard doit prévoir telle ou telle garantie pour le producteur de ne pas rejeter de bons lots et pour le consommateur de ne pas accepter de mauvais lots. Ainsi, l'utilisation du standard doit, au minimum, effectuer une pression sur le producteur dans le sens de l'amélioration de la qualité de sa production. Une telle pression peut être prise en considération en introduisant un *contrôle plus sévère* dans les cas, où les estimations de la qualité ont montré, avec un niveau élevé de certitude, son abaissement inadmissible. Au contraire, dans les cas, où la qualité est très élevée, on peut utiliser des plans de *contrôle allégé*.

A l'heure actuelle il existe diverses publications consacrées aux divers standards (cf. [4] à [8]). En outre, divers manuels et mono-

graphies de statistique mathématique comportent des chapitres et des tables consacrés aux plans de contrôle d'acceptation. Indiquons ici les ouvrages de Cowden [6] et de Schor [9]. On donne plus bas une revue critique des divers standards de contrôle d'acceptation largement utilisés.

En particulier, l'exposé du standard colombien est complété par les tables correspondantes. De telles tables ont été incluses dans le livre du fait que le matériel se rapportant au standard colombien n'avait pas été publié auparavant dans la littérature scientifique soviétique. Ces derniers temps aux U.S.A. le standard Mil. St. 105 (A, B) a trouvé un large champ d'application. Nous omettons la description de ce standard, puisque cette description détaillée est donnée dans le livre de Cowden [6]. En Angleterre le standard adopté est DEF-131. Sa description, ainsi que certaines suggestions critiques intéressantes sont rapportées dans la revue anglaise de statistique (cf. [8]).

Considérons l'un des exemples simples de construction des standards des plans de contrôle d'acceptation. Nous supposerons que le contrôle n'est pas destructif et que tous les articles défectueux décelés sont remplacés par des articles conformes. Pour simplifier l'exposé bornons-nous au cas des plans du type d'échantillonnage simple $(n, c)'_{23}$. Supposons encore que dans les calculs la distribution hypergéométrique peut être remplacée par la distribution poissonienne. Supposons maintenant que le consommateur de la production finie insiste sur l'introduction d'un contrôle, tel que la valeur du taux des articles défectueux dans la production acceptée ne dépasse pas en moyenne une certaine valeur donnée. Dans ce cas la caractéristique numérique montrant l'efficacité du contrôle d'acceptation sera la *qualité limite de sortie* q_m. Cette caractéristique est déterminée de la manière suivante. Si au P.C. est présenté un lot de taille N, contenant D articles défectueux, alors le nombre d'articles défectueux D_{sor} dans la production acceptée par le consommateur est déterminé par les relations $D_{sor} = 0$ si le lot est rejeté par la décision D_2, $D_{sor} = D - d$ si le lot est accepté par la décision D_3. La valeur moyenne du taux d'articles défectueux $\bar{q}_{sor}(q) = \mathrm{M}\left(\frac{D_{sor}}{N}\right)$ dans la production acceptée est fonction du taux d'articles défectueux q de la production présentée au contrôle. Pour les plans du type d'échantillonnage simple (n, c) on a

$$\bar{q}_{sor} = \frac{1}{N} \sum_{d=0}^{c} (D-d)\, B_{ND}^{nd}. \qquad (7.3.1)$$

L'allure du graphique de $\bar{q}_{sor}$ pour le plan $(100,1)_{23}$ et $N = 10\,000$ est montrée sur la figure 7.3.1. On voit de la figure que $\bar{q}_{sor} < q$ et atteint en un certain point q_{lim} sa valeur maximale q_m.

Dans le cas général $q_m = \max\limits_{0 \leq q \leq 1} \bar{q}_{sor}(q)$ est appelée *qualité limite de sortie* pour le plan utilisé. Pour le cas de l'approximation poissonienne lors de l'utilisation du plan du type $(n, c)'_{23}$ nous obtenons de (7.3.1) et (7.2.4)

$$q_m = \max_{0<q<1} qL_c(nq) = \frac{1}{n}\rho_c, \qquad (7.3.2)$$

où $\rho_c = \max\limits_{x>0} L_c(nq)$. La table des valeurs ρ_c pour $c = 0\ (1)\ 20$ est donnée dans l'annexe (table 23). Si, par exemple, on utilise le plan

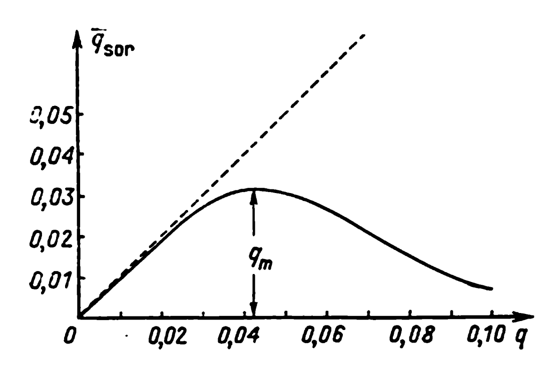


Fig. 7.3.1

de contrôle d'échantillonnage pour lequel la qualité limite de sortie est $q_m = 3\%$, cela signifie qu'en moyenne le taux d'articles défectueux dans la production acceptée n'excède pas 3%. Ainsi, indépendamment du taux de rebut dans les lots proposés l'indice q_m peut être utilisé par le consommateur en tant qu'exigence imposée aux plans utilisés. Rappelons que cette caractéristique n'est valable que pour les plans pour lesquels les seules décisions possibles sont D_2 et D_3. Pour satisfaire les exigences du consommateur, choisissons la qualité garantie de sortie égale au taux de rebut limite admissible dans la production acceptée. Soit q_n le taux moyen d'articles défectueux lors du déroulement normal du processus de production. Si N est la taille du lot, alors $\theta = Nq_n$ est le nombre moyen d'articles défectueux dans le lot lors du déroulement normal du processus de production. Dans les tables nous donnerons la valeur relative $k_m = \frac{q_m}{q_n}$. Comme le contrôle n'est pas destructif et que le rejet du lot signifie son contrôle intégral, il est rationnel de choisir de tels plans $(n, c)'_{23}$, pour lesquels la valeur moyenne du volume global d'inspection, donnée par la formule (7.2.7), sera minimale. La priorité est ainsi accordée au consommateur, qui, sachant q_n, choisit la valeur de q_m. Habituellement $k_m > 1{,}5$ à 2, puisque dans le cas contraire le pourcentage de la

production vérifiée devient du même ordre de grandeur que la quantité globale de la production présentée au contrôle. Si l'on utilise l'approximation poissonienne (7.2.12), on a

$$k_m = \max_{0 \leq q \leq 1} \frac{q_{sor}(q)}{q_n} \cong \max_{0 \leq q \leq 1} \left[\frac{1}{\theta} \sum_{d=0}^{c} (Nq - d) \frac{(nq)}{d\,!} e^{-nq} \right] \cong$$

$$\cong \max_{nq \geq 0} \frac{qL_c(nq)}{q_n} \left[1 - \frac{nq_n}{\theta} \right] = \frac{\rho_c \left(1 - \frac{nq_n}{\theta}\right)}{nq_n}, \qquad (7.3.3)$$

où $\theta = Nq_n$.

Ainsi, si l'on connaît la valeur du nombre d'acceptation c, on peut trouver la taille de l'échantillon n en vertu de (7.3.3) d'après la formule

$$n \approx \frac{1}{q_n} \frac{\rho_c \theta}{k_m \theta + \rho_c} = N \frac{\rho_c}{k_m \theta + \rho_c}. \qquad (7.3.4)$$

Pour choisir un plan assurant une valeur donnée de k_m et une valeur minimale pour le volume moyen d'inspection, il faut, parmi tous les plans du type $(n, c)'_{23}$, où n est déterminé de (7.3.4), choisir celui pour lequel l'expression

$$\frac{M_{23}(q_n)}{N} \cong \left(1 - \frac{n}{N}\right) [1 - L_c(nq_n)] + \frac{n}{N}$$

est minimale. Dans la table 24 de l'annexe on a rapporté pour les valeurs $k_m = 1{,}25\ (0{,}25)\ 3{,}0\ (0{,}5)\ 6\ (1)\ 10,\ 12,\ 15$ les valeurs critiques du paramètre θ_c. Si $\theta \leqslant \theta_0$ pour une valeur donnée de k_m, le nombre d'acceptation doit être pris égal à zéro, si par contre $\theta_{l-1} \leqslant \theta \leqslant \theta_l$, on doit poser $c = l$.

Considérons un **exemple**. Supposons que le consommateur, sachant que $q_n = 0{,}01$, ait choisi la valeur de $q_m = 0{,}02$. On présente au contrôle un lot de taille $N = 750$. Nous trouvons dans la colonne 2 de la table 24 de l'annexe que $\theta_1 = 6{,}723$, $\theta_2 = 17{,}854$. Dans notre exemple $\theta = Nq_n = 750 \cdot 0{,}01 = 7{,}5$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$, par conséquent $c = 2$. Nous trouvons dans la table 23 de l'annexe que $\rho_2 = 1{,}37$, d'où en vertu de la formule (7.3.4) nous obtenons la taille de l'échantillon $n = 62{,}77$ et, en arrondissant jusqu'à l'entier le plus proche, nous trouvons en définitive que le plan le plus économique est $(63,2)'_{23}$.

Projet de standard de Tachkent. Nous donnerons en conclusion de ce paragraphe un aperçu des standards existants.

Nous commencerons par l'exposé du projet du standard des plans de contrôle suivant un indice qualitatif récemment publié à Tachkent. La première édition du standard comporte cinq fascicules dans lesquels sont exposés les principes généraux du contrôle statistique, sont données les formules pour le calcul de divers indices des plans

du type $(n, c)_{ij}$, $ij = 1, 2, 3$, ainsi que les formules pour estimer la qualité de la production acceptée d'après les résultats du contrôle. Les plans sont rapportés pour de faibles valeurs des nombres d'acceptation $c = 0\ (1)\ 4$ et un ensemble relativement important de tailles possibles des échantillons $n_i = 12,\ 15\ (5)\ 30\ (10)\ 60,\ 75\ (25)\ 200\ (50)\ 300\ (100)\ 600,\ 750\ (250)\ 1000$. En outre, pour $c = 0$, on a donné les valeurs $n_i = 5\ (1)\ 10$. Pour chaque plan (n, c) les valeurs possibles de la taille relative de l'échantillon sont $\nu = \frac{n}{N} = 0{,}5\ (0{,}1)\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0$. La valeur $\nu = 0$ est utilisée dans les cas, où la taille de l'échantillon est négligeable devant la taille du lot. Dans la table détaillée 2Б[7], pour chaque plan (n, c) on donne diverses caractéristiques (cf. table 7.3.1 reproduisant une partie de la table 2). Ici L désigne la probabilité d'accepter un lot contenant un taux q_3 d'articles défectueux, q_1, le taux moyen d'articles défectueux dans la production acceptée par le consommateur lors de l'utilisation du plan $(n, c)_{23}$, q_2, le taux moyen d'articles défectueux dans la production acceptée lors de l'utilisation du plan $(n, c)_{13}$. Dans la table les valeurs de q_i sont pour plus de commodité multipliées par 10^4. Les valeurs de μ_1 sont égales au rapport du volume moyen de l'inspection pour les plans $(n, c)_{23}$ au nombre moyen d'articles acceptés. Les valeurs de μ_1 sont multipliées par 10^3. Les valeurs L sont les paramètres d'entrée.

Table 7.3.1

$n = 125, \quad c = 1$

L	...	$\frac{n}{N} = 0{,}2$				...
		$q_3 \cdot 10^4$	$q_1 \cdot 10^4$	$q_2 \cdot 10^4$	$\mu_1 \cdot 10^3$	
0,999	...	17	13	17	201	...
0,998	...	17	14	17	202	...
0,995	...	19	15	19	204	...
...	...	...	...	...	...	...
0,950	...	35	28	37	240	...
0,925	...	41	32	44	260	...
0,900	...	47	36	51	280	...
...	...	...	...	...	...	...

On a donné dans les tables les valeurs $L = 0{,}999;\ 0{,}998;\ 0{,}995;\ 0{,}990;\ 0{,}975\ (0{,}025)\ 0{,}875;\ 0{,}95\ (0{,}05)\ 0{,}50;\ 0{,}125\ (0{,}025)\ 0{,}025;\ 0{,}010;\ 0{,}005;\ 0{,}002;\ 0{,}001$. On peut trouver les valeurs de la qualité limite de sortie q_m dans la colonne des valeurs de q_1 en les posant égales à $\max q_1$. En se donnant le taux d'articles défectueux correspondant à une bonne qualité et une qualité limite admissible, nous

pouvons trouver les valeurs des erreurs de première et de seconde espèces. Par exemple, si une bonne qualité correspond à un taux d'articles défectueux $q_3 = 0{,}35$ %, nous trouvons de la table 7.3.1 que la probabilité d'accepter le lot $L = 0{,}95$ et donc l'erreur de première espèce est égale à 0,05.

Le standard de Tachkent comporte également des tables des plans du type (n, c) assurant une probabilité donnée α d'acceptation des lots pour un choix déterminé des valeurs de q_α du taux des articles défectueux. Les tables sont données pour les valeurs $\alpha = 0{,}95$; 0,90; 0,50; 0,10; 0,05. Dans ce cas $q_\alpha = 0{,}125$; 0,1; 0,09; 0,08 (0,005) 0,04 (0,0025) 0,01 (0,001) 0,002. Pour la valeur de $\alpha = 0{,}1$ on donne également les seuils $q_{0,1} = 0{,}35$ (0,05) 0,15; 0,008; et aussi $q_{0,05} = 0{,}40$ (0,05) 0,15; $q_{0,5} = 0{,}20$; 0,15; 0,0015; 0,001 (0,0002) 0,0002; $q_{0,95}$ et $q_{0,90} = 0{,}0015$; 0,001 (0,0002) 0,0002; 0,0001. On présente également les tables des plans assurant une valeur donnée de la qualité limite de sortie q_m. L'ensemble des seuils q_n coïncide avec l'ensemble $q_{0,90}$. Dans la table 7.3.2 on a reproduit une partie des tables de ce genre. On présente également des tables dans lesquelles pour chaque plan (n_i, c) on rapporte les valeurs de ses indices q_α, q_m pour $\frac{n}{N} = 0{,}5$ (0,1) 0,1; 0,05; 0. Nous avons rapporté au § 7.5 certaines formules prises des standards de Tachkent pour l'estimation ultérieure de la qualité de la production d'après les résultats du contrôle. Les fascicules comportent des indications relatives au choix des plans économiques de contrôle, toutefois l'approche utilisée diffère de celle que nous avons exposée au § 7.4.

Standards de Dodge et Romig. La monographie de Dodge et Romig « Tables de contrôle d'échantillonnages simple et double » consacrée au contrôle d'acceptation est largement connue. Ce livre contient la description des principes du contrôle d'échantillonnage d'après un indice qualitatif. On y décrit les méthodes sur la base desquelles sont élaborées des tables. Les plans présentés dans le livre de Dodge et Romig sont divisés en deux groupes. Les uns assurent les valeurs données des probabilités 0,1 pour l'acceptation des lots contenant un taux $q_{0,1}$ d'articles défectueux, les autres la valeur donnée de q_m de la qualité limite de sortie. On rapporte également dans les tables les plans donnant le minimum de la valeur moyenne de l'inspection dans les conditions de la prise des décisions D_2, D_3 pour la production comportant un taux moyen q_{moy} d'articles défectueux. Une bonne partie du livre est consacrée aux graphiques des caractéristiques opérationnelles des plans indiquées dans les tables. Rapportons les opérations que l'on doit effectuer lors de l'utilisation des plans de Dodge et Romig. 1) Il faut décider quels paramètres des articles on doit vérifier et quels articles estimer défectueux. 2) Préciser la notion de lot et calculer sa taille N. 3) Choisir le

Table 7.3.2

$q_{0,1}$	c = 0		c = 1		...
	N	n	N	n	...
...	...	...	...	...	...
0,60%	1-599 600-799 ⩾ 800	tous 300 400	1-1199 1200-3000 ⩾ 3001	tous 600 750	
0,50%	1-799 800-2185 ⩾ 2186	tous 400 500	1-1499 1500-7500 ⩾ 7501	tous 750 1000	...
...	...	...	...	...	...

q_m	c = 0		c = 1		...
	N	n	N	n	...
...	...	...	...	...	...
6,00%	1-9 10-11 12-64 ⩾ 65	tous 5 6 7	1-23 24-39 ⩾ 41	tous 12 15	...
5,50%	1-11 12-23 ⩾ 24	tous 6 7	1-23 24-29 30-169 ⩾ 170	tous 12 15 20	...
...	...	...	...	...	...

moyen de protection contre l'acceptation des lots contenant un grand nombre d'articles défectueux. Dans le cas donné on effectue un choix entre deux indices $q_{0,1}$ et q_m. 4) On résout le problème du choix entre deux plans du type d'échantillonnage simple et double en prenant éventuellement en considération les résultats du point 7. 5) On effectue l'estimation de q_{moy}, le taux moyen d'articles défectueux. 6) On trouve d'après les tables (dont nous donnons plus bas des exemples) le plan correspondant de contrôle d'échantillonnage. Le plan est alors recherché en tenant compte du choix des valeurs de $q_{0,1}$ ou q_m et des valeurs de q_{moy} et N. 7) On recherche le graphique avec la caractéristique opérationnelle correspondante, dont la forme peut en-

Table 7.3.3

a) $q_{0,1} = 4\%$

N	...	$0{,}41\% \leqslant q_{moy}\% \leqslant 0{,}80\%$			
		n	c	q_m %	
...	...	...	...	...	...
201-300	...	85	1	0,71	...
301-400	...	90	1	0,72	...
401-500	...	90	1	0,77	...
501-600	...	125	2	0,87	...
...	...	...	...	...	...

b) $q_{0,1} = 5\%$

N	...	$0{,}51\% \leqslant q_{moy}\% \leqslant 1{,}00\%$						...
		1[er] échantillon		2[e] échantillon			q_m	
		n_1	c_1	n_2	$n_1 + n_2$	c_2		
...	...	...	...	...	...	...	...	...
1001-2000	...	55	0	120	175	4	1,4	...
2001-3000	...	55	0	150	205	5	1,5	...
3001-4000	...	90	1	140	230	6	1,6	...
4001-5000	...	90	1	165	255	7	1,8	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

c) $q_m = 3\%$

N	...	$1{,}21\% \leqslant q_{moy}\% \leqslant 1{,}80\%$			...
		n	c	$q_{0,1}$ %	
...	...	...	...	...	...
501-600	...	42	2	12,4	...
601-800	...	43	2	12,1	...
801-1000	...	44	2	11,8	...
1001-2000	...	65	3	10,2	...
...	...	...	...	...	...

d) $q_m = 3\%$

N	...	$1{,}21\% \leqslant q_{moy}\% \leqslant 1{,}80\%$						...
		1[er] échantillon		2[e] échantillon			$q_{0,1}\%$	
		n_1	c_1	n_2	$n_1 + n_2$	c_2		
...	...	...	...	...	...	...	...	...
501-600	...	26	0	54	80	4	10,7	...
601-800	...	26	0	54	80	4	10,7	...
801-1000	...	27	0	58	85	4	10,3	...
1001-2000	...	49	1	76	125	6	9,1	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

traîner certaines modifications dans le choix du plan. 8) On effectue le contrôle du lot conformément au plan choisi. 9) On enregistre les résultats du contrôle afin de permettre leur utilisation ultérieure lors de l'estimation de la qualité de la production.

On a rapporté dans les tables uniquement les plans tronqués du type d'échantillonnage double $(n_1, n_2, c_1, c_2)_{2323}$. On a rapporté dans la table 7.3.3 des exemples des tables du livre de Dodge et Romig.

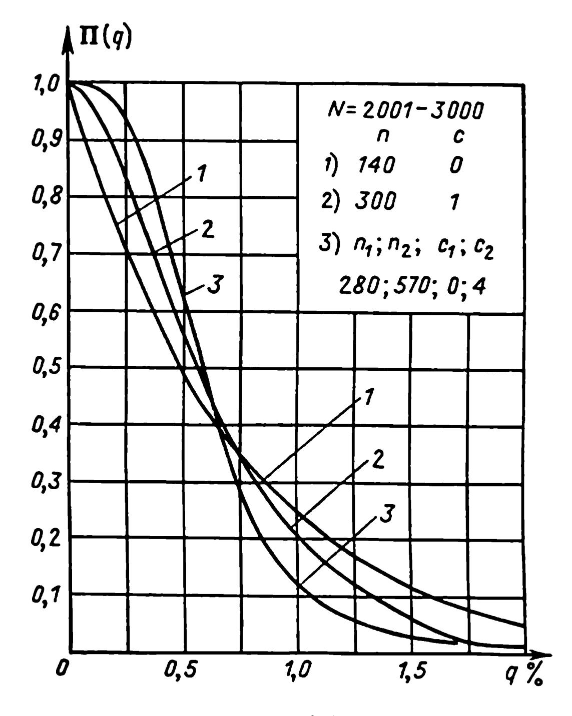


Fig. 7.3.2

Rapportons un exemple d'utilisation des plans de Dodge et Romig. Soit $q_{\text{moy}} = 0{,}65$ %, $N = 3563$, la qualité limite admissible est choisie égale à $q_{0,1}$ % $= 5$ %, on a décidé d'utiliser les plans du type d'échantillonnage double tronqué. La partie correspondante de la table est montrée à la table 7.3.3, *b*. Nous trouvons de cette table qu'il faut utiliser le plan (90, 140, 1, 6). La qualité limite de sortie est alors $q_{\text{m}} = 1{,}6$ %. Le livre contient également les graphiques des caractéristiques opérationnelles des plans de contrôle recommandés du type d'échantillonnage simple et double. La figure 7.3.2 illustre un exemple de ces graphiques des caractéristiques opérationnelles. Pour des raisons d'économie nous avons rapporté sur un même graphique, correspondant aux plans avec une valeur $q_{\text{moy}} = 0{,}25$ %,

les courbes des caractéristiques opérationnelles pour deux plans simples et un plan double. Notons que les plans simples assurant une valeur donnée de q_m, trouvés à partir de la table 24 de l'annexe et de la formule (7.3.4), coïncident en fait ou sont très proches des plans simples correspondants de Dodge et Romig, donnés par les tables du type indiqué à la table 7.3.3,*c*.

Standard colombien. Au cours de la Seconde guerre mondiale on poursuivait aux U.S.A. des travaux d'élaboration des plans de contrôle d'acceptation. Dans les années d'après-guerre le groupe de recherche statistique de l'Université de Colombie édita un ouvrage [5] « Contrôle d'échantillonnage » dans lequel étaient exposées les idées du contrôle d'acceptation. Ce livre contient un grand nombre de plans du type d'échantillonnage simple et double tronqué, pour lesquels $n_2 = 2n_1$, et de plans progressifs pour lesquels on vérifie successivement les échantillons de taille égale. Une partie importante du livre est consacrée aux tables des triplets des plans des trois types mentionnés. Dans cette partie sont donnés sur chaque page les paramètres des trois types de plans, choisis de sorte que leurs caractéristiques opérationnelles soient proches l'une de l'autre. Tous les plans sont élaborés de manière qu'ils assurent dans un intervalle donné de valeurs des taux des articles défectueux q une probabilité d'acceptation des bons lots non inférieure à 0,95. De tels intervalles seront appelés *intervalles de qualité admissible*. Les bornes de ces intervalles sont les nombres exprimés en pour cent: 0,024; 0,035; 0,06; 0,12; 0,17; 0,22; 0,32; 0,65; 1,2; 2,2; 3,2; 4,4; 5,3; 6,4; 8,5. Il a été prévu l'utilisation des cinq niveaux d'inspection I, II, III, IV, V. Le niveau III est estimé normal. Lors de l'utilisation des niveaux II et I le contrôle devient moins sévère et le volume de l'inspection forme respectivement les $^3/_4$ et le $^1/_2$ du volume d'après le niveau III. Lors de l'utilisation des niveaux IV et V le contrôle est plus sévère, le volume de l'inspection augmente respectivement de 1,5 et 2 fois. Dans la table 7.3.4 que nous rapportons sont données les valeurs des nombres de code. A chaque nombre de code et à chaque intervalle de qualité admissible correspondent trois plans: échantillonnage simple, échantillonnage double et plan progressif. Les paramètres de ces plans sont tirés des tables 20 à 22 de l'annexe.

Citons des exemples. Supposons qu'on présente au contrôle un lot de taille $N = 350$. On décide d'utiliser un niveau normal de contrôle. La qualité admissible est $q_{0,95} = 0,15$. Nous trouvons de la table 7.3.4 que le nombre de code est G. Nous obtenons de la table 20 de l'annexe qu'à la lettre G correspond un échantillon de taille 55. Comme $0,12 < q_{0,95} = 0,15 < 0,17$, dans la colonne correspondant à l'intervalle de la qualité admissible (0,15; 0,17) nous trouvons que $c = 1$. Si nous voulons utiliser un plan du type d'échantillonnage double tronqué, nous trouvons de la table 21 de l'annexe que le nombre G et l'intervalle (0,12; 0,17) correspondent au plan (35, 70, 0,3).

Table 7.3.4

Table des nombres de code

Taille du lot	Nombre de code pour les niveaux d'inspection				
	I	II	III	IV	V
$\leqslant 25$	*A*	*A*	*B*	*C*	*D*
25-50	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
50-100	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
100-200	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
200-300	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
300-500	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*
500-800	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*
800-1 300	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*
1 300-3 200	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*
3 200-8 000	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*
8 000-22 000	*J*	*K*	*L*	*M*	*N*
22 000-110 000	*K*	*L*	*M*	*N*	*N*
110 000-500 000	*L*	*M*	*N*	*N*	*O*
$\geqslant 550\,000$	*N*	*N*	*O*	*O*	*O*

Notons que pour une taille $N = 250$ on peut lire dans la table 21 de l'annexe l'indication d'utiliser seulement des plans du type d'échantillonnage simple. S'il est décidé d'utiliser des plans du type d'échantillons progressifs égaux, nous trouvons de la table 22 de l'annexe que l'on doit utiliser un plan de sept échantillons successifs, comportant chacun 14 articles. Le lot est rejeté si $d\ (14) \geqslant 2$, dans le cas contraire on prend un second échantillon ; le lot est rejeté si $d\ (28) \geqslant 2$, dans le cas contraire on prend un troisième échantillon ; si $d\ (42) \geqslant 2$, le lot est rejeté, dans le cas contraire on prend un quatrième échantillon. Le lot est accepté si $d\ (56) = 0$, rejeté si $d\ (56) \geqslant 2$; on prend un cinquième échantillon si $d\ (56) = 1$. D'après les résultats du cinquième échantillon, si $d\ (70) \geqslant 2$, le lot est rejeté, si $d\ (70) = 1$, on prend un sixième échantillon. D'après les résultats du sixième échantillon, si $d\ (84) = 1$, le lot est accepté, si $d\ (84) \geqslant 3$, le lot est rejeté, et si $d\ (84) = 2$, on prend le dernier, septième, échantillon. Si $d\ (98) = 2$, le lot est accepté, si par contre $d\ (98) \geqslant 3$, le lot est rejeté. Ainsi dans les tables 21, 22 de l'annexe, dans les colonnes intitulées « A », sont données les valeurs des nombres d'acceptation, le signe « ˮ » signifie que la décision de l'acceptation n'est pas encore adoptée, et dans les colonnes intitulées « R » sont données les valeurs des nombres de rejet. Dans la table 7.3.5 on donne un exemple des trois types de plans correspon-

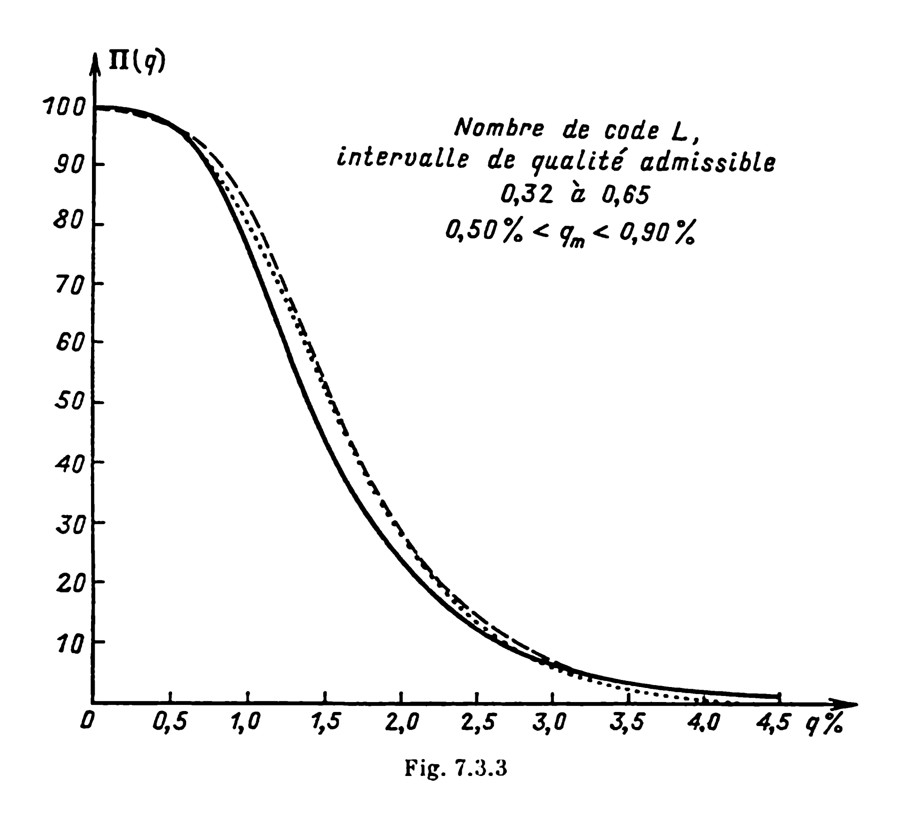


Fig. 7.3.3

Table 7.3.5

Type de l'échantillon	Numéro de l'échantillon	Taille de l'échantillon	Nombre d'acceptation	Nombre de rejet
Simple	premier	300	4	5
Double	premier	200	2	7
	second	400	6	7
Progressif	premier	75		3
	second	75	1	4
	troisième	75	1	5
	quatrième	75	2	6
	cinquième	75	3	6
	sixième	75	5	8
	septième	75	7	8

dant au nombre de code L et à l'intervalle 0,32 à 0,65 % de la qualité admissible, 0,50 % $< q_m$ % $<$ 0,90 %. Les valeurs des caractéristiques opérationnelles de ces plans sont montrées sur la figure 7.3.3.

Dans le livre [5] les courbes des caractéristiques opérationnelles des divers types de plans sont pour plus de clarté imprimées de couleur différente. Toutefois, cela a conduit à des écarts importants des lignes, ce qui abaisse sensiblement la valeur de l'information, vu la nécessité d'une plus grande exactitude pour les petites valeurs du taux q. Ce défaut ne serait pas tellement sensible, si les auteurs avaient utilisé une échelle non uniforme sur l'axe des ordonnées, en l'étirant pour les probabilités proches de l'unité.

§ 7.4. Plans économiques de contrôle

Estimation économique de l'efficacité du contrôle d'acceptation. Dans le précédent paragraphe nous avons donné un bref aperçu critique des standards existants du contrôle d'échantillonnage. Les intérêts du producteur étaient pris en compte soit par la donnée de la valeur du risque du producteur, soit grâce à l'utilisation des plans donnant en moyenne une quantité minimale d'inspection pour un q_m donné, ce qui n'est possible que dans le cas, où l'on adopte les décisions D_2, D_3. On peut construire un système plus souple de plans incluant les cas du contrôle destructif et non destructif en tenant compte des facteurs de coût liés à l'introduction du contrôle. On accorde ces derniers temps une grande importance à l'élaboration des méthodes les plus économiques, rationnelles du contrôle d'échantillonnage (cf. [10], [11]). La difficulté de la résolution de ce problème consiste principalement dans la prise en considération judicieuse des conditions extérieures, des facteurs prédéterminant le choix des méthodes de contrôle. Il semble qu'il n'existe pas de méthode universelle de choix des plans rationnels de contrôle, valable pour tous les cas. C'est ce qui ressort des nombreuses remarques critiques formulées envers les méthodes de contrôle d'échantillonnage existantes (cf. par exemple [8]). Dans le présent paragraphe on donne l'une des approches possibles de construction des standards des plans économiques de contrôle. L'idée de cette approche avait été suggérée à l'un des auteurs de ce livre par l'académicien A. Kolmogorov [13]. Les principaux calculs furent exécutés au laboratoire des méthodes statistiques de l'Université de Moscou.

La décision d'accepter ou de rejeter un lot contenant un taux q d'articles défectueux est liée à une perte de deux sortes. D'une part, tous les articles du lot ne sont pas défectueux, alors qu'en décidant de rejeter un lot nous subissons une perte $E_{\text{rej b}}(q)$ due au rejet des articles conformes (bons). D'autre part, après avoir pris la décision d'accepter un lot, nous acceptons les articles défectueux (mauvais)

qu'il contient, dont l'utilisation dans les étapes ultérieures de la production ou de la consommation provoquera une perte $E_{ac\,m}(q)$. L'allure approximative de $E_{rej\,b}(q)$ et $E_{ac\,m}(q)$ en tant que fonctions de $q = \frac{D}{N}$ est montrée sur la figure 7.4.1. Introduisons la notion de q_{cr} au moyen de l'égalité $E_{ac\,m}(q_{cr}) = E_{rej\,b}(q_{cr})$. Pour $q = q_{cr}$ les décisions d'accepter ou de rejeter les lots sont équivalentes du point de vue économique.

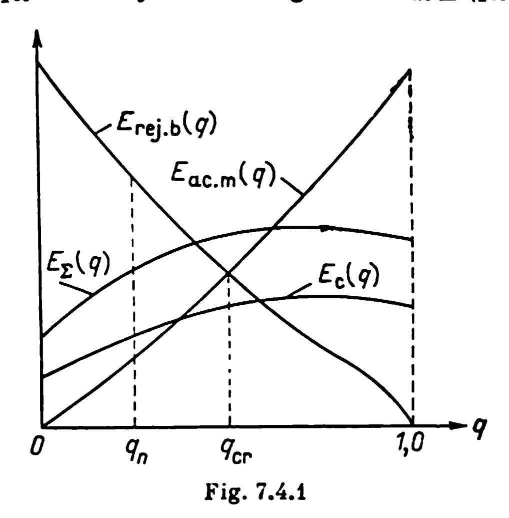


Fig. 7.4.1

Si $q < q_{cr}$, il est avantageux d'accepter le lot considéré. Si par contre $q > q_{cr}$, il est au contraire plus avantageux de le rejeter. Il en est ainsi et tout est simple, quand on connaît les valeurs de q et q_{cr}. Dans la pratique q n'est pas connue, et on ne peut la trouver qu'en vérifiant tous les articles constituant le lot. La valeur de q_{cr} ne peut être donnée qu'approximativement, puisque l'obtention d'une expression explicite pour $E_{ac\,m}(q)$ est un problème économique difficile. Notre hypothèse principale consiste en ce que lors du déroulement normal du processus de production quand toutes les conditions principales technologiques sont observées, le taux q des articles défectueux est inférieur à q_{cr} et satisfait entièrement le consommateur. On suppose que lors du déroulement normal du processus de production les valeurs de q sont groupées à proximité immédiate de la valeur moyenne de q_n. Si par contre le lot présenté a été fabriqué en présence de violations flagrantes de la technologie, alors le taux d'articles défectueux q est de beaucoup supérieur à q_n et souvent supérieur à q_{cr}. Ainsi, si le lot a été fabriqué lors du déroulement normal du processus de production, il contient un faible nombre d'articles défectueux, de sorte que la perte subie en acceptant ce lot est de beaucoup inférieure à celle que représente le rejet de ce lot. Si le lot a été fabriqué en présence de violations de la technologie, il contient de nombreux articles défectueux et la perte liée à leur acceptation dépasse souvent la perte due au rejet de tout le lot. Toutefois, soulignons une fois encore que nous ne savons pas si le lot a été fabriqué lors du déroulement normal du processus de production ou non. Pour le déterminer nous devons assigner des moyens complémentaires $E_c(q)$ afin d'assurer l'exécution du contrôle.

Ces dépenses se composent de deux termes: la perte moyenne liée à la décision de rejet et le coût du contrôle d'une partie des articles.

Ainsi, $E_c(q)$ est égal à la perte moyenne du producteur, la perte du consommateur due à l'acceptation des articles défectueux n'est pas prise ici en considération. Du point de vue économique, l'introduction du contrôle n'est rationnelle que dans le cas, où $E_c(q) <$ $< E_{\text{rej b}}(q)$ quand $q < q_{\text{cr}}$. Bien entendu, le contrôle sera d'autant plus économique que sera petit le rapport $\frac{E_c(q_n)}{E_{\text{rej b}}(q_n)}$, mais il convient toutefois de prendre également en considération les intérêts du consommateur, ce qui implique certaines limitations au choix du plan de contrôle. Dans les conditions, où tous les paramètres économiques sont donnés, on aurait pu calculer la perte globale $E_\Sigma(q)$, qui se compose des dépenses de contrôle, des pertes dues au rejet des articles conformes, si le lot est rejeté, et des pertes dues à l'acceptation des articles défectueux, si le lot est accepté. Dans ces conditions lors d'un choix rationnel du plan de contrôle $E_\Sigma(q)$ s'avère notablement inférieur à $\max[E_{\text{ac m}}(q), E_{\text{rej b}}(q)]$ pour la plupart des valeurs de q. Toutefois, le calcul de $E_{\text{ac m}}(q)$ est difficile et dépend du consommateur, c'est pourquoi nous nous bornerons à la caractéristique $E_c(q)$.

Dépenses moyennes de contrôle lors du déroulement normal du processus de production. Supposons que le lot à contrôler se compose de N articles parmi lesquels on compte D articles défectueux. Avant de prendre une décision on avait vérifié n articles parmi lesquels se trouvaient d articles défectueux; dans le cas général, D comme d peut être une variable aléatoire. Si le lot est fabriqué lors du déroulement normal du processus de production, alors $q = \frac{D}{N} \ll 1$, de sorte que le nombre des articles conformes restant non vérifiés est $N - n - (D - d) \approx N - n$. Considérons les indices suivants de coût: α, la perte due au rejet d'un article conforme; β, le coût de la vérification d'un article. Dans ce cas les dépenses moyennes $E_c(q)$ liées à l'exécution du contrôle sont égales à

$$E_c(q) \approx \alpha(N - \overline{n'})[1 - \pi(q)] + \beta\bar{n}, \qquad (7.4.1)$$

où $\bar{n}$ est le nombre moyen d'articles vérifiés (le volume moyen de l'inspection), $\overline{n'}$, le nombre moyen d'articles vérifiés dans le cas, où le lot est rejeté; $1 - \pi(q)$, la probabilité de rejeter le lot contenant $D = qN$ articles défectueux. Dans les conditions du déroulement normal du processus de production on peut estimer, comme nous l'avons mentionné au § 7.1, que q est une variable aléatoire de fonction de répartition $F_n(q)$, de valeur moyenne $\int_0^1 q\, dF_n(q) = q_n$. En tenant compte de cette distribution a priori, les dépenses moyen-

nes de contrôle lors du déroulement normal du processus de production seront

$$E_c = \int_0^1 E_c(q)\, dF_n(q), \tag{7.4.2}$$

où $F_n(q)$ ne croît qu'aux points multiples de N^{-1}.

Rappelons les hypothèses principales liées à la notion de déroulement normal du processus de production. Nous supposons que la production est «réglée» et que la principale partie du lot est fabriquée lors du déroulement normal du processus de production. En présence des violations de la technologie q croît fortement. Toutefois, il n'est pas rationnel de donner une distribution fixée de q, car il est difficile d'espérer la stationnarité (au sens statistique du terme) d'apparition des déréglages d'une sorte déterminée. Partant de ce principe on propose de planifier les dépenses dues au contrôle uniquement lors du déroulement normal du processus de production. Pour un niveau donné des dépenses moyennes E_c liées à l'exécution du contrôle dans les conditions normales du déroulement du processus de production on recherchera les plans de contrôle (dans le présent paragraphe principalement les plans du type d'échantillonnage simple) qui assurent pratiquement la plus grande probabilité de rejeter les lots comportant un taux élevé d'articles défectueux.

Nous conservons la notation (n, c) pour les plans du type d'échantillonnage simple. Toutefois, nous omettons les indices ij de $(n, c)_{ij}$, étant donné que lors d'une approche économique l'influence des décisions adoptées d'après les résultats du contrôle est prise en considération dans les valeurs des paramètres de coût. Pour fixer les idées nous supposerons que la distribution a priori du nombre D d'articles défectueux est binomiale avec une valeur du paramètre $q = q_n \ll 1$. Pour un plan du type d'échantillonnage simple (n, c) quand $n \gg c$, $n > 20$ à 30, on peut utiliser, en tenant compte du théorème 7.2.2, l'approximation poissonienne. La probabilité d'accepter un lot fabriqué lors du déroulement normal du processus de production est alors

$$\pi(q_n) = \sum_{d=0}^{c} b_n^d(q_n) \approx L_c(nq_n), \tag{7.4.3}$$

où $L_c(x)$ est déterminé à partir de la formule (7.2.14). Nous obtenons de (7.4.1), (7.4.2) et (7.4.3) que les dépenses moyennes liées à l'utilisation du plan du type (n, c) sont, en cas du déroulement normal du processus de production, égales à

$$E_c = \alpha(N-n)\,[1 - L_c(nq_n)] + \beta n. \tag{7.4.4}$$

Divisant les deux parties de (7.4.4) par αN, nous obtenons

$$E = \left(\frac{E_c}{\alpha N}\right) = (1-\nu)\,[1 - L_c(\lambda_n)] + \frac{\beta}{\alpha}\nu, \tag{7.4.5}$$

où $\lambda_n = nq_n$ est le nombre moyen d'articles défectueux dans un échantillon de taille n en cas du déroulement normal du processus de production. Notant que $\nu = \frac{\lambda_n}{\theta}$, où $\theta = Nq_n$ est le nombre moyen d'articles défectueux contenus dans un lot fabriqué dans des conditions normales de production, nous pouvons écrire (7.4.5) sous la forme

$$E = \left(1 - \frac{\lambda_n}{\theta}\right)(1 - L_c(\lambda_n)) + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{\lambda_n}{\theta}\right). \qquad (7.4.6)$$

Notons que dans les conditions d'une distribution a priori binomiale du nombre d'articles défectueux dans le lot, il n'y a pas parmi les hypothèses conduisant aux formules (7.4.5), (7.4.6) de limitations sur la grandeur de la taille relative de l'échantillon $\nu = \frac{n}{N}$. Comme $q_n \ll 1$, respectivement $N \approx N - D$ et nous pouvons considérer la grandeur E comme la fraction des moyens assignés pour l'exécution du contrôle par rapport aux pertes dues à la décision de rejeter sans aucun contrôle un lot fabriqué dans des conditions normales de production.

Pour planifier les dépenses liées à l'exécution du contrôle de la production fabriquée dans des conditions normales, on peut partir du principe de proportionnalité de ces dépenses au volume global des articles dans les lots à contrôler. Explicitons ce principe. Supposons que l'on connaisse à l'avance le volume de la production mensuelle d'un type déterminé d'articles, autrement dit, que l'on connaisse le nombre N_{som} d'articles qui seront fabriqués au cours du mois. Ces N_{som} articles sont présentés au contrôle sous forme de m lots de tailles N_i, $i = \overline{1, m}$, $N_{som} = \sum_{i=1}^{m} N_i$. Si l'on a affecté les moyens E_{som} pour l'exécution du contrôle au cours du mois, alors en vertu du principe de proportionnalité, les dépenses liées au contrôle d'un lot de taille N_i s'élèvent en moyenne à $E_i = E_{som}\left(\frac{N_i}{N_{som}}\right)$. C'est pourquoi le coefficient de coût E dans le premier membre de (7.4.6) doit être pris égal à $\frac{E_i}{\alpha N_i} = \alpha^{-1}\left(\frac{E_{som}}{N_{som}}\right)$. Il découle ainsi du principe de proportionnalité que le coefficient de coût E dans (7.4.6) ne dépend pas de la taille du lot inspecté. Cela diminue le volume des tables et facilite leur utilisation. Il faut toutefois avoir en vue que lors de l'utilisation du principe de proportionnalité la probabilité d'accepter un lot de petite taille N, comportant un taux élevé d'articles défectueux, augmente fortement. Cela fait qu'en pratique ou bien on réunit plusieurs lots de petite taille en un seul, ou bien on effectue le contrôle intégral des lots dont la taille est inférieure à une valeur donnée de N_{cr}. Le principe de proportionnalité est ainsi appli-

cable uniquement dans les cas, où la taille des lots présentés au contrôle varie faiblement.

Notion de rationalité du plan de contrôle d'acceptation. Nous supposerons, pour simplifier les calculs, que la taille n de l'échantillon peut être égale à n'importe quel nombre positif. C'est pourquoi après avoir trouvé la valeur correspondante de n, on doit choisir pour l'utilisation pratique la taille de l'échantillon égale à $[n]+1$, si n n'est pas un nombre entier. Ici $[n]$ signifie la partie entière de ce nombre. Comme dans la majorité des cas $n > 30$, l'erreur qu'entraîne cette convention est insignifiante. Nous désignerons pour simplifier l'écriture par le couple de nombres (λ_{nc}, c) le plan du type d'échantillonnage simple dont la taille de l'échantillon est $n = \frac{\lambda_{nc}}{q_n}$, respectivement $\lambda_{nc} = nq_n$ et c est le nombre d'acceptation. Comme précédemment q_n signifie le taux moyen d'articles défectueux lors du déroulement normal du processus de production. Si l'on a assigné pour l'exécution du contrôle des moyens déterminés qui ont servi à calculer le coefficient de coût E, il faut utiliser les plans (λ_{nc}, c) qui vérifient l'équation (7.4.6). Comme $\frac{\lambda}{\theta} = \frac{nq_n}{Nq_n} = \frac{n}{N} \leqslant 1$, alors pour toute valeur entière de $c = 0, 1, 2, \ldots$ la recherche des racines λ_{nc} n'a de sens que dans l'intervalle $0 \leqslant \lambda_{nc} \leqslant \theta$. On peut s'assurer aisément par vérification directe que la dérivée seconde du membre droit de (7.4.6) ne change qu'une fois son signe dans l'intervalle $0 \leqslant \lambda \leqslant \theta$. Tenant compte enfin du fait que pour $\lambda = \theta$ la valeur du second membre est $\frac{\beta}{\alpha}$, nous pouvons conclure que la fonction

$$f(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{\theta}\right) [1 - L_c(\lambda)] + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\lambda}{\theta}$$

ou bien est une fonction monotone croissante dans l'intervalle $(0, \theta)$, ou bien admet dans cet intervalle un point extrémal (maximum), où la valeur de $f(\lambda)$ est supérieure à $\frac{\beta}{\alpha}$.

Si E_c sont les dépenses moyennes assignées pour l'exécution du contrôle du lot contenant N articles, nous pouvons conclure, en remarquant que le coût du contrôle intégral est égal à βN et la perte due au rejet du lot est $\alpha (N - D_n) \approx \alpha N$, que le contrôle d'échantillonnage n'est rationnel au point de vue économique que dans le cas, où $E = \frac{E_c}{\alpha N} < \frac{\beta N}{\alpha N} = \frac{\beta}{\alpha}$. Dans le cas contraire il est plus avantageux d'effectuer le contrôle intégral. Le rapport $E : \frac{\beta}{\alpha}$ est ainsi égal à $E_c : \beta N$, autrement dit, égal au taux des moyens assignés à l'organisation du contrôle d'échantillonnage, par rapport aux moyens néces-

saires pour assurer le contrôle intégral. Nous supposerons partout dans ce qui suit que $E < \frac{\beta}{\alpha}$. Tenant compte des remarques que nous avons faites plus haut en ce qui concerne le comportement de la fonction $f(\lambda)$, nous obtenons que pour $E < \frac{\beta}{\alpha}$ pour chaque valeur entière de c l'équation (7.4.6) possède dans l'intervalle $(0, \theta)$ une solution unique $\lambda_{n\,c}$.

Les plans $(\lambda_{n\,c}, c)$ vérifiant (7.4.6) sont équivalents du point de vue économique, car lors de l'utilisation de n'importe lequel d'entre eux les dépenses moyennes sont égales à $E_c = E\alpha N$. De tels plans seront appelés *admissibles*. Notons que pour de faibles valeurs du rapport $\frac{\lambda}{\theta} \ll 1$ $(< 0{,}1)$ l'équation (7.4.6) peut être remplacée par l'équation approchée

$$E = 1 - L_c(\lambda_{nc}) + \gamma\lambda_{nc}, \tag{7.4.7}$$

où $\gamma = \frac{\beta}{\alpha\theta}$ est le coefficient de coût. L'équation (7.4.7) est bien plus simple, car ses solutions sont des fonctions de deux paramètres seulement E et γ, alors que les solutions de (7.4.6) dépendent de trois paramètres: $\frac{\beta}{\alpha}$, E, θ. On montre aisément que les racines de (7.4.7) sont plus petites que les racines de l'équation (7.4.6), ce qui complique la détermination des limites d'application de (7.4.7) au lieu de (7.4.6). Remarquons toutefois que les solutions de (7.4.7) ont la propriété $\lambda_c < \lambda_{c+1} < E : \frac{\beta}{\alpha\theta}$. C'est pourquoi quand $E : \frac{\beta}{\alpha} < 0{,}1$ on peut utiliser les solutions de (7.4.7) au lieu de celles de (7.4.6). Les vérifications montrent que si la solution λ_{nc} de (7.4.7) vérifie la condition $\frac{\lambda_{nc}}{\theta} < 0{,}1$, elle coïncide, avec un degré suffisant d'exactitude, avec la solution correspondante de (7.4.6). Nous devons choisir dans la famille des plans admissibles (λ_{nc}, c) les plans rationnels. Comme nous l'avons indiqué plus haut, on peut trouver les principaux indices des plans en partant des caractéristiques opérationnelles que l'on peut calculer dans le cas général d'après la formule (7.4.3). Par ailleurs, si l'on tient compte du fait que lors du déroulement normal du processus de production $q_n \ll 1$, on peut utiliser l'approximation binomiale. Dans ce cas la caractéristique opérationnelle est calculée d'après la formule

$$\pi(q) = \sum_{d=0}^{c} C_D^d \nu^d (1-\nu)^{D-d}, \tag{7.4.8}$$

où $\nu = \frac{n}{N} = \frac{\lambda_{nc}}{\theta}$. Enfin, dans le cas $\frac{\lambda_{nc}}{\theta} < 0{,}1$, $n = \frac{\lambda_{nc}}{q_n} > 30$, $\frac{c}{D} < 0{,}1$ on peut utiliser l'approximation poissonienne

$$\pi(q) = L_c(nq) = L_c(\lambda_{nc}k), \qquad k = \frac{q}{q_n}. \tag{7.4.9}$$

On a donné sur la figure 7.4.2,*a* les caractéristiques opérationnelles de la famille des plans admissibles vérifiant (7.4.6), quand $\frac{\beta}{\alpha} = 0{,}063$, $E = 0{,}35$, $\theta = 10$ et le nombre d'acceptation $c = 0, 1, 2, \ldots, 14$. On a porté sur l'axe des ordonnées les valeurs de la

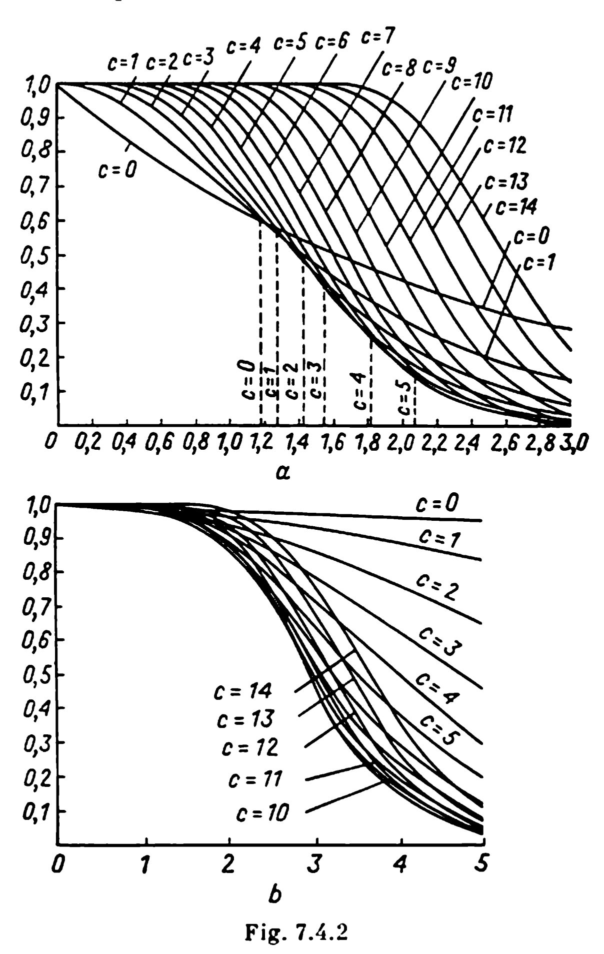


Fig. 7.4.2

caractéristique opérationnelle, et sur l'axe des abscisses les valeurs $k = \frac{D}{\theta} = \frac{q}{q_n}$, montrant le taux relatif d'articles défectueux par rapport au taux moyen d'articles défectueux lors du déroulement normal du processus de production. Dans ce cas $\nu_c = \frac{n}{N} > 0{,}1$ pour $c > 0$, de sorte que dans la construction des graphiques on a utilisé l'approximation binomiale (7.4.8). Pour plus de clarté les graphiques

sont donnés sous forme de lignes continues. Sur la figure 7.4.2,*b* sont représentées les caractéristiques opérationnelles de la famille des plans admissibles pour les valeurs de $E = 0{,}01$, $\theta = 0{,}80$. Comme $\theta \gg 1$, il semble rationnel d'utiliser l'approximation (7.4.7) pour la valeur de $\gamma = \frac{\beta}{\alpha\theta} = 0{,}0025$. En effet, dans ce cas on a pour tout c $\lambda_{nc} < \frac{E}{\gamma} = 4$, et la taille relative de l'échantillon est $\frac{\lambda_{nc}}{\theta} < 0{,}05$, de sorte que les solutions de (7.4.6) et de (7.4.7) coïncident pratiquement. Les graphiques des caractéristiques opérationnelles représentés sur la figure 7.4.2, *b* sont construits à partir de l'approximation poissonienne (7.4.9).

Lors du déroulement normal du processus de production tous les plans admissibles sont équivalents au point de vue économique. Ils diffèrent toutefois fortement quand sont présentés au contrôle des lots comportant un taux élevé d'articles défectueux. Il est naturel de choisir parmi les plans admissibles ceux qui en cours d'utilisation permettent de rejeter avec une probabilité élevée des lots comportant un taux important d'articles défectueux. On voit des figures 7.4.2, *a*, *b* que, pour diverses valeurs de $k = \frac{q}{q_n}$, différents plans peuvent être les meilleurs dans ce sens. Par exemple, pour les paramètres de la figure 7.4.2, *a* dans l'intervalle (1,550 à 1,815) des valeurs de k le meilleur plan est ($\lambda_{nc} = 3{,}20$; $c = 4$) et dans l'intervalle (1,815 à 2,075) le plan ($\lambda_{nc} = 3{,}77$; $c = 5$). Dans les conditions réelles de production on ne sait pas dans quel intervalle se trouve la valeur de k pour le lot inspecté. C'est pourquoi il est rationnel d'utiliser le plan dont la caractéristique opérationnelle est située le plus près, dans la mesure du possible, de l'enveloppe inférieure de la famille des caractéristiques opérationnelles des plans admissibles. On voit des figures 7.4,2, *a*, *b* que de tels plans existent. Par exemple, pour les paramètres de la figure 7.4.2, *b* de tels plans sont ($\lambda_{n9} = 3{,}24$; $c = 9$), ($\lambda_{n10} = 3{,}55$; $c = 10$). De nombreuses vérifications ont montré que les plans, dont les caractéristiques opérationnelles sont pratiquement uniformément proches de l'enveloppe inférieure de toute la famille des plans admissibles, existent dans un domaine très large des valeurs des paramètres $\frac{\beta}{\alpha}$, E, θ, (E, γ). Convenons d'appeler de tels plans *rationnels*.

Considérons maintenant quelques approches possibles du choix des plans rationnels de contrôle.

Modèle 1. Supposons que la taille relative de l'échantillon est $\frac{n}{N} \ll 1$, de sorte que l'on peut utiliser l'équation (7.4.7). Supposons que chaque lot rejeté contenant D articles défectueux est remplacé par un lot fabriqué lors du déroulement normal du processus de pro-

duction et, par conséquent, contient en moyenne $\theta = Nq_n$ articles défectueux. Il en sera ainsi, en particulier, quand l'opération de contrôle est destructive. Si l'on se borne au cas de la distribution poissonienne du nombre d d'articles défectueux, décelés dans un échantillon de taille n, le nombre D_{ac} d'articles défectueux acceptés est

$$D_{ac}=\begin{cases} D-d,\ d=0,\ \ldots,\ c \text{ avec une probabilité } \left(\frac{\lambda^d}{d!}\right) e^{-\lambda}, \\ \theta-d,\ d=0,\ \ldots,\ c \text{ avec une probabilité} \\ \qquad \left(\frac{\lambda_n^d}{d!}\right) e^{-\lambda_n} P_c(\lambda,\ \lambda_n), \end{cases} \qquad (7.4.10)$$

où $\lambda = nq$, $\lambda_n = nq_n$, $P_c(\lambda, \lambda_n) = [1 - L_c(\lambda)] [L_c(\lambda_n)]^{-1}$. On peut utiliser en qualité d'indice de la capacité de « filtrage » du plan (λ_{nc}, c) la grandeur $k_{ac}(k) = \frac{\mathrm{M} D_{ac}}{\theta}$ qui est le rapport du nombre moyen d'articles défectueux acceptés au nombre moyen d'articles défectueux fabriqués dans des conditions normales de production. On considère alors que k_{ac} est fonction de $k = \frac{q}{q_n} = \frac{D}{\theta}$.

On peut obtenir aisément de (7.4.10), en tenant compte de la condition $\frac{n}{N} \ll 1$, l'expression explicite pour la fonction de filtration

$$k_{ac,c}(k) \cong (k-1) L_c(\lambda_n k) + 1. \qquad (7.4.11)$$

Il découle de cette formule que pour toutes les valeurs de $k > 1$, $k_{ac}(k) > 1$, et pour $k \to \infty$ $k_{ac,c}(k) \to 1$. On a rapporté sur la figure 7.4.3 les graphiques des fonctions de filtration des familles des plans admissibles, correspondant aux valeurs $E = 0{,}01$, $\gamma = 0{,}0025$.

Les caractéristiques opérationnelles de ces plans sont données sur la figure 7.4.2, *b*. Comme il apparaît de la figure 7.4.3 le plan possédant pratiquement la filtration uniformément la meilleure est le plan ($\lambda_n = 3{,}24$; $c = 9$), pour lequel la valeur maximale $k_9 = \max\limits_{k \geq 1} k_{ac\,9}(k)$ est minimale par rapport aux valeurs $k_c = \max\limits_{k \geq 1} k_{ac,c}(k)$ pour les autres valeurs $c \neq 9$. Nous voyons de la figure 7.4.2, *b* que ce plan est rationnel. Comme l'ont montré les calculs numériques, le fait que le plan admissible (λ, c) est rationnel pour un large domaine de valeurs des paramètres E, γ coïncide avec la propriété de minimiser k_c. Partant de ce principe pour différentes valeurs des paramètres E et γ, on a effectué un choix de plans possédant les valeurs minimales de k_c par rapport à d'autres plans admissibles. Les principaux calculs furent effectués au Centre de calculs de l'Université de Moscou.

Les résultats des calculs sont représentés dans la table 25 de l'annexe et le nomogramme correspondant à cette table. Les valeurs

du coefficient de coût E_i ($E_i > E_{i+1}$) étaient choisies de telle manière que $\ln\left(\frac{E_i}{E_{i+1}}\right) \cong 0{,}1$. Dans la première colonne verticale de gauche sont indiquées les valeurs des nombres d'acceptation c ou c à $c + 1$.

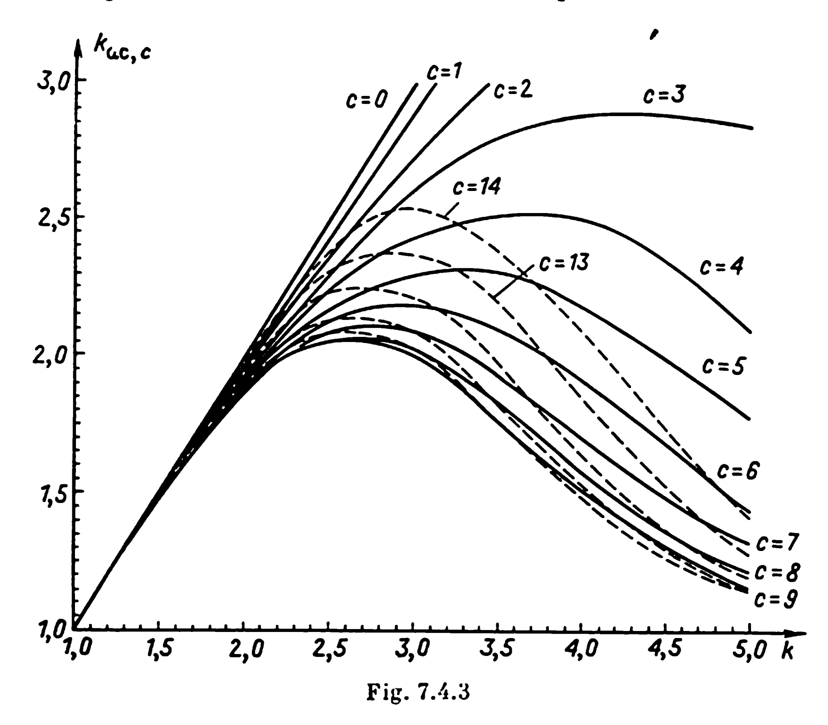


Fig. 7.4.3

Dans les autres colonnes correspondant aux diverses valeurs de E_i, sont données respectivement les valeurs de $\lg \gamma_c$ et $\lg \lambda_c$ ou de $\lg \lambda_{\frac{c}{c+1}}$, $\lg \lambda'_{\frac{c}{c+1}}$ et $\lg \lambda''_{\frac{c}{c+1}}$. Si l'on a choisi la valeur E_i et si pour le lot inspecté $\lg \gamma''_{\frac{c-1}{c}} \leqslant \lg \gamma \leqslant \lg \gamma'_{\frac{c}{c+1}}$, alors pour le plan rationnel le nombre d'acceptation est égal à c, et la valeur de $\lg \lambda_{nc}$ se trouve par interpolation linéaire d'après $\lg \lambda''_{\frac{c-1}{c}}$ et $\lg \lambda'_{\frac{c}{c+1}}$. Pour élever l'exactitude de l'interpolation linéaire pour les petites valeurs de $c =$ $= 0, \ldots, 4$ on a donné les valeurs intermédiaires de $\lg \gamma_c$ et les valeurs correspondantes de $\lg \lambda_c$. Sur le nomogramme de l'annexe on a porté sur l'axe des abscisses les valeurs de $\lambda = n_c q$, où n_c est la taille de l'échantillon. Les valeurs de $\lambda > 0{,}5$ étaient portées à l'échelle usuelle et celles de $\lambda < 0{,}5$ à l'échelle logarithmique. Sur l'axe

des ordonnées on a porté à l'échelle logarithmique les valeurs du coefficient de coût E. A chaque couple de valeurs de E et γ correspond un plan rationnel (λ, c). Si l'on fixe $\gamma = \gamma_i =$ const et si l'on fait varier E, on a pour le plan rationnel $\lambda = g(E, \gamma_i)$. La fonction $\lambda = g(E, \gamma_i)$ est régulière par tranches et pour certaines valeurs de E admet des sauts. On a représenté sur le nomogramme un réseau de lignes λ, correspondant à diverses valeurs de γ_i. Il s'est alors avéré plus commode de choisir les valeurs de $\gamma_i > \gamma_{i+1}$, de sorte que $\lg_{10}\left(\frac{\gamma_i}{\gamma_{i+1}}\right) \cong 0{,}1$. Lors d'une variation discontinue de λ la valeur du nombre d'acceptation c varie de 1. Pour les valeurs de $\gamma < 0{,}16$, avec la croissance de E, λ croît également et c croît en effectuant un saut égal à 1. Les tranches continues des lignes $\lambda = g(E, \gamma_i)$, correspondant à une même valeur de c, sont réunies en zones reliées par des lignes horizontales en pointillé. Les valeurs des nombres d'acceptation c, auxquels correspondent ces zones, sont données en gros caractères sur les marges du nomogramme. Les lignes en pointillé relient les valeurs de la fonction $\lambda = g(E, \gamma_i)$ aux points de discontinuité. Sur ces lignes en pointillé sont indiquées les valeurs du paramètre de coût γ_i. Ainsi, pour une valeur fixée de E à chaque c correspond l'intervalle des valeurs possibles de λ, pour lesquelles existent les plans rationnels. Entre ces intervalles il n'existe pas de plans rationnels. On peut tracer plus bas, sous l'axe des abscisses, pour diverses valeurs du nombre d'acceptation c les échelles des valeurs des points k, montrant pour quel accroissement relatif du taux d'articles défectueux $k = \frac{q}{q_n} = \frac{\lambda}{\lambda_n}$ la valeur de la caractéristique opérationnelle du plan est égale à 0,1.

Le degré égal de rigueur du contrôle est reflété sur le nomogramme par le réseau de lignes grasses en pointillé. A chaque plan rationnel (λ, c) correspond la filtration limite $k_c(\lambda) \cong \max (k - 1) L_c(\lambda k) + 1$ égale à la valeur maximale de la fonction de filtration. Les lignes ont été menées par les points du plan (E, λ_i) pour lesquels les valeurs de la filtration limite sont constantes, $k_c(\lambda_{ci}) = k_i =$ const. Les valeurs $k_c(\lambda_{ci})$ pour un c fixé ne dépendent pas de E, de sorte que les lignes passent par la zone des plans rationnels correspondant à une valeur de c, parallèlement à l'axe des ordonnées. Quand on passe d'une zone c à une zone $c + 1$, la valeur $\lambda_{c+1,\, i}$, pour laquelle $k_{c+1}(\lambda_{c+1,\, i}) = k_i =$ const, varie par sauts. Les points de discontinuité sont reliés par une ligne en pointillé.

On peut utiliser la table 25 et le nomogramme de l'annexe aussi bien dans le cas du contrôle destructif que non destructif, si seulement la taille relative de l'échantillon $\frac{\lambda}{\theta} = \frac{n}{N} \ll 1$ $(< 0{,}1)$. Il faut pour cela trouver α, β, q_n, calculer la valeur du paramètre de coût $\gamma = \frac{\beta}{\alpha\theta}$, $\theta = Nq_n$ et choisir la grandeur E du coefficient de

coût. Nous donnerons plus bas des exemples de recherche des plans de contrôle à l'aide de la table ou du nomogramme de l'annexe.

Modèle 2. Pour le cas, où $\frac{n}{N} > 0{,}1$, on peut lors du calcul des tables des plans rationnels procéder de la manière suivante. Comme l'ont montré de multiples vérifications, les plans rationnels dans un large domaine de valeurs des paramètres E, $\frac{\alpha}{\beta}$, θ sont les plans dont l'aire sous la caractéristique opérationnelle est minimale. Nous partirons du fait que $N \gg 1$, $\frac{D}{N} < 0{,}1$. Dans ces hypothèses on peut utiliser l'approximation binomiale (7.4.8) pour exprimer la caractéristique opérationnelle $\pi(q)$. Comme q ne peut prendre que les valeurs $q = \frac{D}{N}$, $D = 0, 1, 2, \ldots, N$, en qualité d'analogue de l'aire sous la caractéristique opérationnelle (λ_{nc}, c) on peut adopter la grandeur

$$S_c = (N+1)^{-1} \sum_{D=0}^{N} \pi(L) \frac{D}{N} = (N+1)^{-1} \sum_{D=0}^{N} \sum_{d=0}^{c} C_D^d \nu^d (1-\nu)^{D-d} \approx$$

$$\approx (N+1)^{-1} \sum_{d=0}^{c} \frac{\nu^d}{d!} \sum_{D=0}^{\infty} D(D-1)\ldots(D-d+1)(1-\nu)^{D-d} =$$

$$= \frac{1}{N+1} \frac{c+1}{\nu} = \frac{c+1}{\lambda_{nc}} q_n \frac{N}{N+1}, \qquad (7.4.12)$$

où $\lambda_{nc} = n_c q_n$ est la solution de l'équation (7.4.6) et $\nu = \frac{n}{N}$. Pour des valeurs données de $\frac{\beta}{\alpha}$ et E parmi la famille des plans admissibles vérifiant (7.4.6) et respectivement équivalents au point de vue économique, on choisit celui pour lequel la valeur de S_c ou $\frac{c+1}{\lambda_{nc}}$ (cf. (7.4.12)) est minimale. Du point de vue probabiliste les plans avec une valeur minimale S_c sont optimaux quand la distribution a priori pour le nombre d'articles défectueux en présence des déréglages est uniforme, autrement dit, $\mathrm{P}\{D = k\} = (N+1)^{-1}$, $k = 0, \ldots, N$, comme la probabilité d'acceptation de tels lots est S_c. Pour des valeurs fixées de $\frac{\beta}{\alpha}$ et E on peut trouver les valeurs $\theta_{\frac{c}{c+1}}$ telles que si pour le lot inspecté $\theta_{\frac{c-1}{c}} \leqslant \theta \leqslant \theta_{\frac{c}{c+1}}$, alors le nombre d'acceptation doit être posé égal à c. Une partie d'une table de ce genre est montrée plus bas (table 7.4.1).

On trouve la valeur correspondante de λ_{nc} en interpolant les nombres λ'_c, λ''_c. Par exemple, si $E = 0{,}02$, $\frac{\beta}{\alpha} = 0{,}1$, $q_n = 0{,}09$,

Table 7.4.1

$$\frac{\beta}{\alpha}=0,1$$

c \ E	...	$E=0,02$		...
...	...	...	...	...
4-5	...	$\theta_{\frac{4}{5}}=7,9701$	$\lambda''_4=1,41973$	...
			$\lambda'_5=1,37967$	
5-6	...	$\theta_{\frac{5}{6}}=11,0627$	$\lambda''_5=1,61555$	...
			$\lambda'_6=1,88481$	
...	...	...	...	...

la taille du lot inspecté $N = 1000$, alors $\theta = 9$. Nous avons de la table 7.4.1 que $\theta_{\frac{4}{5}} = 7,9701 < 9 < \theta_{\frac{5}{6}} = 11,0627$, d'où il découle que $c = 5$. L'interpolation linéaire des valeurs λ'_5, λ''_5 donne la valeur $\lambda_{n5} \approx 1,46$. La taille relative de l'échantillon $\frac{n}{N} = \frac{\lambda_{n5}}{\theta} = 0,16$. Si l'on estime au préalable que $\frac{n}{N} \ll 1$, on trouve alors de la table 25 de l'annexe pour $E = 0,02$, $\gamma = \frac{\beta}{\alpha\theta} = 0,0111\ldots$, $\lg \gamma = \bar{1},9542$, que $c = 5$ et $\lambda_{nc} = 1,45$. On peut ainsi obtenir même pour une taille relativement grande de l'échantillon à l'aide de la table 25 de l'annexe une approximation suffisamment bonne.

Exemples. Comparaison avec les plans de Dodge et Romig. Considérons des exemples d'utilisation de la table 25 et du nomogramme de l'annexe. Le choix du coefficient de coût E est déterminé à partir des possibilités de l'entreprise et des exigences du consommateur. Si l'on utilise déjà à l'entreprise le contrôle statistique d'échantillonnage d'après un indice qualitatif, on peut d'après la formule (7.4.5) calculer la valeur du coefficient de coût E. Cette valeur est ensuite utilisée pour rechercher le plan rationnel. Rappelons que la valeur du paramètre de coût $\gamma = \frac{\beta}{\alpha N q_n}$, indispensable pour la recherche du plan de contrôle, est déterminée par les conditions concrètes de la production. Lors de l'utilisation des plans décrits plus haut le contrôle pour un même coût devient plus sensible envers les lots avec un taux élevé d'articles défectueux.

Exemple 1. Supposons que le rapport β du coût de la vérification d'un article à la perte α due au rejet d'un article conforme est $\frac{\beta}{\alpha} = 0{,}4$. Le taux d'articles défectueux lors du déroulement normal du processus de production est $q_n = 0{,}01$. On a décidé d'assigner à l'exécution du contrôle 10 % des moyens indispensables pour couvrir les pertes dues au contrôle intégral de la production, autrement dit, $\frac{E}{\frac{\beta}{\alpha}} = 0{,}10$. Nous trouvons de cette condition que $E = 0{,}05$. Supposons que la taille du lot contrôlé est $N = 1500$. Pour les valeurs mentionnées plus haut $\theta = Nq_n = 1500 \cdot 0{,}01 = 15$, $\gamma = \frac{\beta}{\alpha\theta} = \frac{1}{30}$, $\lg \gamma = -1{,}4771$. Nous trouvons d'une table semblable à la table 25 de l'annexe pour $E = 0{,}05$ que $\lg \gamma_{\frac{2}{3}} = -1{,}2793 > \lg \gamma = -1{,}4771 > \lg \gamma_{\frac{3}{4}} = -1{,}5055$. C'est pourquoi pour un plan rationnel le nombre d'acceptation est $c = 3$. Nous trouvons la taille n de l'échantillon par interpolation linéaire des valeurs de $\lg \lambda_3 = -0{,}0453$ et $\lg \lambda_{\frac{3}{4}} = -0{,}0010$ par rapport aux valeurs correspondantes de

$$\lg \gamma \cdot \lg (nq_n) \cong \lg \lambda_3 + (\lg \lambda_{\frac{3}{4}} - \lg \lambda_3) \frac{\lg \gamma - 1\ \gamma_3}{\lg \gamma_{\frac{3}{4}} - \lg \gamma_3} =$$

$$= -0{,}0453 + 0{,}0443 \times \frac{(-1{,}4771 + 1{,}3924)}{(-1{,}5055 + 1{,}3924)} = -0{,}0121.$$

En utilisant les tables des antilogarithmes nous avons $nq_n = 0{,}9725$, respectivement $n \approx 97$. Ainsi, le plan rationnel est (97,3).

Exemple 2. On sait que $\frac{\beta}{\alpha} = 3$, $q_n = 0{,}015$ et on a décidé de prendre la valeur du coefficient de coût $E = 0{,}10$. La taille du lot inspecté est $N = 1000$. On demande de trouver un plan rationnel du type d'échantillonnage simple. Nous nous baserons sur le nomogramme de l'annexe. La valeur du paramètre de coût est $\gamma = \frac{\beta}{\alpha\theta} = 0{,}2$. L'intersection de la droite parallèle à l'axe des abscisses, passant par la valeur $E = 0{,}1$ sur l'axe des ordonnées, a lieu avec la droite correspondant à la valeur $\gamma = 0{,}2$ dans la zone du nombre d'acceptation $c = 1$. Nous trouvons alors sur l'axe des abscisses la valeur $\lg \lambda_n = \lg (nq_n) = -0{,}54$ (rappelons qu'à droite de $\lambda = 0{,}5$ les valeurs de λ sur l'axe des abscisses sont données à l'échelle usuelle, alors qu'à gauche, à l'échelle logarithmique). Utilisant la table des antilogarithmes nous trouvons $nq_n = 0{,}2885$, $n \approx 19$. Ainsi, le plan rationnel est (19, 1). On peut montrer que $\lambda_{0,1} = 13{,}5$. Ainsi,

si le taux d'articles défectueux est $k = \frac{\lambda_{0.1}}{\lambda_n} = 46,8$ fois plus grand que lors du déroulement normal du processus de production, de tels

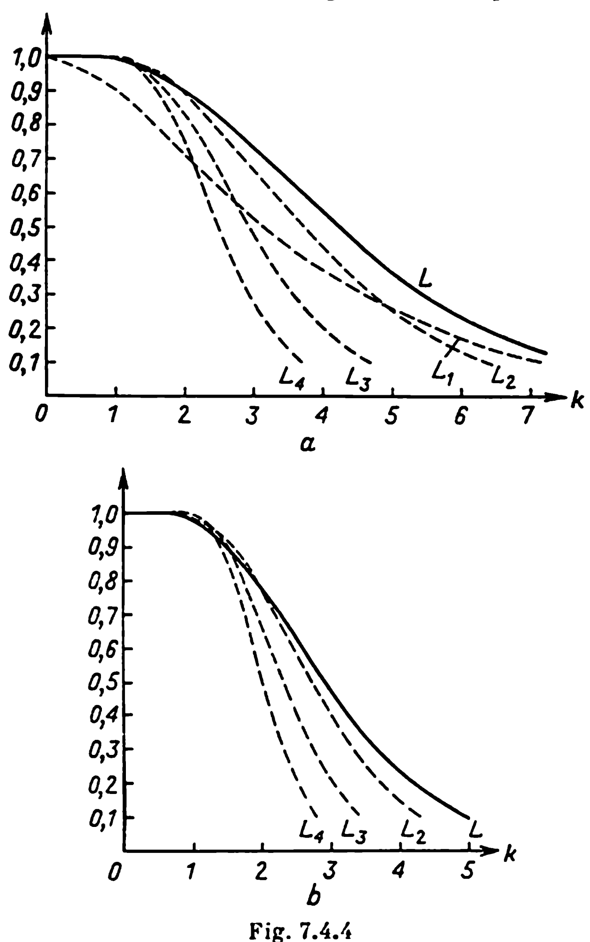


Fig. 7.4.4

lots seront acceptés avec une probabilité inférieure à 0,1. Si le consommateur estime qu'un tel contrôle est trop faible, le producteur devra dans ce cas augmenter les dépenses assignées pour le contrôle, ce qui correspondra au choix d'une plus grande valeur du coefficient de coût E.

Nous terminons cette série d'exemples par une comparaison des caractéristiques opérationnelles recommandées dans l'ouvrage de Dodge et Romig [4] avec les caractéristiques opérationnelles des plans rationnels, trouvés à l'aide de la table 25 de l'annexe.

On a représenté sur la figure 7.4.4,*a* en continu la caractéristique opérationnelle L du plan (37, 3), recommandé par Dodge et Romig dans le cas du contrôle d'un lot de $N = 900$ articles, $q_n = 0{,}025$. Ce plan assure la valeur de $q_m = 0{,}05$. Le plan (37, 3) coïncide pratiquement avec les plans que nous avons recommandés pour les cas $\frac{\beta}{\alpha} = 1$. Si par contre $\frac{\beta}{\alpha} \neq 1$, l'utilisation des plans rationnels donne les meilleurs résultats. On a montré en pointillé les caractéristiques opérationnelles L_1, L_2, L_3, L_4 des plans rationnels correspondant aux valeurs $\frac{\beta}{\alpha} = 5$; 0,5; 0,2; 0,1. Pour une valeur fixée de $\frac{\beta}{\alpha}$ la perte due à l'utilisation du plan rationnel lors du déroulement normal du processus de production était posée égale à la perte liée à l'utilisation du plan (37, 3). Sur la figure 7.4.4,*b* on a pris pour base le plan (160, 4), recommandé dans l'ouvrage de Dodge et Romig pour le contrôle du lot de taille $N = 3\,500$ et $q_n = 0{,}01$. On peut voir sur la figure 7.4.4 que les plans rationnels, « coûtant » au producteur autant que le plan de Dodge et Romig, sont plus sensibles à la dégradation de la qualité de la production.

Plans rationnels du type d'échantillonnage double. En conclusion de ce paragraphe considérons les questions liées à la recherche des plans rationnels de contrôle du type d'échantillonnage double tronqué (n_1, n_2, c_1, c_2). Pour simplifier les calculs nous supposerons que sont remplies les conditions conduisant à une distribution poissonienne (cf. § 7.2). Introduisons le paramètre « temporel » t en posant que $t = 1$ correspond au nombre d'articles vérifiés $n_0 = q_n^{-1}$, c'est-à-dire *au nombre moyen d'articles, pour lequel dans les conditions du déroulement normal du processus de production on rencontre précisément un article défectueux*. Ainsi, à la taille n_1 du premier échantillon correspond la valeur de $t_1 = n_1 q_n$; à la taille n_2 du second échantillon, la valeur de $t_2 = n_2 q_n$. Les nombres d'articles défectueux d_i décelés dans le i-ième échantillon suivent une distribution poissonienne de paramètres t_i. $i = 1, 2$. Dans ces conditions les dépenses moyennes liées à la réalisation du contrôle d'après le plan (n_1, n_2, c_1, c_2) sont, lors du déroulement normal du processus de production, égales à

$$E_c \cong \alpha \Big\{(N-n_1)\,[1-L_{c_2}(t_1)] + [N-(n_1+n_2)] \times \\ \times \Big[\sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} \frac{t_1^{d_1}}{d_1!} e^{-t_1} (1-L_{c_2-d_1}(t_2))\Big]\Big\} + \\ +\beta \Big\{n_1\,[L_{c_1}(t_1)+1-L_{c_2}(t_1)] + (n_1+n_2) \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} \frac{t_1^{d_1}}{d_1!} e^{-t_1}\Big\}. \quad (7.4.13)$$

Le coefficient de α est le nombre moyen d'articles conformes rejetés dans l'hypothèse $q_n \ll 1$ et le coefficient de β, la taille moyen-

ne de l'échantillon avant l'adoption de la décision de rejeter ou d'accepter le lot. En divisant les deux membres par αN nous obtenons

$$E=\frac{E_c}{\alpha N}=(1-\nu_1)\,[1-L_{c_2}(t_1)]+$$

$$+(1-\nu_1-\nu_2)\left(\sum_{d_1=c_1+1}^{c_2}\frac{t_1^{d_1}}{d_1!}e^{-t_1}[1-L_{c_2-d_1}(t_2)]\right)+$$

$$+\frac{\beta}{\alpha}\nu_1[L_{c_1}(t_1)+1-L_{c_2}(t_1)]+(\nu_1+\nu_2)\sum_{d_1=c_1+1}^{c_2}\frac{t_1^{d_1}}{d_1!}e^{-t_1}\Big], \quad (7.4.14)$$

où $\nu_i = n_i/N$. Nous nous bornerons partout dans ce qui suit au cas des échantillons de taille relativement petite, quand $\nu_1 + \nu_2 \ll 1$ ($< 0{,}1$). Dans ce cas, posant $\nu_i = 0$, nous pouvons écrire (7.4.14) sous la forme

$$E=1-\pi(t_1(t_2))+\gamma\mu, \quad (7.4.15)$$

où $\gamma+\beta/\alpha N q_n$ et μ est la taille moyenne de l'échantillon exprimée en unités temporelles, autrement dit,

$$\mu=t_1+t_2\left(\sum_{d_1=c_1+1}^{c_2}\frac{t_1^{d_1}}{d_1!}e^{-t_1}\right), \quad (7.4.16)$$

$\delta = 1 - \pi(t_1(t_2))$ est la probabilité de rejeter le lot fabriqué dans des conditions normales de production, c'est le *risque du producteur*. L'équation (7.4.15) est analogue à l'équation (7.4.7) pour les plans du type d'échantillonnage simple. L'équation (7.4.15) est vérifiée par une infinité de plans tronqués du type d'échantillonnage double. Toutefois, pour des valeurs fixées de μ et δ on n'a qu'un nombre fini de plans de ce genre. En effet, si l'on se donne les valeurs de μ, δ et les couples de nombres d'acceptation c_1 et $c_2 > c_1$, on peut alors de l'équation (7.4.16) exprimer t_2 en fonction de t_1

$$t_2(t_1)=(\mu-t_1)\left(\sum_{d_1=c_1+1}^{c_2}\frac{t_1^{d_1}}{d_1!}e^{-t_1}\right)^{-1}. \quad (7.4.17)$$

On trouve t_1 en résolvant l'équation transcendante

$$1-\delta=L_{c_1}(t_1)+\sum_{d_1=c_1+1}^{c_2}\frac{t_1^{d_1}}{d_1!}e^{-t_1}L_{c_2-d_1}(t_2(t_1)) \quad (7.4.18)$$

que l'on obtient en égalant le risque du producteur à une valeur choisie de δ. On peut montrer que cette équation transcendante possède soit une seule solution t_1, soit deux solutions t_1' et $t_1'' > t_1'$, soit encore ne possède pas de solution (pour les valeurs données de μ_1, δ, c_1, c_2). Après avoir obtenu t_1 nous trouvons t_2 de (7.4.17).

Nous obtenons ainsi en définitive que le plan vérifiant les conditions d'égalité à δ du risque du producteur, pour un volume moyen d'inspection μq_n^{-1}, est $(t_1 q_n^{-1}, t_2 q_n^{-1}, c_1, c_2)$. On a établi qu'en présence de deux racines t_1', t_1'' les meilleurs résultats sont donnés par les plans utilisant la plus grande racine $t_1'' > t_1'$. Les caractéristiques opérationnelles de ces plans admettent les plus petites valeurs dans le domaine des grandes valeurs du taux d'articles défectueux dans le lot. Désignons le second membre de (7.4.18) par $f(t_1, c_1, c_2)$. On peut aisément se convaincre, par comparaison directe des termes, de la validité des inégalités

$$L_{c_1}(t_1) < f(t_1, c_1, c_2) < f(t_1, c_1, c_2 + 1), \qquad 0 \leqslant t_1 \leqslant \mu. \quad (7.4.19)$$

Ainsi, si $L_{c_1}(t_1) > 1 - \delta$, l'équation (7.4.18) ne possède pas de racines. Comme pour tout δ on peut trouver un c tel que $L_{c_1}(t_1) > 1 - \delta$ pour tous les $0 \leqslant t_1 \leqslant \mu$, le nombre de plans possédant les valeurs données de μ et δ est fini et s'il n'y a pas de plans pour c_1, c_2, il n'y en a pas pour les nombres c_1, $c_2 + k$, $k = 1, 2, \ldots$ On peut se convaincre par une simple vérification de la validité de l'inégalité

$$f(t_1, c_1, c_1 + 1) < f(t_1, c_1 + 1, c_1 + 2), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \mu. \quad (7.4.20)$$

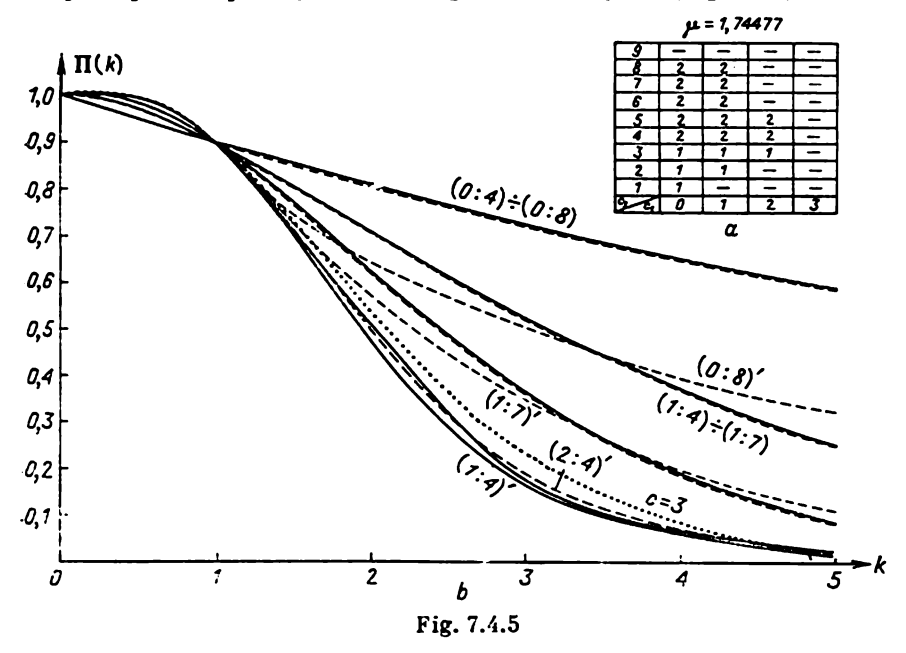
Il découle de cette inégalité que s'il n'existe pas de plans pour c_1, $c_1 + 1$, il n'y en a pas non plus pour c_1', c_2', $c_1' > c_1$, $c_2' > c_1 + 1$. Nous pouvons ainsi exprimer ces résultats dans le théorème suivant.

Théorème 7.4.1. *Il existe un nombre fini de plans du type d'échantillonnage double tronqué possédant les valeurs données du risque du producteur* δ *et du volume moyen d'inspection avant d'adopter la décision* μ $(\mu \ll \theta = Nq_n)$. *Les couples de nombres d'acceptation* c_1, c_2 $(c_2 > c_1)$, *pour lesquels il existe de tels plans, forment un ensemble contenant les points de la forme* c_1, c_2, *où* $c_1 = 0, 1, \ldots, c_1(\mu, \delta)$, *et* $c_2 = c_1 + 1, \ldots, c_2(\mu, \delta, c_1)$.

On a montré sur la figure 7.4.5,*a* pour les valeurs $\delta = 0{,}1$ et $\mu = 1{,}74477$ les nombres c_1, c_2 pour lesquels les plans existent. Dans ce cas on note par le chiffre 1 la présence d'une racine t, par le chiffre 2, la présence de deux racines. On a montré sur la figure 7.4.5,*b* les caractéristiques opérationnelles de ces plans pour certains nombres (c_1, c_2). En qualité d'indice montrant le degré de rationalité du plan on peut utiliser l'aire de la surface sous la caractéristique opérationnelle. La formule pour l'aire S sous la caractéristique opérationnelle du plan $(t_1 q_n^{-1}, t_2 q_n^{-1}, c_1, c_2)$ aura, dans les conditions d'applicabilité de l'approximation poissonienne, pour expression

$$S = \frac{c_1 + 1}{t_1} + \sum_{d_1 = c_1 + 1}^{c_2} \sum_{d_2 = 0}^{c_2 - d_1} \frac{t_1^{d_1} t_2^{d_2} (d_1 + d_2)!}{d_1!\, d_2!\, (t_1 + t_2)^{d_1 + d_2 + 1}}. \quad (7.4.21)$$

Toutefois, le choix des plans uniquement d'après cet indice s'avère insuffisant. Les calculs numériques ont montré, par exemple, que pour $\delta = 0{,}0025$, $\mu = 2{,}0$ la valeur minimale de S est obtenue pour le plan pour lequel $t_1 = 0{,}948$, $t_2 = 4{,}297$, $c_1 = 1$, $c_2 = 9$; dans ce



c_2 \ c_1	0	1	2	3
9	—	—	—	—
8	2	2	—	—
7	2	2	—	—
6	2	2	—	—
5	2	2	2	—
4	2	2	2	—
3	1	1	1	—
2	1	1	—	—
1	1	—	—	—

Fig. 7.4.5

cas $S_1 = 2{,}512$. Il existe toutefois un plan avec une valeur $S_2 = 2{,}546$, un peu plus grand que S_1, caractérisé par les paramètres $t_1 = 0{,}849$, $t_2 = 2{,}013$, $c_1 = 0$, $c_2 = 6$. Le second plan, bien que possédant une aire plus grande, peut, en certains cas, s'avérer plus avantageux.

Le fait est que pour le second plan la taille maximale de l'échantillon est $(t_1 + t_2)\,q_n^{-1} = 2{,}862\, q_n^{-1}$, alors que pour le premier plan elle est égale à $5{,}245 q_n^{-1}$, c'est-à-dire près de deux fois plus élevée, bien que, rappelons-le, lors du déroulement normal du processus de production, le volume moyen de l'inspection est identique pour les deux plans et égal à μq_n^{-1}. L'utilisation des plans pour lesquels le rapport $t_2 : t_1 = n_2 : n_1$ est grand peut être rendue difficile du fait de la capacité réduite du dispositif de contrôle. Par ailleurs, l'utilisation de ces plans peut conduire à une charge non uniforme des postes de contrôle. Ainsi, pour des valeurs données de E et γ, en faisant varier les valeurs δ et μ conformément à l'équation (7.4.15), nous pouvons choisir plusieurs plans possédant une aire S relativement petite et des valeurs modérées de $t_1 + t_2$. L'utilisation des

plans doubles, bien que liée à certaines incommodités, donne un gain dans le sens d'une plus grande sensibilité envers les lots comportant un taux élevé d'articles défectueux. On a rapporté sur la figure 7.4.6 les caractéristiques opérationnelles du plan rationnel du type

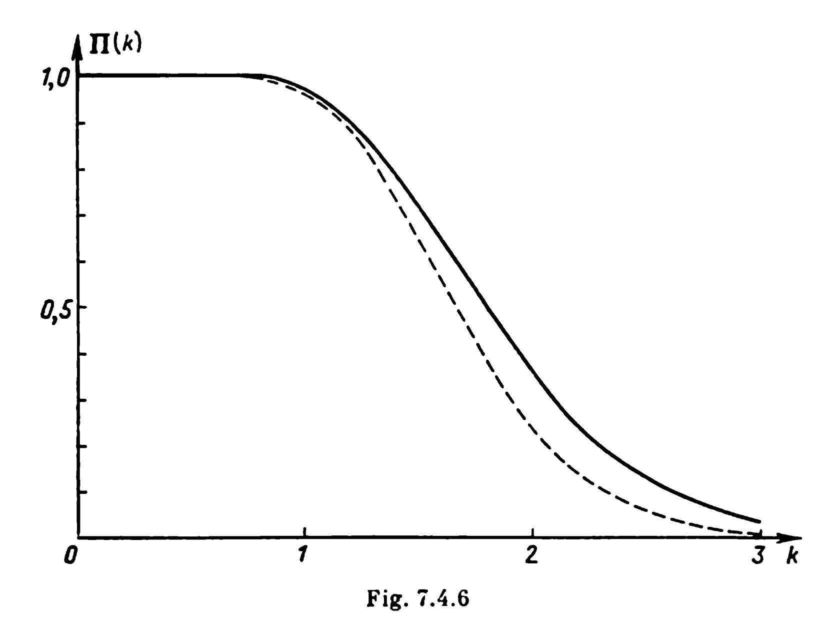


Fig. 7.4.6

($6{,}526q_n^{-1}$, 11) et du plan du type ($1{,}8q_n^{-1}$, $6{,}9q_n^{-1}$, 2,15) correspondant aux valeurs de $E = 0{,}1$ et $\gamma = 0{,}01$. La caractéristique opérationnelle du plan du type d'échantillonnage double est donnée par une courbe en pointillé.

Il apparaît de la figure 7.4.6 que la sensibilité du plan du type d'échantillonnage double est notablement plus élevée que celle du plan rationnel du type d'échantillonnage simple pour un taux d'articles défectueux q supérieur à $2q_n$. En présence des exigences élevées envers la stabilité de la qualité de la production liées à un coût élevé de l'opération de contrôle, ce gain conduit à estimer rationnels les plans du type d'échantillonnage double. C'est pourquoi il semble opportun d'élaborer les standards des plans économiques du type d'échantillonnage double.

Problème général de recherche des plans de contrôle rationnels. Considérons en conclusion le problème général de la recherche des plans rationnels du type progressif. On demande alors que le coût du contrôle soit égal à une valeur donnée. Supposons que la distribution a priori est donnée par les valeurs des probabilités $f_n(D) = P\{D_n = D\}$, $D = 0, 1, \ldots, N$, et que le plan du type progres-

sif est caractérisé par les paramètres : $\bar{n} = \bar{n}(N, D)$, le volume moyen de l'inspection avant l'adoption d'une décision définitive après laquelle on arrête le contrôle ; $\bar{n}_{\text{rej}} = \bar{n}_{\text{rej}}(N, D)$, le volume moyen de l'inspection dans les conditions du rejet du lot ; $\bar{d}_{\text{rej}} = \bar{d}_{\text{rej}}(N, D)$, la valeur moyenne du nombre d'articles défectueux décelés dans les conditions du rejet du lot. En adoptant ces notations on peut exprimer les dépenses moyennes pour la réalisation du contrôle lors du déroulement normal du processus de production par la formule

$$E_c = \sum_{D=0}^{N} f_n(D)\,[N - \bar{n}_{\text{rej}} - (D - \bar{d}_{\text{rej}})]\,\mathrm{P}_{\text{rej}}(N, D) + \beta\bar{n}. \quad (7.4.22)$$

Ici $\mathrm{P}_{\text{rej}}(N, D)$ est la probabilité de rejeter le lot de taille N comportant D articles défectueux. A chaque plan vérifiant la condition (7.4.22) on peut associer pour une valeur donnée de E_c une fonctionnelle dont les valeurs nous permettraient de juger du degré de rationalité du plan. Par exemple, on peut considérer des fonctionnelles de la forme

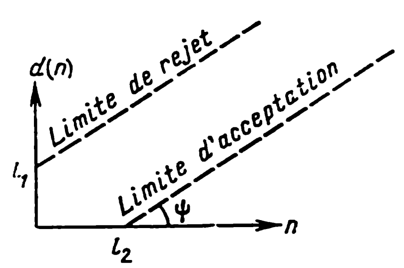


Fig. 7.4.7

$$\Phi = \sum_{D=0}^{N} \varphi(D)\,\Pi(D), \quad (7.4.23)$$

où $\Pi(D)$ est la valeur de la caractéristique opérationnelle du plan et $\varphi(D)$, l'ensemble des nombres $D = 0, 1, \ldots, N$. Dans le cas, où $\varphi(D) = \varphi_0$, la valeur Φ est proportionnelle aux « aires » situées sous la caractéristique opérationnelle. Le problème général peut être formulé de la manière suivante. On demande de trouver parmi tous les plans vérifiant la condition (7.4.22), pour une valeur donnée des dépenses E_c, un plan tel que la valeur de la fonctionnelle Φ soit minimale. Ce problème n'est pas encore résolu sous forme générale.

Les cas considérés des plans du type d'échantillonnage simple et double sont des cas particuliers du problème général correspondant aux plans optimaux minimisant (7.4.23) dans les classes données de plans d'échantillonnage simple et double. Considérons encore un exemple, les plans du type de Wald (fig. 7.4.7).

Les plans du type de Wald ont pour frontières d'acceptation et de rejet du lot des droites coupant l'axe n des nombres d'articles vérifiés et l'axe $d(n)$ des nombres d'articles défectueux décelés, à des distances l_2, l_1 respectivement, φ est l'angle de pente de ces droites (cf. fig. 7.4.7). Ainsi, la famille des plans de Wald est triparamétrique. Supposant que la décision d'accepter ou de rejeter un lot est prise d'après un échantillon de taille peu grande et que la distribution a priori de D est binomiale, nous pouvons utiliser les formu-

Π(k)

1,0

0,5

0

$E = 0,01$ $\gamma = 0,1$

simple $(\lambda; c) = (0,0693; 1)$

double $(t_1; t_2; c_1; c_2) = (0,071; 0,351; 0; 3)$

progressif

$q_0 = 0,01$ $q_1 = 0,186$ $\delta = 0,00025$

$\beta = 0,2$

10 20 30 40 50 60 k

a

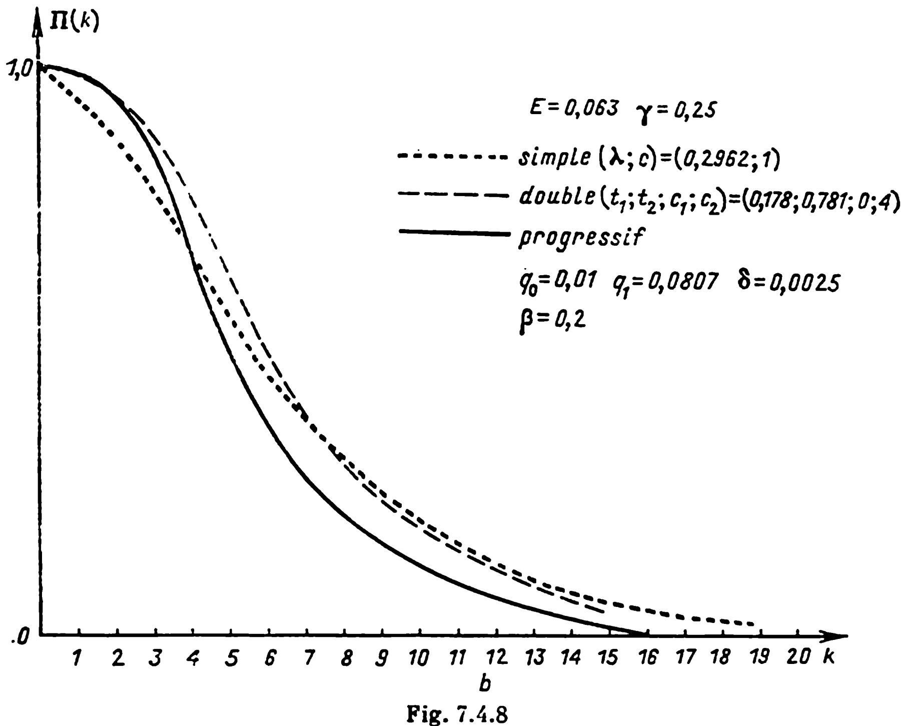


Fig. 7.4.8

les pour le volume moyen des essais et la caractéristique opérationnelle rapportés dans l'ouvrage de Wald ([14], chap. 5). Désignons le volume moyen de l'inspection par M et exprimons-le en unités μ, multiples de q_n^{-1}, où q_n est la valeur moyenne du taux d'articles défectueux dans des conditions normales de production. Désignons l'erreur de première espèce par δ. Le coût du plan, par exemple $E = E_c/\alpha N$, est donné par la relation $E = \delta + \gamma\mu$, où $\gamma = \beta/\alpha N q_n$. La famille biparamétrique des plans de Wald, qui est une sous-famille de la famille générale triparamétrique des plans de Wald, vérifie la relation (7.4.2). Fixant les valeurs de E, γ et faisant varier celles de δ_I, $\delta_{II} = \beta$ (erreurs de première et de seconde espèce), nous choisissons le plan pour lequel les valeurs de la caractéristique opérationnelle sont situées à proximité de l'enveloppe inférieure des caractéristiques opérationnelles de toute la famille biparamétrique des plans vérifiant (7.4.2). Sur les figures 7.4.8,*a* et *b* sont montrées les caractéristiques opérationnelles de trois types de plans: échantillonnage simple, double et plan de Wald ; la figure 7.4.8, *a* correspond aux valeurs $E = 0{,}01$, $\gamma = 0{,}1$, et la figure 7.4.8, *b* aux valeurs $E = 0{,}063$, $\gamma = 0{,}25$. Il apparaît de ces exemples que les plans du type de Wald peuvent présenter certains avantages par rapport aux plans du type d'échantillonnage simple et double équivalents au point de vue des dépenses entraînées. On doit ainsi inclure dans le standard des plans de contrôle d'acceptation des plans de divers types, y compris des plans du type progressif. Nous ne rapportons dans le présent ouvrage que les tables des plans du type d'échantillonnage simple uniquement pour la simple raison que les tables correspondantes des plans d'autres types ne sont pas encore calculées ; ce travail d'ailleurs touche à sa fin.

§ 7.5. Estimations de la qualité d'après les résultats du contrôle

Introduction. Si le plan de contrôle est choisi, le problème se pose d'estimer l'efficacité de l'action de ce plan. Cette efficacité peut être mesurée de différentes manières. Par exemple, on peut utiliser à cette fin le rapport du nombre d'articles défectueux acceptés au nombre global d'articles défectueux présentés. Une large classe de problèmes se pose ainsi, liés à l'obtention de diverses caractéristiques d'après l'information recueillie sur l'acceptation et le rejet des lots des articles. Un intérêt particulier doit être accordé en ce sens aux estimations non biaisées [1], c'est-à-dire aux estimations qui donnent en moyenne des valeurs exactes. Soulignons que l'exactitude de ces estimations dépend du nombre de données utilisées pour les calculer. Les estimations non biaisées peuvent parfois donner des valeurs négatives. Il en sera ainsi quand on utilise une estimation non biaisée pour le nombre d'articles défectueux acceptés dans le

cas d'un échantillonnage double. Ces cas particuliers semblent absurdes, puisque le nombre des articles défectueux acceptés ne peut être plus petit que zéro. Il est toutefois indispensable, lors de l'estimation du nombre global d'articles défectueux acceptés d'après les résultats du contrôle d'un grand nombre de lots, d'inclure les valeurs négatives, pour éviter de surestimer le nombre global d'articles défectueux acceptés. Les estimations non biaisées n'existent pas pour toutes les caractéristiques ni pour tous les plans de contrôle. On peut, toutefois, en appliquant des méthodes spéciales, modifier le type de plan utilisé de telle façon que l'estimation non biaisée désirable existe. Un exemple de ce genre de méthodes peut être donné par la règle de contrôle du $(n + 1)$-ième article proposée par A. Kolmogorov et développée par S. Sirajdinov et M. Eidelnant [2]. Dans la pratique du contrôle d'acceptation on utilise largement les plans du type d'échantillonnage double et progressif. Malheureusement, jusqu'aujourd'hui la théorie des estimations non biaisées n'était développée que pour les plans du type d'échantillonnage simple. Comme on le sait (cf. le théorème 7.5.2), les *estimations non biaisées sont plus exactes que si elles sont des fonctions des statistiques exhaustives.* Par conséquent, dans le cas de l'échantillonnage double on doit tenir compte du nombre global d'articles défectueux, décelés aussi bien dans le premier que dans le second échantillon. Toutefois, dans la majorité des travaux consacrés à l'utilisation des plans du type d'échantillonnage double ou bien on ne pose pas le problème de la recherche de telles estimations, ou bien dans le meilleur des cas on donne une recommandation pour obtenir des estimations uniquement d'après les résultats du premier échantillon. La théorie des estimations non biaisées appliquée aux problèmes du contrôle d'acceptation n'a été développée principalement que par les probabilistes soviétiques (cf. [1], [2], [15], [16], [17]). Dans l'ouvrage volumineux de Cowden [6], où 11 chapitres sont consacrés à la description des méthodes du contrôle d'acceptation, on ne relève aucune trace des problèmes d'obtention des estimations non biaisées.

Estimations non biaisées. Principaux théorèmes. Nous allons formuler, en tenant compte des intérêts des ingénieurs occupés dans la production, les théorèmes des estimations non biaisées dans le cas d'un *espace discret des résultats de l'expérience.* Les théorèmes 7.5.1 et 7.5.2 sont rapportés dans l'article de Kolmogorov [1].

Soit $X = \{x\}$ l'espace des résultats de l'expérience. Les points de cet espace sont des suites de zéros et d'unités, de longueurs généralement différentes n^*, $x = \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, où $\varepsilon_i = 0$ ou 1 suivant que le i-ième article contrôlé s'est avéré conforme ou défectueux. On peut ainsi interpréter n^* comme le nombre des articles vérifiés, et $\sum_{i=1}^{n^*} \varepsilon_i = d^*$ comme le nombre d'articles défectueux décelés au cours

d'un tel contrôle. Désignons comme auparavant par N la taille du lot à contrôler, et par D le nombre des articles défectueux qu'il contient. On appelle estimation toute fonction $h(x)$ dont les valeurs ne dépendent pas explicitement de la grandeur D, quand D est inconnue. Le nombre total des résultats x est fini. Désignons par k_h le nombre des solutions de l'équation $h(x) = h$. Numérotons tous les points x à l'aide du couple d'indices h, k, en notant $x = x_{h,k}$, si $h(x) = h$, $k = 1, \ldots, k_h$. Comme à chaque x correspond une certaine valeur de $h(x)$, tous les points x seront numérotés. Désignons également par $p_{h,k} = p_{h,k}(D)$ la probabilité pour que le résultat de l'expérience soit la valeur $x_{h,k}$. En vertu du critère de factorisation (cf. chap. 1) la statistique $S(x)$ est exhaustive quand et seulement quand la factorisation est valable, c'est-à-dire quand

$$p_{h,k}(D) = p(S(x_{h,k}), D)\, q_{h,k}, \tag{7.5.1}$$

où $q_{h,k} \geqslant 0$ ne dépend pas de D, $\sum_{k=1}^{k_h} q_{h,k} = 1$. L'estimation $\varphi(x_{h,k}) = \varphi_{h,k}$ est dite non biaisée pour la fonction $f(D)$, si pour tout $D = 0, 1, \ldots, N$, $\mathbf{M}\varphi(x) = f(D)$, c'est-à-dire si on a la relation

$$\sum_h \sum_{k=1}^{k_h} \varphi_{h,k} p_{h,k} = f(D). \tag{7.5.2}$$

On peut généraliser cette notion. Si la variable aléatoire g est donnée, c'est-à-dire la fonction $g(x_{h,k}) = g_{h,k}$ des résultats de l'expérience, l'estimation $\varphi(x_{h,k}) = \varphi_{h,k}$ est dite *non biaisée* pour $g_{h,k}$ si leurs espérances mathématiques coïncident, autrement dit, si pour $D = 0, 1, \ldots, N$ on a

$$\sum_h \sum_{k=1}^{k_h} \varphi_{h,k} p_{h,k} = \sum_h \sum_{k=1}^{k_h} g_{h,k} p_{h,k}. \tag{7.5.3}$$

Le théorème suivant affirme que l'on peut construire, à l'aide d'une statistique exhaustive, à partir d'une estimation non biaisée une autre estimation non biaisée que nous appellerons *améliorée*.

Théorème 7.5.1. *Si $\varphi_{h,k}$ est une estimation non biaisée de $g_{h,k}$ et $h(x_{h,k}) = h$ est une statistique exhaustive, alors l'estimation*

$$\varphi_h^* = \sum_{k=1}^{k_h} \varphi_{h,k} q_{h,k} \tag{7.5.4}$$

est également non biaisée.

Démonstration. En utilisant (7.5.3) et (7.5.1) nous avons

$$\mathbf{M}\varphi^* = \sum_{h,k} \varphi_h^* p_{h,k}(D) = \sum_h \varphi_h^* \sum_{k=1}^{k_h} p_{h,k}(D) = \sum_h \varphi_h^* \sum_{k=1}^{k_h} p(h, D)\, q_{h,k} =$$

$$= \sum_h \varphi_h^* p(h, D) = \sum_h \sum_{k=1}^{k_h} \varphi_{h,k} q_{h,k} p(h, D) = \sum_{h,k} \varphi_{h,k} p_{h,k}(D) = \mathbf{M}g,$$

ce que l'on devait démontrer.

Théorème 7.5.2. *Si* φ *et* φ^* *sont respectivement les estimations non biaisée et améliorée, leurs variances* $\mathbf{D}[\varphi]$ *et* $\mathbf{D}[\varphi^*]$ *sont liées par la relation*

$$\mathbf{D}[\varphi]=\mathbf{M}(\varphi-\varphi^*)^2+\mathbf{D}[\varphi^*], \tag{7.5.5}$$

d'où il découle que $\mathbf{D}[\varphi^*]\leqslant\mathbf{D}[\varphi]$.

Démonstration.

$$\mathbf{D}[\varphi]=\mathbf{M}(\varphi-\mathbf{M}g)^2=\mathbf{M}[(\varphi-\varphi^*)+(\varphi^*-\mathbf{M}g)]^2=$$
$$=\mathbf{M}(\varphi-\varphi^*)^2+\mathbf{D}[\varphi^*]+2\mathbf{M}(\varphi-\varphi^*)(\varphi^*-\mathbf{M}g),$$

$$\mathbf{M}(\varphi-\varphi^*)(\varphi^*-\mathbf{M}g)=\sum_{h,k}(\varphi_{h,k}-\varphi_h^*)(\varphi_h^*-\mathbf{M}g)\,p_{h,k}(D)=$$
$$=\sum_h(\varphi_h^*-\mathbf{M}g)\,p_h(h,D)\sum_{k=1}^{k_h}(\varphi_{h,k}-\varphi_h^*)\,q_{n,k}=0,$$

étant donné que

$$\sum_{k=1}^{k_h}(\varphi_{n,k}-\varphi_h^*)\,q_{h,k}=\sum_{k=1}^{k_h}\varphi_{h,k}q_{h,k}-\varphi_h^*=0.$$

Ainsi, l'estimation φ^* est plus exacte dans ce sens que sa variance ne peut être qu'inférieure ou égale à la variance de l'estimation non biaisée. S'il existe une estimation unique, qui est une fonction de la statistique exhaustive, elle possède la variance minimale dans la classe des estimations non biaisées.

Le théorème 7.5.2 attire notre attention envers les statistiques exhaustives, qui apparaissent lors de la réalisation du contrôle des lots. Le théorème suivant donne une réponse claire à la question de la structure des statistiques exhaustives.

Théorème 7.5.3. *Soit* n^* *le numéro de l'article vérifié le dernier, et* d^* *le nombre global d'articles défectueux décelés lors du contrôle; le vecteur aléatoire* (n^*, d^*) *est alors une statistique exhaustive.*

Démonstration. Nous nous bornerons au cas de la règle non randomisée d'arrêt du contrôle, autrement dit, nous supposerons *que la probabilité conditionnelle de l'arrêt du contrôle d'après les résultats du contrôle de tous les articles précédents est égale soit à zéro, soit à l'unité.* Sous forme analytique de l'écriture cela signifie que $\mathbf{P}\{n^*=k\mid\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k\}=0$ ou 1. Nous supposerons également que l'instant de l'arrêt ne dépend pas du futur, autrement dit, que si $\mathbf{P}\{n^*=k\mid\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k\}=1$, alors pour tous les $\varepsilon_{k+1},\ldots$ $\ldots, n^*=n^*(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1},\ldots)=k$ avec une probabilité égale à l'unité. L'espace des résultats de l'expérience est l'ensemble des suites $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k$, où $\mathbf{P}\{n^*=k\mid\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k\}=1$. La probabilité de l'apparition d'une suite $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n^*}$ est égale à

$$P(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n^*})=\frac{C_{N-n^*}^{D-d^*}}{C_N^D}, \tag{7.5.6}$$

autrement dit, est égale au rapport du nombre de tous les prolongements possibles de cette suite jusqu'à la vérification complète de tous les N articles au nombre de toutes les permutations possibles de D articles dans N numéros correspondant à l'ordre du contrôle. Comparant (7.5.6) et (7.5.1) nous trouvons que $P(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n^*}) = p(n^*, d^*, D)\, q(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n^*})$, où

$$p(n^*, d^*, D) = \frac{C_{N-n^*}^{D-d^*} f(n^*, d^*)}{C_N^D} \tag{7.5.7}$$

et $f(n^*, d^*)$ est le nombre de suites de longueur égale à n^* et $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = d^*$. La valeur $q(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n^*})$ est choisie de la condition

$$q(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n^*}) = f^{-1}(n^*, d^*).$$

Nous trouvons ainsi du critère de factorisation que $(n^*; d^*)$ est une statistique exhaustive.

Il découle du théorème démontré que *toute l'information relative au déroulement du contrôle est contenue dans le couple suivant de nombres: le nombre n^* d'articles vérifiés et le nombre d^* d'articles défectueux décelés.* Ces deux caractéristiques doivent être enregistrées dans un cahier ou, ce qui est plus commode pour un traitement ultérieur, sur des cartes perforées. Ainsi, l'espace des résultats de l'expérience se rétrécit jusqu'à $X = \{x\}$, où $x = (n^*, d^*)$.

Exemples. Lors de l'utilisation des plans du type d'échantillonnage simple $(n, c)_{13}$ on a ici $n^* \equiv n$, $d^* = d(n)$. La première composante $n^* = n$ n'apporte aucune information, puisqu'avant même de réaliser le contrôle on sait que $n^* = n$. Ici $f(n^*, d^*) = C_n^{d^*}$. La statistique exhaustive est ainsi le nombre d^* d'articles défectueux décelés. Lors de l'utilisation du plan du type d'échantillonnage double $(n_1, c_1, n_2, c_2)_{1313}$ la statistique exhaustive est $d^* = d(n_1)$ si soit $c_2 < d(n_1)$, soit $d(n_1) \leqslant c_1$, où $d(n_1)$ est le nombre d'articles défectueux décelés dans le premier échantillon; si, par contre, $c_1 < d(n_1) \leqslant c_2$, la statistique exhaustive est le couple $(n_1 + n_2, d(n_1 + n_2))$. Lors de l'utilisation du plan $(n_1, c_1, n_2, c_2)_{2323}$ la statistique exhaustive est de la forme $n^* = N$, $d^* = D$ si soit $d(n_1) > c_2$, soit $c_1 < d(n_1) < c_2$, mais $d(n_1 + n_2) > c_2$; $n^* = n_1$, $d^* = d(n_1)$ si $d(n_1) \leqslant c_1$; $n^* = n_1 + n_2$, $d^* = d(n_1 + n_2)$ si $c_1 < d(n_1) \leqslant c_2$ mais $d(n_1 + n_2) \leqslant c_2$.

Exemples d'élaboration des estimations non biaisées. Considérons maintenant les méthodes d'élaboration des estimations non biaisées pour diverses caractéristiques dans le cas de l'utilisation de divers plans du type d'échantillon simple. Nous utilisons alors certains résultats des travaux de A. Kolmogorov [1], [16], de S. Sirajdinov et M. Eidelnant [2], [17] et aussi [7]. Nous nous bornerons de même qu'au paragraphe 7.2 à la considération des plans pour les-

quels d'après les résultats du contrôle on adopte l'*une* des *trois* décisions :

D_1 — rejeter sans contrôle ultérieur la partie restante de la production non vérifiée,

D_2 — effectuer le contrôle à 100 %,

D_3 — accepter la partie restante du lot sans contrôle ultérieur.

Conformément à ces décisions éventuelles on partage la taille globale du lot N et le nombre d'articles défectueux D en trois parties :

$$N = N' + N'' + N''', \quad D = D' + D'' + D''', \tag{7.5.8}$$

où N' est le nombre d'articles rejetés sans contrôle parmi lesquels on compte D' articles défectueux, N'' le nombre d'articles vérifiés, D'' le nombre d'articles défectueux décelés au cours de ce contrôle, N''' le nombre d'articles acceptés sans contrôle et D''' le nombre d'articles défectueux acceptés. Dans le cas des plans du type d'échantillonnage simple on connaît les nombres N', N'', N''', D'' et on ne connaît pas D, D', D'''. Le but du présent paragraphe est d'établir la formule des estimations non biaisées pour D, D', D'''. Il est parfois intéressant d'obtenir des estimations non biaisées pour des caractéristiques plus complexes, par exemple, pour les probabilités a priori. Nous renvoyons le lecteur s'intéressant à la question au travail de M. Eidelnant et I. Inamov [17]. Il est utile de noter que lorsque l'on tient compte des résultats du contrôle intégral en adoptant la décision D_2, on doit être sûr que le contrôle du lot a été conduit conformément aux mêmes règles que le contrôle de l'échantillon. Pour s'en convaincre il est utile de comparer les estimations réalisées en tenant compte et en ne tenant pas compte des résultats du contrôle.

Pour simplifier l'écriture nous utiliserons les notations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \Pi_{ND}^{nc} &= \sum_{d=0}^{c} B_{ND}^{nd}, & \Pi_{ND}^{\overline{nc}} &= \sum_{d=c}^{n} B_{ND}^{nd}, \\ M_{ND}^{nc} &= \sum_{d=0}^{c} dB_{ND}^{nd}, & M_{ND}^{\overline{nc}} &= \sum_{d=c}^{n} dB_{ND}^{nd}, \end{aligned}\right\} \tag{7.5.9}$$

où B_{ND}^{nd} s'obtient d'après les formules (7.2.8) et (7.2.9).

Nous commencerons notre exposé par la considération du plan du type $(n, c)_{23}$. La statistique exhaustive est alors, comme cela découle du théorème 7.5.3, de la forme

$$n^* = \begin{cases} n, & d \leqslant c, \\ N, & d > c, \end{cases} \qquad d^* = \begin{cases} d, & d \leqslant c, \\ D, & d > c. \end{cases}$$

Quand on utilise des plans de ce genre il existe une estimation non biaisée $\varphi(d^*)$ pour toute fonction $f(D)$. Conformément à (7.5.2), l'équation pour l'estimation non biaisée est de la forme

$$\sum_{d \leqslant c} \varphi(d) B_{N_c}^{nd} + \varphi(D) \Pi_{ND}^{n, c+1} = f(D), \quad D = 0, 1, \ldots, N. \tag{7.5.10}$$

Portant dans (7.5.10) les valeurs $D = 0, 1, \ldots, c$ et tenant compte du fait que $\Pi_{ND}^{nc} = 1$, quand $D = 0, 1, \ldots, c$ nous obtenons $c + 1$ équations pour trouver $\varphi(0), \ldots, \varphi(c)$. Les équations sont de la forme

$$\sum_{d<c} \varphi(d) B_{Nk}^{nd} = f(k), \quad k = 0, 1, \ldots, c. \qquad (7.5.11)$$

Utilisant ces valeurs de $\varphi(d)$ nous obtenons de (7.5.10) la valeur de $\varphi(D)$:

$$\varphi(D) = \frac{[f(D) - \sum\limits_{d \leqslant c} \varphi(d) B_{ND}^{nd}]}{\Pi_{ND}^{n, c+1}}. \qquad (7.5.12)$$

Ainsi, l'estimation non biaisée existe et est donnée par les formules (7.5.11) et (7.5.12).

Obtenons en qualité de second exemple les estimations non biaisées correspondant à l'utilisation des plans du type $(n, c)_{13}$. Ici $N'' = n$, $D'' = d$, D' et D'' sont des variables aléatoires. Il est intéressant d'obtenir les estimations non biaisées de D' et D'''. En effet, l'estimation non biaisée de D''' permettrait d'estimer le nombre d'articles défectueux acceptés et l'estimation de D', le nombre d'articles conformes rejetés égal à $N' - D'$. Comme $D''' = D - d$, pour $d \leqslant c$ et $D''' = 0$, si $d > c$, on a alors $MD''' = \sum\limits_{d=0}^{c} (D - d) B_{ND}^{nd}$. Conformément à (7.5.3) l'équation $M\varphi''' = MD'''$ de l'estimation non biaisée φ''' est de la forme

$$\sum_{d=0}^{n} \varphi'''(d) B_{ND}^{nd} = \sum_{d=0}^{c} (D - d) B_{ND}^{nd}. \qquad (7.5.13)$$

Or, cette équation est contradictoire, puisqu'il n'existe pas de fonction $\varphi(d)$ vérifiant (7.5.13). Cela découle du fait que B_{ND}^{nd} est un polynôme du n-ième degré par rapport à D (cf. (7.2.8)). En effet, au second membre de (7.5.13) se trouve un polynôme du $n + 1$-ième degré, alors que le premier membre est un polynôme du n-ième degré en D.

On peut obtenir une estimation non biaisée pour D''' dans le cas limite, où le nombre d d'articles défectueux décelés suit une distribution poissonienne. Pour que cela ait lieu, il fallait, d'après les conditions formulées au § 7.2, que $d \ll n \ll N$, $d \ll D \ll N$. Dans ces hypothèses on peut estimer que $B_{ND}^{nd} = p_d(\lambda) = \frac{\lambda^d}{d!} e^{-\lambda}$, où $\lambda = n\left(\frac{D}{N}\right)$. Utilisant la relation évidente $\lambda p_d(\lambda) =$

$= (d + 1)\, p_{d+1}(\lambda)$, nous pouvons écrire (7.5.13) sous la forme

$$\sum_{d=0}^{n} \varphi'''(d)\, p_d(\lambda) = D \sum_{k=0}^{c} p_k(\lambda) = \frac{N}{n}\lambda \sum_{k=0}^{c} p_k(\lambda) =$$

$$= \frac{N}{n} \sum_{d=1}^{c+1} d p_d(\lambda). \qquad (7.5.14)$$

Nous avons utilisé pour cela la condition que $\frac{d}{D} \ll 1$ et omis les termes de la forme $\frac{d}{D}$ en les posant égaux à zéro. Considérant (7.5.14) comme une identité en λ, nous trouvons, en égalant les coefficients de $p_d(\lambda)$ situés au premier et au second membres de (7.5.14), que l'estimation non biaisée de $\varphi'''(d)$ est de la forme

$$\varphi'''(d) = \begin{cases} 0, & d > c+1, \\ \frac{N}{n} d, & d \leqslant c+1. \end{cases} \qquad (7.5.15)$$

On peut aisément se convaincre, en utilisant des raisonnements analogues, que l'estimation non biaisée $\varphi(d)$ de D est de la forme

$$\varphi(d) = \frac{N}{n} d. \qquad (7.5.16)$$

Pour obtenir les limites de confiance lors de l'estimation de l'efficacité du contrôle d'après les résultats du contrôle d'un grand nombre de lots, il nous sera utile d'avoir les estimations non biaisées des variances de ces estimations non biaisées $\varphi(d)$ et $\varphi'''(d)$. Nous avons pour les variances de l'estimation du nombre d'articles défectueux présentés

$$\mathbf{D}[\varphi] = \mathbf{M}\varphi(d)^2 - (\mathbf{M}\varphi(d))^2 = \sum_{d=0}^{\infty} \left(\frac{N}{n}\right)^2 d^2 p_d(\lambda) - \left(\frac{N\lambda}{n}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{N}{n}\right)^2 (\lambda^2 + \lambda) - \left(\frac{N\lambda}{n}\right)^2 = \left(\frac{N}{n}\right)^2 \lambda.$$

Comme l'estimation non biaisée de λ est égale à d, l'estimation non biaisée $\varphi_1(d)$ pour la variance $\mathbf{D}[\varphi]$ est de la forme

$$\varphi_1(d) = \left(\frac{N}{n}\right)^2 d. \qquad (7.5.17)$$

Comme $\varphi'''(d)$ est une estimation non biaisée pour la variable aléatoire D''', il est ici intéressant d'obtenir l'estimation non biaisée

de la variance $D''' - \varphi'''(d)$. Remarquons au préalable que

$$(D''' - \varphi''')^2 = \begin{cases} \left(\frac{N}{n}\right)^2 (\lambda - d)^2, & d \leqslant c, \\ \left(\frac{N}{n}\right)^2 (c+1)^2, & d = c+1, \\ 0, & d > c+1. \end{cases} \tag{7.5.18}$$

Prenant (7.5.18) en considération, nous trouvons que

$$\mathrm{M}\,(D''' - \varphi''')^2 = \left(\frac{N}{n}\right)^2 \left\{\sum_{d=0}^{c} (\lambda - d)^2 p_d(\lambda) + (c+1)^2 p_{c+1}(\lambda)\right\} =$$

$$= \left(\frac{N}{n}\right)^2 \left\{\sum_{d=0}^{c+1} d^2 p_d(\lambda) - 2\lambda \sum_{d=0}^{c} d p_d(\lambda) + \lambda^2 \sum_{d=0}^{c} p_d(\lambda)\right\} =$$

$$= \left(\frac{N}{n}\right)^2 \left\{\lambda \sum_{d=0}^{c} (d+1) p_d(\lambda) - 2\lambda \sum_{d=0}^{c} d p_d(\lambda) + \lambda \sum_{d=0}^{c+1} d p_d(\lambda)\right\} =$$

$$= \left(\frac{N}{n}\right)^2 \left\{\sum_{d=1}^{c+1} d p_d(\lambda) + (c+1)(c+2) p_{c+2}(\lambda)\right\}. \tag{7.5.19}$$

L'équation (7.5.3) est dans notre cas de la forme

$$\sum_{d=0}^{n} \varphi_2(d)\, p_d(\lambda) = \mathrm{M}\,(D''' - \varphi''')^2. \tag{7.5.20}$$

Portant l'expression explicite (7.5.19) dans le second membre (7.5.20) et égalant ensuile les coefficients des fonctions identiques $p_d(\lambda)$, nous trouvons que

$$\varphi_2(d) = \begin{cases} \left(\frac{N}{n}\right)^2 d, & d \leqslant c+1, \\ \left(\frac{N}{n}\right)^2 (c+1)\ (c+2), & d = c+2, \\ 0, & d > c+2, \end{cases} \tag{7.5.21}$$

est une estimation non biaisée de la variance $\mathrm{D}\,[(D''' - \varphi'''(d)]$.

Estimation de l'efficacité du contrôle d'échantillonnage. Utilisons les estimations non biaisées obtenues pour élucider l'efficacité du contrôle d'acceptation. Supposons que l'on présente au contrôle des lots de taille N_i, $i = 1, \ldots, m$; $m \gg 1$. Pour contrôler le i-ième lot on a utilisé le plan $(n_i, c_i)_{13}$, et le nombre d'articles défectueux décelés s'est avéré égal à d_i. Désignons par D_i le nombre inconnu d'articles défectueux contenus dans le i-ième lot et par D_i''' le nombre d'articles défectueux dans la partie acceptée du lot. Les estimations non biaisées du nombre global d'articles défectueux

présentés, égal à $\sum_{i=1}^{m} D_i$, et du nombre global d'articles défectueux acceptés, égal à $\sum_{i=1}^{m} D_i'''$, sont respectivement, en vertu de (7.5.15) et (7.5.16),

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(d_i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} \varphi'''(d_i). \tag{7.5.22}$$

Comme $\sum_{i=1}^{m} \varphi(d_i)$ possède pour de grandes valeurs de m une distribution proche de la distribution normale de moyenne $\sum_{i=1}^{m} D_i$ et de variance $\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{N_i}{n_i}\right)^2 \lambda_i$, où $\lambda_i = \left(\frac{D_i}{N_i}\right) n_i$, alors avec une probabilité proche de $1-\alpha$ on a

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(d_i) - u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{N_i}{n_i}\right)^2 \lambda_i} < \sum_{i=1}^{m} D_i < \\ < \sum_{i=1}^{m} \varphi(d_i) + u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{N_i}{n_i}\right)^2 \lambda_i}, \tag{7.5.23}$$

où $u_{\frac{\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la distribution normale $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \int_{u_{\frac{\alpha}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\alpha}{2}$. Les valeurs exactes des variances $\left(\frac{N_i}{n_i}\right) \lambda_i$ nous sont inconnues, alors, en les remplaçant par leurs estimations (7.5.17), nous obtenons que pour de grandes valeurs de m avec une probabilité proche de $1-\alpha$ on a

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(d_i) - u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \varphi_1(d_i)} \leqslant \sum_{i=1}^{m} D_i \leqslant \\ \leqslant \sum_{i=1}^{m} \varphi(d_i) + u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \varphi_1(d_i)}. \tag{7.5.24}$$

On peut utiliser des raisonnements analogues pour l'estimation du nombre global d'articles défectueux. Ici la variance de l'écart de

$\sum_{i=1}^{m} \varphi'''(d_i)$ de la valeur $\sum_{i=1}^{m} D_i'''$ est égale à la somme des termes de la forme (7.5.19). Remplaçant les variances $\mathrm{D}[\varphi'''(d_i) - D_i''']$ par les estimations $\varphi_2(d_i)$ trouvées d'après la formule (7.5.21), nous obtenons qu'avec une probabilité proche de $1-\alpha$ on a

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi'''(d_i) - u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \varphi_2(d_i)} \leqslant \sum_{i=1}^{m} D_i''' \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \varphi'''(d_i) + u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \varphi_2(d_i)}. \qquad (7.5.25)$$

On peut juger de l'efficacité du contrôle en comparant le taux q_{ent} d'articles défectueux dans la production présentée au contrôle avec le taux q_{sor} d'articles défectueux dans la production acceptée. Conformément aux estimations (7.5.22) nous avons

$$q_{\text{ent}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} D_i}{\sum_{i=1}^{m} N_i} \approx \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi(d_i)}{\sum_{i=1}^{m} N_i}, \quad q_{\text{sor}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} D_i'''}{\sum_{i=1}^{m} N_i'''} \approx \frac{\sum_{i=1}^{m} \varphi'''(d_i)}{\sum_{i=1}^{m} N_i'''}. \qquad (7.5.26)$$

On peut représenter graphiquement le déroulement du contrôle. L'allure approximative du graphique est montrée sur la figure 7.5.1. On porte sur l'axe des ordonnées le numéro des lots. Sur le demi-axe positif des abscisses on porte les valeurs des estimations $\sum_{i=1}^{m} \varphi(d_i)$, et plus bas $\sum_{i=1}^{m} \varphi'''(d_i)$. Les domaines hachurés sont construits en utilisant les formules (7.5.24), (7.5.25) pour les valeurs $\alpha = 0{,}1$. Le long du demi-axe négatif des ordonnées on a indiqué en pointillé les valeurs du nombre global d'articles présentés au contrôle égal à $\sum_{i=1}^{m} N_i$, et par des points, les valeurs du nombre d'articles acceptés égal à $\sum_{i=1}^{m} N_i'''$. Pour représenter graphiquement l'efficacité du contrôle on peut également utiliser la méthode de la moyenne mouvante. Cette méthode permet d'après l'obtention des résultats du contrôle du k-ième lot de tenir compte des résultats du contrôle uniquement d'après les M lots précédents ; le nombre M est chaque fois identique. On calcule alors, en vertu des formules (7.5.26), après le contrôle du

m-ième lot les estimations

$$\left.\begin{aligned} q_{\text{ent}}^{(m)} &\approx \frac{\sum\limits_{i=m-M}^{m} \varphi(d_i)}{\sum\limits_{i=m-M}^{m} N_i}, \\ q_{\text{sor}}^{(m)} &\approx \frac{\sum\limits_{i=m-M}^{m} \varphi'''(d_i)}{\sum\limits_{i=m-M}^{m} N_i'''}. \end{aligned}\right\} \tag{7.5.27}$$

Les graphiques de ces estimations sont montrés sur la figure 7.5.2. Les limites supérieures et inférieures des bandes hachurées sont

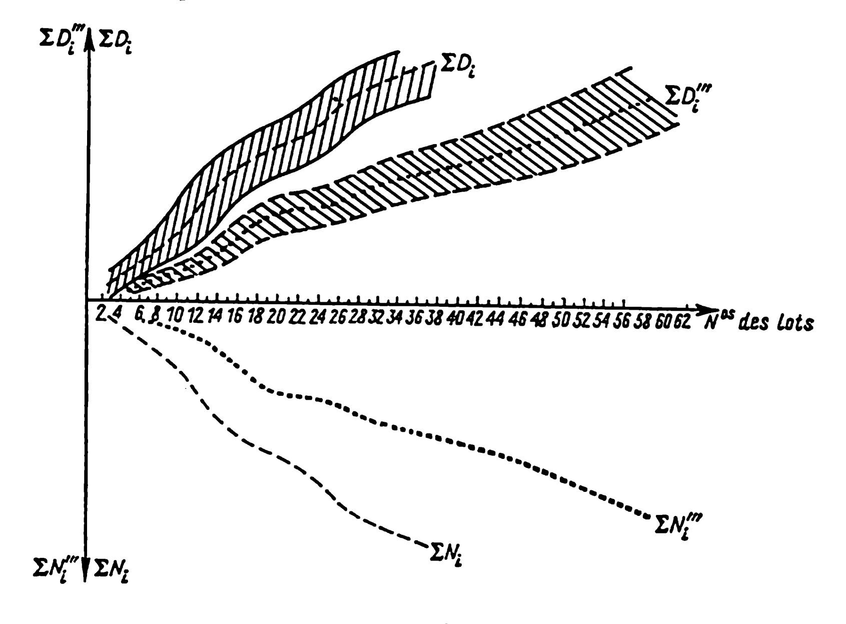


Fig. 7.5.1

obtenues en utilisant dans (7.5.27) les premiers et les seconds membres des inégalités (7.5.24) et (7.5.25) pour $\alpha=0$, 1. La valeur de M ne doit pas être très grande, car pour les grandes valeurs de M les conclusions d'une diminution de l'efficacité du contrôle deviennent moins opérationnelles. D'autre part, les valeurs de M ne doivent pas être trop petites, car dans ce cas les estimations seront grossières. Tout dépend fortement des valeurs concrètes de N_i, n_i, D_i, d_i, dont il est très difficile de tenir compte analytiquement. Nous recommandons à cette fin la méthode de simulation statistique (méthode de Monte-Carlo).

Estimations non biaisées pour les plans du type (n, c, c'). Nous avons considéré plus haut les estimations non biaisées pour l'approximation poissonienne. Introduisons maintenant les formules pour les estimations non biaisées dans le cas général de l'utilisation des plans du type d'échantillonnage simple. Les résultats que nous allons

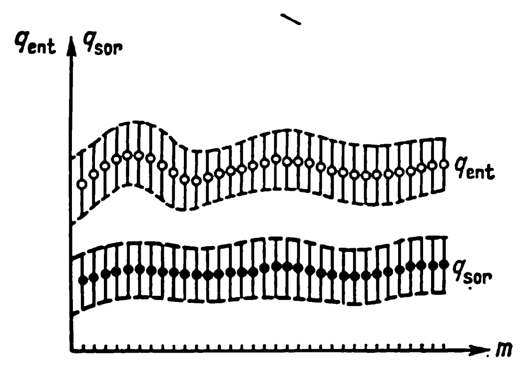


Fig. 7.5.2

exposer ont été obtenus par S. Sirajdinov et M. Eidelnant [2]. Supposons que l'on utilise un plan du type d'échantillonnage simple avec un nombre d'acceptation c et un nombre de rejet $c' \geqslant c$; nous le désignerons succinctement par (n, c, c'). L'application de ce plan signifie que l'on prélève au hasard n articles du lot ; si le nombre $d = d(n)$ d'articles défectueux décelés est tel que $d \leqslant c$, alors on adopte la partie restante du lot sans contrôle ultérieur (décision D_3), si $c < d < c'$, alors on adopte la décision D_2, et enfin, si $d \geqslant c'$, alors on adopte la décision D_1. Les plans de ce genre peuvent trouver une application quand le coût du contrôle est relativement élevé. On peut les considérer comme une généralisation des plans du type $(n, c)_{ij}$ considérés au § 7.2. En effet, $(n, c)_{12} = (n, k, k')$ si $k = -1$, $k' = c$; $(n, c)_{13} = (n, k, k')$ si $k = c$, $k' = c + 1$; $(n, c)_{23} = (n, k, k')$ si $k = c$, $k' = n + 1$. On a rapporté dans la table 7.5.1 les données relatives aux valeurs de N', N'', N''', D', D'', D'''.

Comme il découle du théorème 7.5.3 la statistique exhaustive est le nombre décelé d'articles défectueux D''. Notre problème consiste à établir des formules pour les estimations non biaisées $\varphi'(D'')$ et $\varphi'''(D'')$ des variables aléatoires D' et D'''. On peut obtenir une estimation non biaisée $\varphi(D'')$ pour D à partir de la relation

$$\varphi(D'') = \varphi'(D'') + D'' + \varphi'''(D''). \tag{7.5.28}$$

Les estimations non biaisées pour D, D', D''', vérifiant l'égalité (7.5.28), sont dites concertées. Comme il n'est pas difficile d'établir la formule pour les estimations non biaisées, nous ne le ferons que

pour $\varphi'(D'')$. Ici D' est une variable aléatoire dont l'espérance mathématique est

$$MD' = \sum_{d=c'}^{n} (D-d)\, B_{ND}^{nd}.$$

Table 7.5.1

Nombre d'articles qui, d'après les résultats du contrôle,		
sont rejetés sans contrôle ultérieur	sont contrôlés à 100%	sont acceptés sans contrôle
$N' = \begin{cases} 0, & d < c' \\ N-n, & d \geqslant c' \end{cases}$	$N'' = \begin{cases} n, & d \leqslant c \text{ ou } d \geqslant c' \\ N, & c < d < c' \end{cases}$	$N''' = \begin{cases} N-n, & d \leqslant c \\ 0, & d > c \end{cases}$
$D' = \begin{cases} 0, & d < c' \\ D-d, & d \geqslant c' \end{cases}$	$D'' = \begin{cases} d, & d \leqslant c \text{ ou } d \geqslant c' \\ D, & c < d < c' \end{cases}$	$D''' = \begin{cases} D-d, & d \leqslant c \\ 0, & d > c \end{cases}$

C'est pourquoi l'équation (7.5.3) est de la forme

$$\sum_{d=0}^{n} \varphi'(D'')\, B_{ND}^{nd} = \sum_{d=c'}^{n} (D-d)\, B_{ND}^{nd}. \qquad (7.5.29)$$

Tenant compte de la valeur de D'' (d'après la table 7.5.1), nous pouvons écrire l'équation (7.5.29) sous la forme

$$\sum_{d=0}^{c} \varphi'(d)\, B_{ND}^{nd} + \sum_{c<d<c'} \varphi'(D)\, B_{ND}^{nd} + \sum_{d=c'}^{n} \varphi'(d)\, B_{ND}^{nd} = \sum_{d=c'}^{n} (D-d)\, B_{ND}^{nd}. \qquad (7.5.30)$$

$\varphi'(d)$ doit vérifier cette équation pour $D = 0, 1, \ldots, N$. Comme il découle de la formule (7.2.8), le second membre est un polynôme du $(n+1)$-ième degré en D. Le premier membre est aussi un polynôme du $(n+1)$-ième degré si l'on estime que $\varphi(D) = aD + b$. Nous pouvons ainsi résoudre cette équation en égalant les coefficients des puissances identiques de D. Il est encore plus simple d'obtenir la solution en posant successivement $D = 0, 1, \ldots, N$. Si $D = 0, \ldots, c$, alors $B_{ND}^{nd} = 0$, $d > c$, c'est pourquoi nous obtenons de (7.5.30) que $\varphi'(d) = 0$, $d \leqslant c$. Posant ensuite $D = N$ nous trouvons que $\varphi'(n) = \left(\frac{N-n}{n}\right) n$; quand $D = N-1$ nous avons $\varphi'(n-1) = \left(\frac{N-n}{n}\right)(n-1)$, etc., quand $D = N-2, \ldots, N-$

$-n-c'+1$, $\varphi'(d)=\frac{N-n}{n}d$, si seulement $d\geqslant c'$. Portant les résultats obtenus dans (7.5.30) nous trouvons

$$\varphi'(D)\sum_{c<d<c'}B_{ND}^{nd}+\frac{N-n}{n}M_{ND}^{nc'}=D\Pi_{ND}^{nc'}-M_{ND}^{nc'}.$$

Nous obtenons de cette équation que

$$\varphi'(D)=\frac{D\Pi_{ND}^{nc'}-\frac{N}{n}M_{ND}^{nc'}}{\Pi_{ND}^{nc'-1}-\Pi_{ND}^{nc}}.$$

Nous trouvons exactement de la même façon l'estimation non biaisée $\varphi''(D'')$, puis, en utilisant la formule (7.5.28), l'estimation non biaisée $\varphi(D'')$. Les formules obtenues sont présentées dans la table 7.5.2.

Table 7.5.2

d	D''	$\varphi'(D'')$	$\varphi'''(D'')$	D
$d\leqslant c$	d	0	$\frac{N-n}{n}d$	$\frac{N}{n}d$
$c<d<c'$	D	$\frac{D\Pi_{ND}^{nc'}-\left(\frac{N}{n}\right)M_{ND}^{nc'}}{\Pi_{ND}^{nc'-1}-\Pi_{ND}^{nc}}$	$\frac{D\Pi_{ND}^{nc}-\left(\frac{N}{n}\right)M_{ND}^{nc}}{\Pi_{ND}^{nc'-1}-\Pi_{ND}^{nc}}$	$\left(\frac{N}{n}\right)\frac{M_{ND}^{nc'-1}-M_{ND}^{nc}}{\Pi_{ND}^{nc'-1}-\Pi_{ND}^{nc}}$
$d\geqslant c'$	d	$\frac{N-n}{n}d$	0	$\frac{N}{n}d$

Règle de contrôle du $(n+1)$-ième article. Il n'est pas commode d'utiliser les estimations obtenues, car le calcul les fonctions Π_{ND}^{nc}, M_{ND}^{nc} présente des difficultés notables. On peut toutefois utiliser la règle de contrôle du $(n+1)$-ième article, proposée dans le travail de S. Sirajdinov et M. Eidelnant [2], pour obtenir des formules très simples pour les estimations non biaisées. La règle de contrôle du $(n+1)$-ième article lors de l'utilisation d'un plan du type (n, c, c') consiste en ce qui suit. D'après les résultats du contrôle de n articles on adopte une décision conformément au plan (n, c, c'). Toutefois, s'il s'avère que $d\leqslant c$ ou $d\geqslant c'$, on effectue le contrôle du $(n+1)$-ième article. Les résultats du contrôle du $(n+1)$-ième article n'influent pas sur la décision déjà prise, mais ils sont utilisés pour construire les estimations non biaisées. Soit d' le nombre global d'articles défectueux, compte tenu des résultats du contrôle du $(n+1)$-ième article. Nous avons ainsi $d'=d+\varepsilon_{n+1}$, où $\varepsilon_{n+1}=1$ si le

$(n+1)$-ième article est défectueux et $\varepsilon_{n+1} = 0$ s'il est conforme. Lors de l'utilisation de la règle du $(n+1)$-ième article on a

$$N' = \begin{cases} 0 & d < c', \\ N-n-1, & d \geqslant c', \end{cases} \quad N'' = \begin{cases} n+1, & d \leqslant c \text{ ou } d \geqslant c', \\ N, & c < d < c', \end{cases}$$

$$N''' = \begin{cases} N-n-1, & d \leqslant c, \\ 0, & d > c. \end{cases}$$

Conformément au théorème 7.5.3, la statistique exhaustive est de la forme (D'', N''), où

$$D'' = \begin{cases} d', & \text{si } c' \leqslant d \text{ ou } d \leqslant c, \\ D, & \text{si } c < d < c'. \end{cases}$$

Remarquons que $D'' = d' = c+1$ si et seulement si $d(n) = c$, $\varepsilon_{n+1} = 1$; respectivement $D'' = d' = c'$ si et seulement si $d(n) = c'$, $\varepsilon_{n+1} = 0$. Lors de l'établissement des formules pour les estimations non biaisées il est bon d'utiliser les identités

$$\begin{aligned} \sum_{d=0}^{c} (D-d)\, B_{ND}^{nd} &= \frac{N-n}{n+1} \sum_{d'=0}^{c+1} d' B_{ND}^{n+1,\, d'}, \\ \sum_{d=c'}^{n} (D-d)\, B_{ND}^{nd} &= \frac{N-n}{n+1} \sum_{d'=c'+1}^{n+1} d' B_{ND}^{n+1,\, d'}. \end{aligned} \tag{7.5.31}$$

Les identités (7.5.31) sont une conséquence simple de l'identité aisément vérifiable

$$(D-d)\, B_{ND}^{nd} = \frac{N-n}{n+1} (d+1)\, B_{ND}^{n+1,\, d+1}. \tag{7.5.32}$$

Les nombres D', D'', D''' lors de l'utilisation de la règle de contrôle du $(n+1)$-ième article se distinguent des valeurs de la table (7.5.2). Admettant que les résultats du contrôle du $(n+1)$-ième article ne sont pas pris en considération (en particulier, si $\varepsilon_{n+1} = 1$, cet article défectueux entre de toute manière dans la production acceptée), on peut trouver les estimations non biaisées φ' et φ''. Remarquons toutefois que le nombre réel D''' d'articles acceptés ou D' d'articles défectueux rejetés sera exprimé par la relation

$$\widetilde{D}^{\omega} = \max(0, D^{\omega} - \varepsilon_{n+1}), \quad \omega = {}', {}'''. \tag{7.5.33}$$

Si l'estimation non biaisée de D^{ω} est trouvée et est égale à φ^{ω}, alors on peut, en vertu de (7.5.33), utiliser en qualité d'estimation de $\widetilde{D}^{\omega}$

$$\widetilde{\varphi}^{\omega} = \max[0, \varphi^{\omega} - \varepsilon_{n+1}], \quad \omega = {}', {}'''. \tag{7.5.34}$$

Une telle estimation sera en général biaisée *, mais le biais par rap-

* $\widetilde{\varphi}^{\omega}$ reste non biaisée sous la condition $D > n$.

port à $\mathbf{M}\widetilde{D}^{\omega}$ est faible. Nous nous bornerons à établir la formule pour φ'''. L'équation $\mathbf{M}\varphi''' = \mathbf{M}D'''$ est de la forme

$$\sum_{\substack{d\leq c\\ d\geq c'}} \sum_{\varepsilon_{n+1}} \varphi'''(d+\varepsilon_{n+1}) B_{ND}^{nd} B_{N-n,\ D-d}^{1,\ \varepsilon} +$$

$$+\varphi'''(D) \sum_{c<d<c'} B_{ND}^{nd} = \sum_{d=0}^{c} (D-d) B_{ND}^{nd}. \qquad (7.5.35)$$

Remarquant que $B_{N-n,\ D-d}^{1,\ 0} = \frac{N-n-(D-d)}{N-n}$, $B_{N-n,\ D-d}^{1,\ 1} = \frac{D-d}{N-n}$, $B_{ND}^{nd}\frac{D-d}{N-n} = \frac{d+1}{n+1} B_{ND}^{n+1,\ d+1}$, $B_{ND}^{nd}\frac{N-n-(D-d)}{N-n} = \frac{n+1-d}{n+1} B_{ND}^{n+1,\ d}$ et tenant compte de (7.5.31), nous pouvons écrire (7.5.35) sous la forme

$$\sum_{d'\leq c} \varphi'''(d') B_{ND}^{n+1,\ d'} + \frac{c+1}{n+1}\varphi'''(c+1) B_{ND}^{n+1,\ c+1} +$$

$$+\varphi'''(D) \sum_{c<d<c'} B_{ND}^{nd} + \varphi'''(c')\frac{n+1-c'}{n+1} B_{ND}^{n+1,\ c'} +$$

$$+\sum_{d'\geq c'+1} \varphi'''(d') B_{ND}^{n+1,\ d'} = \frac{N-n}{n+1}\sum_{d'=0}^{c+1} d' B_{ND}^{n+1,\ d'}. \qquad (7.5.36)$$

Il existe de nombreuses solutions de l'équation (7.5.36). Il est naturel de supposer que $\varphi'''(D) = 0$. Sous cette hypothèse on peut aisément obtenir la solution de (7.5.36) en égalant les coefficients de $B_{ND}^{n+1,\ d'}$ du premier et du second membre de (7.5.36). Le résultat définitif est donné par les formules

$$\varphi'''(d') = \begin{cases} \frac{N-n}{n+1} d', & d' < c+1, \\ N-n, & d' = d+1 = c+1, \\ 0, & d' > c+1. \end{cases} \qquad (7.5.37)$$

Nous obtenons de (7.5.34) et (7.5.37)

$$\widetilde{\varphi}'''(d') = \begin{cases} \frac{N-n}{n+1} d', & d' = d < c+1, \\ \frac{N-n}{n+1} d' - 1, & d' = d+1 < c+1, \\ N-n-1, & d' = d+1 = c+1, \\ 0, & d' > c+1. \end{cases} \qquad (7.5.38)$$

On peut trouver de même les expressions des estimations φ' et $\tilde{\varphi}'$. Nous avons ici

$$\varphi'(d') = \begin{cases} \dfrac{N-n}{n+1} d', & d' \geqslant c'+1, \\ 0, & d' \leqslant c', \end{cases} \tag{7.5.39}$$

$$\tilde{\varphi}'(d') = \begin{cases} \dfrac{N-n}{n+1} d', & d' = d \geqslant c'+1, \\ \dfrac{N-n}{n+1} d' - 1, & d' = d+1 \geqslant c'+1, \\ 0, & d' \leqslant c'. \end{cases} \tag{7.5.40}$$

Estimations non biaisées pour les plans $(n,\ c)_{ij}$. Partant des résultats obtenus, donnons les formules pour les estimations non biaisées D, D', D''' lors de l'utilisation des plans du type $(n,\ c)_{ij}$.

Plan $(n,\ c)_{12}$. Comme $(n,\ c)_{12} = (n,\ k,\ k')$, $k = -1$, $k' = c+1$, nous trouvons de la table 7.5.2 que

$$\varphi'(D'') = \begin{cases} \dfrac{D\Pi^{n,\,c+1}_{ND} - \binom{N}{n} M^{nc+1}_{ND}}{\Pi^{nc}_{ND}}, & d \leqslant c, \\ \dfrac{N-n}{n} d, & d > c. \end{cases} \tag{7.5.41}$$

Le problème du calcul de l'estimation $\varphi'''(D'')$ ne se pose plus, car $D''' \equiv 0$. En utilisant la règle du $(n+1)$-ième article nous trouvons de (7.5.40) que l'estimation de $\tilde{D}'$ est de la forme

$$\tilde{\varphi}'(d') = \begin{cases} 0, & d' \leqslant c+1, \\ \dfrac{N-n}{n+1} d', & d' = d \geqslant c+2, \\ \dfrac{N-n}{n+1} d' - 1, & d' = d+1 \geqslant c+2. \end{cases} \tag{7.5.42}$$

On peut également, sans avoir recours à la règle de contrôle du $(n+1)$-ième article, utiliser une estimation non biaisée plus simple

$$\varphi'(d,\ D) = \begin{cases} N\dfrac{d}{n} - D, & d \leqslant c. \\ \dfrac{N-n}{n} d, & d > c. \end{cases} \tag{7.5.43}$$

Il est souligné dans [2] que cette estimation est moins précise que les estimations (7.5.41), (7.5.42).

Plan $(n,\ c)_{23}$. Pour les plans de ce type on a $D' = 0$, de sorte que seule l'obtention de l'estimation de D''' présente un certain intérêt. Remarquant que $(n,\ c)_{23} = (n,\ k,\ k')$, $k = c$, $k' = n+1$, nous

obtenons des formules de la table 7.5.2 que

$$\varphi''(D'') = \begin{cases} \dfrac{N-n}{n} d, & d \leqslant c, \\ \dfrac{D\Pi^{nc}_{ND} - \dfrac{N}{n} M^{nc}_{ND}}{\Pi^{n,\,c+1}_{ND}}, & d > c. \end{cases} \tag{7.5.44}$$

En utilisant la règle de contrôle du $(n+1)$-ième article nous trouvons de (7.5.38) que l'estimation de $\tilde{D}''$ est de la forme

$$\tilde{\varphi}''(d') = \begin{cases} \dfrac{N-n}{n+1} d', & d' = d < c+1, \\ \dfrac{N-n}{n+1} d' - 1, & d' = d+1 < c+1, \\ N-n-1, & d' = d+1 = c+1, \\ 0, & d' > c+1. \end{cases} \tag{7.5.45}$$

Il existe également une estimation moins précise

$$\varphi''(d, D) = \begin{cases} \dfrac{N-n}{n} d, & d \leqslant c, \\ \dfrac{N}{n} d - D, & d > c. \end{cases} \tag{7.5.46}$$

Plan $(n, c)_{13}$. Lors de l'utilisation des plans du type $(n, c)_{13}$ on n'effectue pas le contrôle à 100 %. Cela réduit fortement l'information relative au taux d'articles défectueux dans les lots. On peut montrer que lors de l'utilisation des plans $(n, c)_{13}$ il n'existe pas d'estimations non biaisées de D' et D''. On peut toutefois utiliser ici avec succès la règle de contrôle du $(n+1)$-ième article. Nous rapportons plus bas les expressions pour les estimations de D' et D'' obtenues par une méthode analogue à celle employée pour établir les formules (7.5.38), (7.5.40).

$$\tilde{\varphi}'(d') = \begin{cases} 0, & d' \leqslant c+1, \\ \dfrac{N-n}{n+1} d', & d' = d \geqslant c+2, \\ \dfrac{N-n}{n+1} d' - 1, & d' = d+1 \geqslant c+2. \end{cases} \tag{7.5.47}$$

$$\tilde{\varphi}''(d') = \begin{cases} \dfrac{N-n}{n+1} d', & d' = d < c+1, \\ \dfrac{N-n}{n+1} d' - 1, & d' = d+1 < c+1, \\ N-n-1, & d' = d+1 = c+1, \\ 0, & d' > c+1. \end{cases} \tag{7.5.48}$$

Construction des estimations non biaisées pour les plans du type d'échantillonnage double. Considérons en conclusion de ce paragraphe certaines questions liées à la construction des estimations non biaisées

pour les cas d'utilisation des plans du type d'échantillonnage double. Dans la littérature technique américaine spécialisée dans les questions de fiabilité [18] on rencontre fréquemment des recommandations suivant lesquelles les estimations non biaisées pour D doivent être construites d'après le premier échantillon. De telles recommandations partent, semble-t-il, de la simplicité de la formule (7.5.16) d'après laquelle cette estimation est calculée. Toutefois, la statistique exhaustive ne coïncide pas avec le nombre d d'articles défectueux décelés dans le premier échantillon. Dans le cas, où le volume de la production contrôlée est faible, il est désirable, pour obtenir des estimations plus exactes, de tenir compte des résultats du contrôle du second échantillon. Malheureusement jusqu'aujourd'hui les questions de la construction des estimations non biaisées pour les cas d'utilisation des plans du type d'échantillonnage double n'ont pas encore été étudiées. On ne dispose pas non plus d'estimations pour le gain éventuel en précision lors d'une utilisation plus complète de l'information relative aux résultats du contrôle. Il semble que l'une des raisons de cette stagnation réside dans la complexité de l'établissement des formules correspondantes. Du point de vue des méthodes, on ne rencontre aucune difficulté de principe. On peut établir les formules correspondantes d'une manière entièrement analogue à celle que nous venons d'exposer. A titre d'exemple nous nous bornerons au cas d'utilisation du plan du type d'échantillonnage double $(n_1, n_2, c_1, c_2)_{1313}$. La statistique exhaustive (N'', D'') est de la forme

$$N'' = \begin{cases} n_1, & d_1 > c_2 \text{ ou } d_1 \leqslant c_1, \\ n_1 + n_2, & c_1 < d_1 \leqslant c_2, \end{cases}$$

$$D'' = \begin{cases} d_1, & d_1 > c_2 \text{ ou } d_1 \leqslant c_1, \\ d_1 + d_2, & c_1 < d_1 \leqslant c_2, \end{cases}$$

où d_i est le nombre d'articles défectueux décelés dans le i-ième échantillon. On peut écrire des relations analogues pour N', N''', D', D'''. Conformément à (7.5.2) et (7.5.3) les formules des estimations non biaisées seront de la forme

$$\mathrm{M}\varphi = D, \qquad \mathrm{M}\varphi' = \mathrm{M}D', \qquad \mathrm{M}\varphi''' = \mathrm{M}D'''. \tag{7.5.49}$$

Si l'on recherche les estimations non biaisées dans la classe des fonctions dépendant uniquement de N'' et D'', c'est-à-dire du nombre d'articles contrôlés et d'articles défectueux décelés, on a alors pour l'estimation non biaisée de φ, en explicitant la formule de gauche de (7.5.49),

$$\sum_{d_1 \leqslant c_1,\ d_1 > c_2} \varphi(d_1, 1) B_{ND}^{n_1 d_1} + \sum_{d_1 = c_1 + 1}^{c_2} \sum_{d_2 = 0}^{n_2} \varphi(d_1 + d_2, 2) B_{ND}^{n_1 d_1} B_{N - n_1,\, D - d_1}^{n_2 d_2} = D. \tag{7.5.50}$$

Ici $\varphi(d, 1)$ correspond au cas, où l'on ne contrôle que le premier échantillon, et $\varphi(d, 2)$ au cas, où l'on contrôle les deux échantillons. Cette relation doit être vérifiée pour tout $D = 0, 1, \ldots, N$. Le premier membre est un polynôme de degré $(n_1 + n_2)$ en D, et le second membre est égal à D, de sorte que l'on peut, en égalant les coefficients des puissances identiques de D dans les premier et second membres de (7.5.3), former $n_1 + n_2 + 1$ équations pour trouver autant d'inconnues $\varphi(d, 1)$ et $\varphi(d, 2)$. Le nombre des valeurs de $\varphi(d, 1)$ est $n_1 - (c_2 - c_1) + 1$ et celui de $\varphi(d, 2)$ est $n_2 + (c_2 - c_1)$. Notons que pour résoudre (7.4.50) il est plus simple d'utiliser le procédé de choix des valeurs particulières de D. Posant tout d'abord $D = 0, \ldots, c$, puis $D = N, N-1, \ldots, N-(n_1 - c_2)+1$, nous trouvons toutes les valeurs de $\varphi(d, 1)$:

$$\varphi(d, 1) = \frac{N}{n} d, \quad d_1 = d \leqslant c \text{ ou } d_1 = d > c_2. \tag{7.5.51}$$

On peut trouver ensuite les valeurs de $\varphi(d, 2)$, en posant dans (7.5.50) $D = c_1 + 1, c_1 + 2, \ldots$ Le système d'équations ainsi obtenu possède une matrice triangulaire des coefficients des inconnues $\varphi(d, 2)$, $d = c_1 + 1, \ldots, n_2 + (c_2 - c_1)$. Cela permet d'algorithmiser le processus de calcul en trouvant successivement les valeurs de $\varphi(d, 2)$.

Si l'on procède de la même manière pour construire les estimations non biaisées $\varphi'(d, i)$ et $\varphi''(d, i)$, on peut écrire le premier membre de $\mathbf{M}\varphi' = \mathbf{M}D'$, $\mathbf{M}\varphi'' = \mathbf{M}D''$ d'une manière analogue à (7.5.50) et dans le second membre remplacer D par

$$\mathbf{M}D' = \sum_{d_1 > c_2} (D - d_1) B_{ND}^{n_1 d_1} + \sum_{d_1 = c_1 + 1}^{c_2} \sum_{d_2 = c_2 - d_1 + 1}^{n_2} [D - (d_1 + d_2)] B_{ND}^{n_1 d_1} B_{N-n_1, D-d_1}^{n_2 d_2}, \tag{7.5.52}$$

$$\mathbf{M}D'' = \sum_{d_1 = 0}^{c_1} (D - d_1) B_{ND}^{n d_1} + \sum_{d_1 = c_1 + 1}^{c_2} \sum_{d_2 = 0}^{c_2 - d_1} [D - (d_1 + d_2)] B_{ND}^{n_1 d_1} B_{N-n_1, D-d_1}^{n_2 d_2}. \tag{7.5.53}$$

Il découle de (7.2.8), (7.5.52) et (7.5.53) que $\mathbf{M}D'$ et $\mathbf{M}D''$ sont des polynômes du $(n_1 + n_2 + 1)$-ième degré en D, alors que $\mathbf{M}\varphi'$ et $\mathbf{M}\varphi''$ sont des polynômes de degré $(n_1 + n_2)$ en D. Ainsi, la seconde et la troisième des équations (7.5.49) ne possèdent pas de solutions indépendantes de D et les vérifiant pour toutes valeurs $D = 0, 1, \ldots, N$. Cela nous conduit à la nécessité d'élever d'une unité le degré des polynômes exprimant $\mathbf{M}\varphi'$ et $\mathbf{M}\varphi''$. On peut y parvenir de différentes façons. L'un des procédés les plus économiques est la règle de vérification du $(n_1 + n_2 + 1)$-ième article. Appliquée au plan $(n_1, n_2, c_1, c_2)_{1313}$, cette règle signifie que l'on adopte une

décision comme si les essais étaient conduits d'après le plan $(n_1, n_2, c_1, c_2)_{1313}$. Toutefois, quand $c_1 < d \leqslant c_2$, après avoir contrôlé le second échantillon et adopté la décision adéquate, on vérifie encore un article, le $(n_1 + n_2 + 1)$-ième. Soulignons que le résultat du contrôle du $(n_1 + n_2 + 1)$-ième article n'influe pas sur la décision déjà adoptée.

Nous écrirons $\varepsilon = 0$ si le $(n_1 + n_2 + 1)$-ième article est conforme, et $\varepsilon = 1$ s'il est défectueux. Il découle du théorème 7.5.3 que la statistique exhaustive est (d_1, n_1) si $c_2 < d_1$ ou $d_1 \leqslant c_1$, et $(d_1 + d_2 + \varepsilon, n_1 + n_2 + 1)$ si $c_1 < d_1 \leqslant c_2$. Comme les valeurs de n_1 et n_2 nous sont connues avant le contrôle, l'expression équivalente sera le couple $(d_1 + d_2 + \varepsilon, 2)$ si $c_1 < d_1 \leqslant c_2$, et le couple $(d_1, 1)$ dans le cas contraire. Les valeurs $\widetilde{D}'$ et $\widetilde{D}''$ correspondant au cas d'utilisation de la règle de contrôle du $(n_1 + n_2 + 1)$-ième article sont rapportées dans la table 7.5.3.

Table 7.5.3

d_1	$\widetilde{D}'$	$\widetilde{D}'''$
$d_1 \leqslant c_1$	0	$D - d_1$
$c_1 < d_1 \leqslant c_2$ $d_1 + d_2 \leqslant c_2$	0	$D - (d_1 + d_2)$
$c_1 < d_1 \leqslant c_2$ $d_1 + d_2 > c_2$	$D - (d_1 + d_2)$	0
$d_1 > c_1$	$D - d_1$	0

Conformément aux valeurs de la table 7.5.3 les seconds membres des équations $\mathrm{M}\varphi' = \mathrm{M}D'$ et $\mathrm{M}\varphi'' = \mathrm{M}D''$ sont de la forme

$$\mathrm{M}D' = \sum_{d_1=c_2+1}^{n_1} (D - d_1) B_{ND}^{n_1 d_1} + \\ + \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} \sum_{d_2=c-d_1+1}^{n_2} [D - (d_1 + d_2)] B_{ND}^{n_1 d_1} B_{N-n_1,\, D-d_1}^{n_2 d_2} B(\varepsilon), \quad (7.5.54)$$

$$\mathrm{M}D'' = \sum_{d_1=0}^{c_1} (D - d_1) B_{ND}^{n_1 d_1} + \\ + \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} \sum_{d_2=0}^{c_2-d_1} [D - (d_1 + d_2)] B_{ND}^{n_1 d_1} B_{N-n_1,\, D-d_1}^{n_2 d_2}. \quad (7.5.55)$$

Les premiers membres des équations $M\varphi' = MD'$ et $M\varphi''' = MD'''$ s'écrivent conformément à la règle du contrôle du $(n_1 + n_2 + 1)$-ième article sous la forme

$$M\varphi^{\omega} = \sum_{d_1 \leqslant c_1,\ d_1 > c_2} \varphi^{\omega}(d_1, 1) B_{ND}^{n_1 d_1} +$$

$$+ \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} \sum_{d_2=0}^{n_2} \sum_{\varepsilon=0,\ 1} \varphi^{\omega}(d_1 + d_2 + \varepsilon, 2) B_{ND}^{n_1 d_1} B_{N-n_1,\ D-d_1}^{n_2 d_2} B(\varepsilon), \qquad (7.5.56)$$

où $B(\varepsilon) = B_{N-(n_1+n_2),\ D-(d_1+d_2)}^{1\varepsilon}$, et ω signifie $'$ ou $'''$ suivant l'estimation non biaisée que l'on recherche. Maintenant le premier et le second membres des équations obtenues en égalant (7.5.54) et (7.5.55) à (7.5.56) sont des polynômes de degré $n_1 + n_2 + 1$. On peut résoudre ces équations par rapport aux inconnues exactement de la même manière que dans le cas d'utilisation d'un échantillonnage simple. Nous recommandons, de même que lors de la résolution de (7.5.50), de trouver d'abord les valeurs $\varphi^{\omega}(d, 1)$.

Il apparaît des exemples rapportés que les difficultés que l'on rencontre pour obtenir diverses estimations dans les cas des plans du type d'échantillonnage double sont des difficultés de calcul. On peut élaborer des programmes pour calculer des estimations non biaisées sur les ordinateurs. Il convient d'avoir en vue que dès la prochaine décennie les ordinateurs commanderont la production dans de nombreuses grosses entreprises. Un exemple particulier d'une telle ingérence des ordinateurs dans la gestion de la production est fourni par le calcul de l'efficacité du contrôle d'acceptation. Après avoir une fois pour toutes élaboré un programme de traitement des résultats du contrôle des lots, nous pouvons obtenir les renseignements sur le déroulement du contrôle en modifiant le programme d'une manière adéquate et opérationnelle en fonction des variations de la qualité et des modifications des exigences du client.

§ 7.6. Introduction aux problèmes de contrôle courant

Notions générales. Tous les paragraphes précédents de ce chapitre étaient consacrés aux questions du contrôle d'acceptation dans l'hypothèse d'une division alternative des articles en conformes et défectueux. Cela ne signifie pas, bien entendu, que le contrôle d'acceptation joue un rôle primordial dans les méthodes statistiques de contrôle de la qualité, mais s'explique par les connaissances plus approfondies des auteurs dans le domaine du contrôle d'acceptation. A l'heure actuelle ont paru plusieurs ouvrages consacrés au contrôle courant dans lesquels on donne un exposé détaillé des questions du problème (cf. [3], [20]). Les questions du contrôle courant sont considérées très en détail, avec de nombreux exemples numériques, dans les 17 chapitres du livre de Cowden [6]. Dans la présente édition

nous ne consacrons qu'un paragraphe à ces questions mais nous les considérons sur un plan plus général que dans le livre de Cowden.

A la différence du contrôle d'acceptation, où l'on détermine la qualité des lots déjà fabriqués en vue d'utilisation, le contrôle courant doit assurer le déroulement normal du processus technologique. On doit ainsi considérer le *contrôle courant* comme un système de règles assurant la détection rapide des écarts inadmissibles de la qualité de la production fabriquée. Le contrôle courant est effectué aux postes de contrôle (P.C.) soit à l'aide de dispositifs automatiques, soit au moyen de mesures directes. On organise ainsi plusieurs P.C. de ce genre. Ils sont placés après les opérations les plus importantes, dont les résultats jouent un rôle essentiel pour assurer la qualité. Comme on doit déceler à temps les écarts éventuels du déroulement normal du processus, il est désirable d'utiliser toute l'information recueillie. Cela fait que le contrôle suivant un indice quantitatif joue un rôle déterminant dans les méthodes du contrôle courant. Les tailles des échantillons sont ici en général notablement moindres que lors de la réalisation du contrôle d'acceptation. Nous donnerons plus bas d'autres raisons en faveur de la rationalité d'utilisation des résultats quantitatifs. Une phase importante de l'élaboration des règles du contrôle courant est le choix des paramètres à mesurer. Le nombre des paramètres à mesurer est limité par des considérations économiques. Il faut également prendre en considération la dépendance statistique éventuelle des paramètres à mesurer entre eux, ce qui peut conduire à une réduction du volume nécessaire des mesures. On a montré sur la figure 7.6.1 les résultats des mesures de 118 éprouvettes d'acier recuit. On a porté sur l'axe des x les valeurs de la dureté exprimée en kg/cm², et sur l'axe des y la résistance à la rupture. Cette figure est prise du livre de Cowden. Les mesures de dureté sont plus simples et ne détruisent pas les articles. Etant donné la corrélation élevée, on peut réduire le volume des essais à la rupture en les remplaçant par des essais de dureté. La détection de telles corrélations présente une grande valeur quand la mesure de l'un des paramètres a un coût beaucoup plus élevé que la mesure d'un autre paramètre corrélé au premier.

Si l'on a déjà décidé quels sont les paramètres à vérifier, le contrôle courant est conduit le plus souvent d'après le schéma suivant. On choisit parmi les N articles fabriqués n (généralement 4 à 20) articles. Soit $x_{k1}, \ldots, x_{kn}$ les valeurs numériques du paramètre à mesurer dans le k-ième échantillon. A l'appui de ces résultats on calcule la moyenne $\overline{x}_k = (x_{k1} + \ldots + x_{kn})/n$ et la dispersion $R_k = x_{ki0} - x_{kj0}$, où $x_{ki0} = \max\limits_i x_{ki}$, $x_{kj0} = \min\limits_i x_{ki}$. On porte les valeurs de $\overline{x}_k$ et R_k sur les cartes correspondantes de contrôle des moyennes et des dispersions. On a représenté sur la figure 7.6.2, prise également du livre de Cowden, les résultats des mesures de résistance à la rupture-

re de 35 échantillons de tissus de coton. Les lignes en pointillé LCS et LCI correspondent aux limites supérieure et inférieure de contrôle. La sortie d'une seule des valeurs de $\bar{x}_k$ et R_k des limites de contrôle

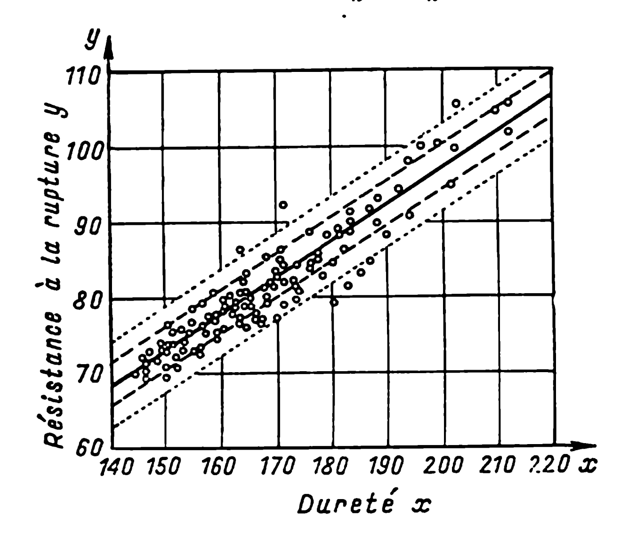


Fig. 7.6.1

est un signal pour vérifier si le déroulement du processus technologique est normal. On observe nettement la tendance de la diminution des valeurs moyennes dans les échantillons numérotés de 30 à 35.

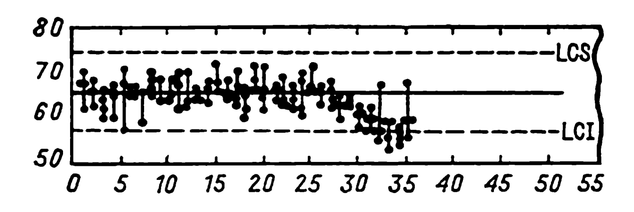


Fig. 7.6.2

L'étude a montré que la cause de la diminution de la résistance à la rupture est l'altération de la qualité du mélange initial. Pour d'autres méthodes d'utilisation des cartes de contrôle s'adresser à [21].

Nécessité de l'étude des déréglages du processus normal de production. L'étude des propriétés statistiques des paramètres peut exercer une influence notable sur le choix des méthodes d'organisation du contrôle courant. Elle peut s'avérer utile également même si l'on a déjà choisi une méthode semblable à celle que nous venons de

décrire de deux cartes de contrôle. Il faut alors accorder une attention particulière au dégagement des formes caractéristiques des variations indésirables des propriétés statistiques des paramètres, c'est-à-dire des déréglages. En général, lors du déroulement normal du processus de production les résultats des mesures des paramètres d'un grand

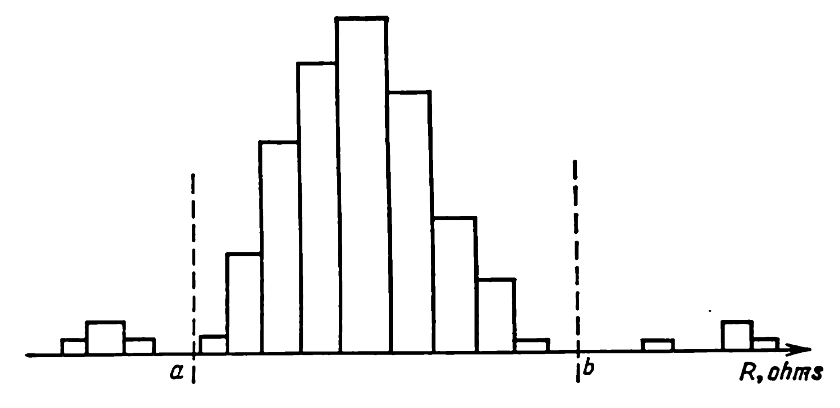


Fig. 7.6.3

nombre d'articles possèdent des histogrammes d'aspect analogue à celui que nous voyons sur la figure 7.6.3. On a construit sur cette figure l'histogramme des valeurs des résistances en ohms. On y remarque un groupe important d'éléments possédant des valeurs situées dans les limites de l'intervalle (a, b). Ce groupe d'éléments est caractérisé par une dispersion des valeurs de la résistance pour laquelle on peut supposer la présence d'une densité de probabilité donnée par une fonction statistique de la forme $f(x, \theta)$, où θ est un paramètre caractérisant la densité. Le nombre d'articles pour lesquels les valeurs des paramètres sortent de l'intervalle (a, b) est peu élevé par rapport au nombre global d'articles vérifiés. A. Stoupatchenko a appelé le groupe d'articles ayant la distribution $f(x, \theta)$ la partie « saine » de la production. Les grands écarts des valeurs des paramètres sont liés, en règle générale, à la présence des défauts ou, ce qui est plus rare, sont dus à une combinaison malchanceuse de nombreux paramètres initiaux déterminant en définitive la valeur du paramètre mesuré. Lors d'un déroulement stable du processus technologique la forme et la valeur des paramètres θ déterminant la densité de probabilité $f(x, \theta)$ de la partie « saine » de la production varient faiblement.

Cette hypothèse de la stabilité de $f(x, \theta)$ est vérifiée bien plus rarement pour les éléments présentant des écarts élevés de ces paramètres. On ne peut estimer ainsi que de grands écarts des paramètres se produisent conformément à une distribution déter-

minée invariable dans le temps. Il est difficile d'espérer une stabilité statistique des grands écarts des paramètres, car les causes provoquant ces écarts peuvent être très spécifiques.

Il arrive souvent, mais bien entendu pas toujours, que la partie « saine » de la production possède une distribution proche de la loi normale ou lognormale. On peut néanmoins rencontrer des cas, où

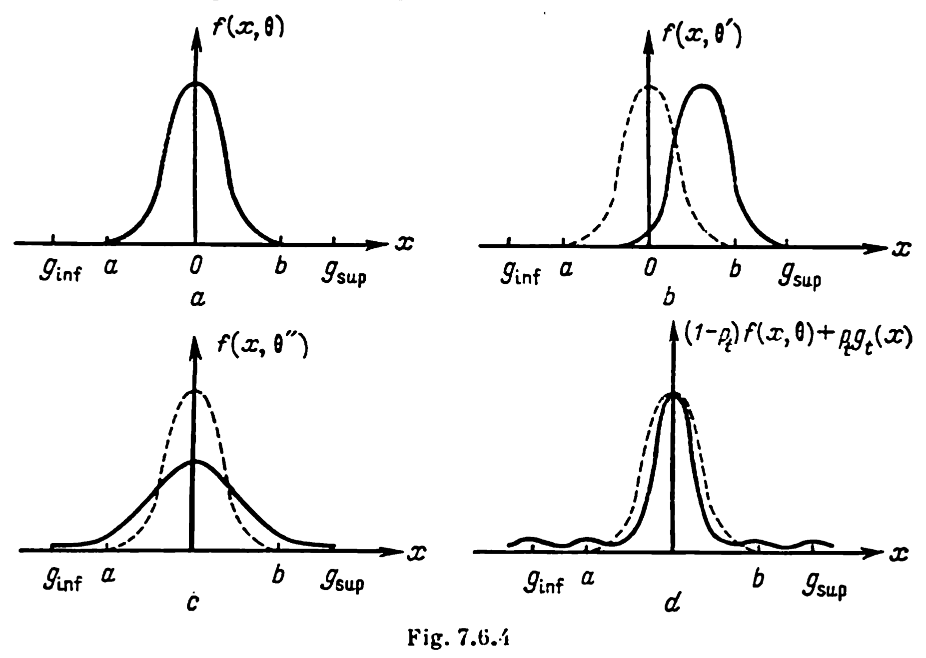


Fig. 7.6.4

la distribution de la partie « saine » de la production est polymodale. Cela peut se produire du fait de mélange de la production de deux chaînes technologiques, possédant divers régimes de travail. Partant de la forme de l'histogramme représenté sur la figure 7.6.3, on peut, en première approximation, diviser les déréglages en trois groupes. On a représenté sur la figure 7.6.4,*a* le cas idéalisé, où le processus technologique est bien réglé et où les valeurs des paramètres de la partie « saine » de la production, caractérisant la qualité, se trouvent dans les limites de l'intervalle des tolérances (g_{inf}, g_{sup}). Il n'y a pas d'articles présentant plus grands écarts des paramètres. Le déréglage du type I consiste en ce que la distribution de la partie « saine » de la production est tellement déplacée de l'un des côtés du champ des tolérances qu'une partie notable des articles possède des valeurs des paramètres proches ou même dépassant des limites de tolérance (fig. 7.6.4, *b*). En présence d'un déréglage du type I la densité de probabilité des valeurs des paramètres possède la même

forme analytique $f(x, \theta')$, mais $\theta' \neq \theta$. Le déréglage du type II est caractérisé par un fort accroissement de la dispersion des valeurs des paramètres mesurés, quand une notable partie des éléments possède des valeurs soit sortant des limites de l'intervalle de tolérance $(g_{\text{inf}}, g_{\text{sup}})$, soit situées à proximité de ses bornes. Le graphique de la densité de probabilité $f(x, \theta'')$ dans le cas du déréglage du type II est montré sur la figure 7.6.4,*c*.

On a enfin représenté sur la figure 7.6.4,*d* le graphique de la densité $f(x)$ pour la distribution des probabilités dans le cas des déréglages du type III. La forme de la densité de probabilité de la partie « saine » de la production est approximativement la même que dans le cas idéalisé représenté sur la figure 7.6.4,*a*. Toutefois, ici le nombre des articles possédant de grands écarts des paramètres augmente fortement. Si l'on désigne par p_t le nombre de ces éléments et par $g_t(x)$ la densité de probabilité de leur distribution correspondant au temps de fabrication t, la densité globale de probabilité sera représentée sous forme de superposition $f(x) = (1 - p_t) \times \times f(x, \theta) + p_t g_t(x)$. Dans la pratique ces déréglages peuvent se rencontrer dans différentes combinaisons. Il est possible, par exemple, que les déréglages du déroulement normal du processus technologique conduisent à une apparition simultanée des déréglages du type II et du type III, etc. D'autres types de déréglages de nature différente sont également possibles. Il est nécessaire de déterminer les types de déréglages pour construire la théorie mathématique formulant les règles rationnelles de prise de la décision d'arrêter le processus technologique à des fins de réglage. Dans le langage de la théorie de la vérification des hypothèses statistiques cela est équivalent à la description des hypothèses concurrentes de l'hypothèse initiale, correspondant au déroulement normal du processus de production.

L'analyse conduite plus haut des types de déréglages permet de conclure que dans le cas général le contrôle courant est nécessaire tant pour les indices quantitatifs que pour les indices qualitatifs. Prenant en considération les valeurs numériques des paramètres à vérifier, on peut mesurer d'une manière plus opérationnelle les écarts dans la partie « saine » de la production, alors que pour estimer le nombre des articles présentant de grands écarts il faut utiliser les méthodes non paramétriques. Il est, par exemple, rationnel de ne tenir compte que du nombre d'articles présentant de grands écarts des paramètres des articles entrant dans le groupe de la production « saine ». La difficulté d'utilisation des méthodes paramétriques pour estimer le nombre d'articles présentant de grands écarts réside dans le fait que la forme de la densité $g_t(x)$ peut varier très fortement et de façon la plus imprévue avec le temps t. S'il n'en est pas ainsi, on peut ici utiliser une information plus complète sur les valeurs numériques des paramètres des articles quand ces paramètres présentent de grands écarts.

Caractéristiques des plans de contrôle courant. Liaison avec la théorie des processus dirigés. Après avoir élucidé la structure statistique des paramètres caractérisant la qualité lors du déroulement normal du processus de production et en présence des déréglages dans

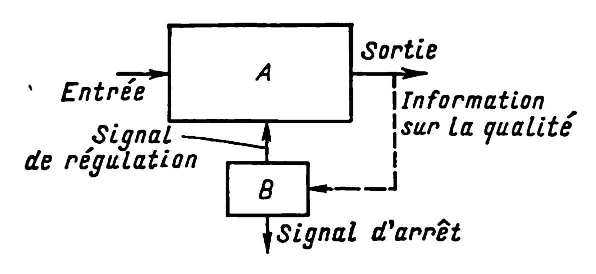


Fig. 7.6.5

le secteur A du processus technologique, on élabore un algorithme de traitement des données des mesures. Par suite de ce traitement ou bien on décide d'effectuer un réglage du processus, ou bien on donne le signal d'arrêter les travaux dans le secteur A. On recherche ensuite et l'on élimine les causes ayant provoqué cette altération de la production. Les calculs qu'entraîne la réalisation de cet algorithme sont alors effectués soit manuellement, soit à l'aide d'un optimisateur B spécialement élaboré à cet effet, vers lequel converge l'information relative à la qualité de la production à la sortie du secteur A. L'optimisateur agit sur les paramètres du processus technologique ou donne le signal d'arrêt du processus (fig. 7.6.5). Si l'arrêt du processus technologique coûte très cher, il est rationnel d'introduire dans l'algorithme le passage à un contrôle plus sévère pour obtenir une décision mieux motivée avec un degré de certitude plus élevé au sujet de l'arrêt du processus. Le passage à un contrôle plus sévère peut, par exemple, signifier un accroissement de la taille de l'échantillon n.

Si l'on se base sur les types de déréglages montrés sur la figure 7.6.4. à chaque instant du temps t la qualité des articles fabriqués est caractérisée par les valeurs des paramètres θ_t et p_t. Ces paramètres varient avec le temps. On choisit à partir des considérations économiques ou autres le domaine G des valeurs admissibles des paramètres θ et p (fig. 7.6.6). De ce point de vue le déréglage a lieu quand les valeurs des paramètres θ_t, p_t sortent des limites du domaine G. Nous ne pouvons juger des valeurs des paramètres θ_t, p_t que d'après les résultats des mesures des paramètres des articles. Ainsi, l'information relative aux valeurs de θ_t et p_t est incomplète. Sous cet aspect la liaison entre les problèmes du contrôle courant et la théorie naissante de la gestion des processus aléatoires d'après des données incomplètes apparaît très nettement. A ce propos nous attirons l'attention du lecteur sur les travaux de Chernov [22] et Chiriaev [23].

On peut juger de l'efficacité des règles, conformément auxquelles est adoptée la décision d'arrêter le processus technologique à des fins de réglage, d'après les valeurs des caractéristiques opérationnelles et des fonctions d'opérativité. On appelle *caractéristique opérationnelle* du plan de contrôle courant la fonction $P(t) = P(t, \theta, p)$ égale à la probabilité d'adopter à l'instant t la décision d'arrêt ou de réglage du processus si $\theta_s \equiv \theta$, $p_s \equiv \theta$ pour $0 \leqslant s \leqslant t$. On appelle *fonction d'opérativité* le temps moyen nécessaire pour adopter la décision d'arrêter le processus à des fins de réglage quand $\theta_s \equiv \theta$, $p_s = p$, $0 \leqslant s \leqslant t$. La fonction $P(t)$ dépend des trois variables t, θ, p, de sorte que le problème se pose de la donner graphiquement ou numériquement de la façon la plus complète possible. Les valeurs les plus intéressantes sont alors $t_q = t(\theta, p, q)$ pour lesquelles $P(t_q, \theta, p) = q$. Après s'être donné la valeur $q = 0{,}9$ ou $0{,}1$ on peut tracer sur le plan des valeurs des paramètres θ, p, pour un ensemble donné des temps $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ les lignes $t(p, \theta, q) = t_i$. Pour les valeurs des paramètres θ, p situées sur les lignes correspondant à t_k, la probabilité de l'arrêt du processus pour le réglage au cours du temps $t \leqslant t_k$ est égale à q. On peut d'une manière analogue porter sur le plan des valeurs (θ, p) les lignes $T(\theta, p) = T_i$, $T_1 < T_2 < \ldots < T_k < \ldots$ L'allure générale des graphiques obtenus est montrée sur les figures 7.6.7,*a* et *b*. Si l'on prend le point $Q_0 = (\theta_0, p_0) \bar{\in} G$, on voit de la figure 7.6.7, *a* que pour déceler un tel déréglage avec une probabilité 0,9 il faudra un temps supérieur à t_1 mais inférieur à t_2. Si pour les paramètres du processus on a $Q_1 = (\theta_1, p_1) \in G$, il n'y a pas de déréglage et nous trouvons de la figure 7.6.7, *b* que le temps moyen avant l'arrêt du processus pour le réglage est $T_2 < T(\theta_1, p_1) < T_3$. Dans le cas présent $T(\theta_1, p_1)$ est le temps moyen avant une fausse alerte. Si, par contre, les valeurs des paramètres θ, p sortent du domaine G, alors $T(\theta, p)$ est le temps moyen du retard dans la détection du déréglage.

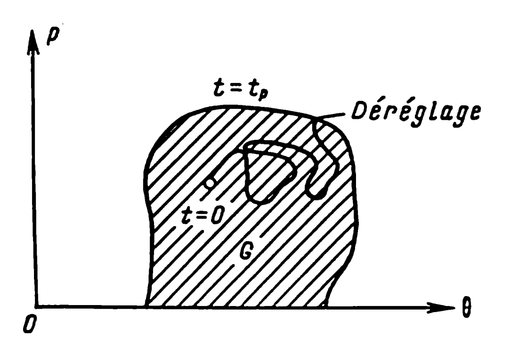


Fig. 7.6.6

Exemple de calcul des caractéristiques du plan de contrôle. Considérons en conclusion de ce paragraphe un exemple particulier de calcul de la caractéristique opérationnelle et de la fonction d'opérativité. Supposons que sur chaque groupe de N articles on prélève n articles pour lesquels on mesure le paramètre x caractérisant la qualité. Supposons que l'étude statistique ait montré qu'il ne peut

y avoir des déréglages du type I et II ($p_t \equiv 0$) et que la densité de probabilité $f(x, \theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, où $\theta = (\mu, \sigma^2)$. Le domaine G des valeurs admissibles du paramètre θ est décrit par les inégalités

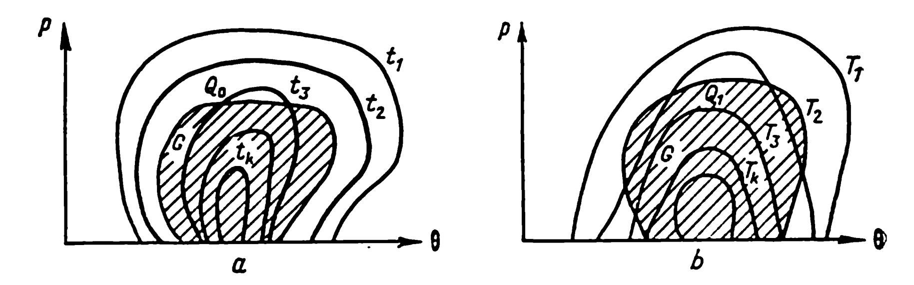


Fig. 7.6.7

$\mu_{\text{inf}} < \mu < \mu_{\text{sup}}$, $0 < \sigma^2 < \sigma^2_{\text{sup}}$. Supposons qu'en résultat du contrôle du k-ième échantillon on ait obtenu les valeurs des paramètres $x_{k1}, \ldots, x_{kn}$. Les estimations non biaisées de μ et σ^2 sont $\bar{x}_k$ et s_k^2

$$\bar{x}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{k_i}, \qquad s_k^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_{k_i} - \bar{x}_k)^2. \qquad (7.6.1)$$

La décision d'arrêter le processus en but de réglage est réalisée de la manière suivante. On donne les limites de contrôle y_{inf}, y_{sup} pour $\bar{x}$, et z^2_{sup} pour s^2. On arrête le processus pour le réglage quand l'une au moins des inégalités suivantes est violée

$$y_{\text{inf}} < \bar{x}_k < y_{\text{sup}}; \qquad 0 < s^2 < z^2_{\text{sup}}. \qquad (7.6.2)$$

Pour plus de netteté on porte les résultats sur les cartes de contrôle de la moyenne et de la variance empirique. La forme des cartes de contrôle est montrée sur la figure 7.6.8. Pour une telle position étroite du problème il s'agit d'un choix bien fondé des valeurs des limites de contrôle y_{inf}, y_{sup}, z^2_{sup} et de la taille n de l'échantillon. Il est indispensable pour cela de connaître la caractéristique opérationnelle et la fonction d'opérativité.

Comme $\bar{x}_k$ suit une distribution normale de moyenne et de variance $\frac{\sigma^2}{n}$, quand $\theta = (\mu, \sigma^2)$, nous avons alors

$$p_1(\mu, \sigma^2) = \mathbf{P}\{y_{\text{inf}} < \bar{x} < y_{\text{sup}}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_{\text{inf}}}^{A_{\text{sup}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad (7.6.3)$$

où $A_{\text{inf}} = \frac{y_{\text{inf}} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$; $A_{\text{sup}} = \frac{y_{\text{sup}} - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$. Nous obtenons du lemme de Fisher (cf. [9], ch. 1) que $\frac{s^2\sqrt{n-1}}{\sigma^2}$ suit une distribution du χ^2 à $(n-1)$ degrés de liberté. Par conséquent,

$$p_2(\mu, \sigma^2) = \mathbf{P}\{0 < s^2 < z_{\text{sup}}^2\} =$$

$$= \left(\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) 2^{\frac{n-1}{2}}\right)^{-1} \int_0^{\frac{z_{\text{sup}}^2}{\sigma^2}} t^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\, dt. \qquad (7.6.4)$$

Compte tenu de l'indépendance des statistiques $\bar{x}$ et s^2, nous trouvons

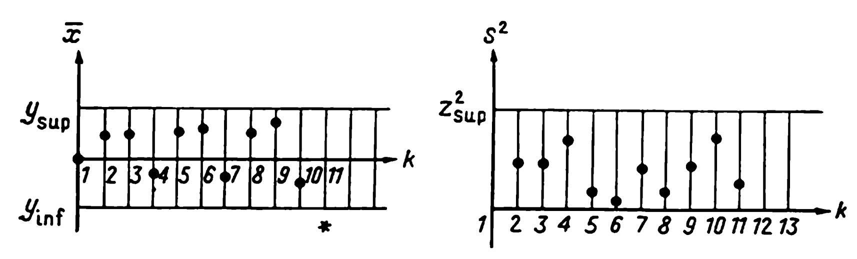


Fig. 7.6.8

que la probabilité $p(\mu, \sigma^2)$ pour que soient vérifiées les inégalités (7.6.2) est

$$p(\mu, \sigma^2) = p_1(\mu, \sigma^2)\, p_2(\mu, \sigma^2), \qquad (7.6.5)$$

où p_1, p_2 se déterminent d'après les formules (7.6.3), (7.6.4). Les résultats des mesures des estimations $\bar{x}_k$, s_k^2 sont réciproquement indépendants d'un échantillon à l'autre, de sorte que le numéro ν de l'échantillon, dont les résultats des mesures permettent de prendre la décision d'arrêter le processus technologique pour assurer le réglage, est une variable aléatoire suivant une distribution géométrique:

$$\mathbf{P}\{\nu = k\} = [1 - p(\mu, \sigma^2)]\, p(\mu, \sigma^2)^{k-1}, \quad k = 1, 2 \ldots \qquad (7.6.6)$$

On suppose ici, bien entendu, que dans tous les échantillons μ et σ^2 sont identiques. Si les mesures sont effectuées après chaque intervalle S donné de temps, la fonction d'opérativité est

$$T(\mu, \sigma^2) = SM\nu = S\,[1 - p(\mu, \sigma^2)]^{-1}. \qquad (7.6.7)$$

On a alors respectivement pour la caractéristique opérationnelle l'expression

$$p(t, \mu, \sigma^2) = \mathbf{P}\{\nu S < t\} = 1 - p^k(\mu, \sigma^2), \qquad (7.6.8)$$

où $k = \left[\frac{t}{S}\right]$, $[a]$ est la partie entière du nombre a. Les valeurs des limites de contrôle y_{inf}, y_{sup} et les grandeurs des tailles des échantillons sont choisies des conditions

$$\min_{\mu,\ \sigma^2 \in G_1} T(\mu, \sigma^2) \geqslant T_1, \qquad \max_{\mu,\ \sigma^2 \bar{\in} G_2} T(\mu, \sigma^2) \leqslant T_2, \qquad (7.6.9)$$

où $G_1 \subseteq G$, autrement dit, est une partie du domaine admissible, et $G_2 \supset G$. On peut formuler des exigences analogues envers les caractéristiques opérationnelles donnant pour les points $(\mu, \sigma^2) \in G$ les probabilités des fausses alertes et pour les points $(\mu, \sigma^2) \bar{\in} G$ les probabilités de ne pas révéler de déréglages au cours du temps choisi t. Les valeurs T_i, t et G_1, G_2 peuvent être choisies en tenant compte des considérations économiques.

ANNEXES

Table 1

Valeurs de la fonction $y = e^{-x}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,0000	0,9900	0,9802	0,9704	0,9608	0,9512	0,9418	0,9324	0,9231	0,9139
0,1	0,9048	8958	8869	8781	8694	8607	8521	8437	8353	8270
0,2	8187	8106	8025	7945	7866	7788	7710	7634	7558	7483
0,3	7408	7334	7261	7189	7118	7047	6977	6907	6839	6771
0,4	6703	6636	6570	6505	6440	6376	6313	6250	6188	6126
0,5	6065	6005	5945	5886	5827	5769	5712	5655	5599	5543
0,6	5488	5433	5379	5326	5273	5220	5168	5117	5066	5016
0,7	4966	4916	4867	4819	4771	4724	4677	4630	4584	4538
0,8	4493	4449	4404	4360	4317	4274	4232	4189	4148	4107
0,9	4066	4025	3985	3945	3906	3867	3829	3791	3753	3716
1,0	0,3679	0,3642	0,3606	0,3570	0,3534	0,3499	0,3465	0,3430	0,3396	0,3362
1,1	3329	3296	3263	3230	3198	3166	3135	3104	3073	3042
1,2	3012	2982	2952	2923	2894	2865	2836	2808	2780	2753
1,3	2725	2698	2671	2645	2618	2592	2567	2541	2516	2491
1,4	2466	2441	2417	2393	2369	2346	2322	2299	2276	2254
1,5	2231	2209	2187	2165	2144	2123	2101	2080	2060	2039
1,6	2019	1999	1979	1959	1940	1920	1901	1882	1864	1845
1,7	1827	1809	1791	1773	1755	1738	1720	1703	1686	1670
1,8	1653	1636	1620	1604	1588	1572	1557	1541	1526	1511
1,9	1496	1481	1466	1451	1437	1423	1409	1395	1381	1367
2,0	0,1353	0,1340	0,1327	0,1313	0,1300	0,1287	0,1275	0,1262	0,1249	0,1237
2,1	1225	1212	1200	1188	1177	1165	1153	1142	1130	1119
2,2	1108	1097	1086	1075	1065	1054	1043	1033	1023	1013

Suite de la table 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,3	0,1003	0,0993	0,0983	0,0973	0,0963	0,0954	0,0944	0,0935	0,0926	0,0916
2,4	0907	0898	0889	0880	0872	0863	0854	0846	0837	0829
2,5	0821	0813	0805	0797	0789	0781	0773	0765	0758	0750
2,6	0743	0735	0728	0721	0714	0707	0700	0693	0686	0679
2,7	0672	0665	0659	0652	0646	0639	0633	0627	0620	0614
2,8	0608	0602	0596	0590	0584	0578	0573	0567	0561	0556
2,9	0550	0545	0539	0534	0529	0523	0518	0513	0508	0503
3,0	0,0498	0,0493	0,0488	0,0483	0,0478	0,0474	0,0469	0,0464	0,0460	0,0455
3,1	0450	0446	0442	0437	0433	0429	0424	0420	0416	0412
3,2	0408	0404	0400	0396	0392	0388	0384	0380	0376	0373
3,3	0369	0365	0362	0358	0354	0351	0347	0344	0340	0337
3,4	0334	0330	0327	0324	0321	0317	0314	0311	0308	0305
3,5	0302	0299	0296	0293	0290	0287	0284	0282	0279	0276
3,6	0273	0271	0268	0265	0263	0260	0257	0255	0252	0250
3,7	0247	0245	0242	0240	0238	0235	0233	0231	0228	0226
3,8	0224	0221	0219	0217	0215	0213	0211	0209	0207	0204
3,9	0202	0200	0198	0196	0194	0193	0191	0189	0187	0185
4,0	0,0181	0,0181	0,0180	0,0178	0,0176	0,0174	0,0172	0,0171	0,0169	0,0167
4,1	0164	0164	0162	0161	0159	0158	0156	0155	0153	0151
4,2	0150	0148	0147	0146	0144	0143	0141	0140	0138	0137
4,3	0136	0134	0133	0132	0130	0129	0128	0127	0125	0124
4,4	0123	0122	0120	0119	0118	0117	0116	0114	0113	0112
4,5	0111	0110	0109	0108	0107	0106	0105	0104	0103	0102
4,6	0101	0100	0099	0098	0097	0096	0095	0094	0093	0092

Suite de la table 1

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,7	0,0091	0,0090	0,0089	0,0088	0,0087	0,0086	0,0085	0,0085	0,0084	0,0083
4,8	0082	0081	0081	0080	0079	0078	0078	0077	0076	0075
4,9	0074	0074	0073	0072	0072	0071	0070	0069	0069	0068
5,0	0,0067	0,0067	0,0066	0,0065	0,0065	0,0064	0,0063	0,0063	0,0062	0,0062
5,1	0061	0060	0060	0059	0059	0058	0057	0057	0056	0056
5,2	0055	0055	0054	0054	0053	0052	0052	0051	0051	0050
5,3	0050	0049	0049	0048	0048	0047	0047	0046	0046	0046
5,4	0045	0045	0044	0044	0043	0043	0043	0042	0042	0041
5,5	0041	0041	0040	0040	0039	0039	0038	0038	0038	0037
5,6	0037	0037	0036	0036	0036	0035	0034	0034	0034	0034
5,7	0033	0033	0033	0032	0032	0032	0031	0031	0031	0031
5,8	0030	0030	0030	0029	0029	0029	0029	0028	0028	0028
5,9	0027	0027	0027	0027	0026	0026	0026	0026	0025	0025
6,0	0,0025	0,0025	0,0024	0,0024	0,0024	0,0024	0,0023	0,0023	0,0023	0,0023
6,2	0020	0020	0020	0020	0019	0019	0019	0019	0019	0019
6,4	0017	0016	0016	0016	0016	0016	0016	0015	0015	0015
6,6	0014	0013	0013	0013	0013	0013	0013	0013	0013	0012
6,8	0011	0011	0011	0011	0011	0010	0010	0010	0010	0010

Table 2

Valeurs de la fonction $y=x^{\alpha}$

x \ α	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,1
0,00010	0,3981	0,1585	0,0631	0,0251	0,0100	$0{,}0^{2}398$	$0{,}0^{3}631$	$0{,}0^{4}398$
0,00016	0,4173	0,1741	0,0726	0,0303	0,0126	$0{,}0^{2}528$	$0{,}0^{3}919$	$0{,}0^{4}668$
0,00025	0,4365	0,1903	0,0831	0,0362	0,0158	$0{,}0^{2}690$	$0{,}0^{2}131$	$0{,}0^{3}109$
0,00040	0,4575	0,2091	0,0956	0,0437	0,0200	$0{,}0^{2}915$	$0{,}0^{2}191$	$0{,}0^{3}183$
0,00063	0,4785	0,2290	0,1096	0,0524	0,0251	0,0120	$0{,}0^{2}275$	$0{,}0^{3}302$
0,00100	0,5011	0,2513	0,1259	0,0631	0,0316	0,0158	$0{,}0^{2}398$	$0{,}0^{3}501$
0,00160	0,5252	0,2761	0,1450	0,0761	0,0400	0,0210	$0{,}0^{2}580$	$0{,}0^{3}841$
0,00250	0,5494	0,3018	0,1658	0,0936	0,0500	0,0275	$0{,}0^{2}829$	$0{,}0^{2}137$
0,00400	0,5758	0,3315	0,1909	0,1099	0,0632	0,0364	0,0121	$0{,}0^{2}230$
0,00630	0,6023	0,3631	0,2187	0,1319	0,0794	0,0478	0,0173	$0{,}0^{2}379$
0,01000	0,6306	0,3981	0,2511	0,1585	0,0999	0,0631	0,0251	$0{,}0^{2}631$
0,01600	0,6610	0,4374	0,2891	0,1913	0,1264	0,0837	0,0366	0,0106
0,02500	0,6914	0,4781	0,3305	0,2285	0,1580	0,1094	0,0523	0,0173
0,04000	0,7247	0,5252	0,3810	0,2761	0,2001	0,1450	0,0762	0,0290
0,06300	0,7588	0,5752	0,4360	0,3309	0,2511	0,1905	0,1096	0,0478
0,10000	0,7945	0,5945	0,5011	0,3981	0,3163	0,2514	0,1585	0,0795
0,16000	0,8328	0,6935	0,6126	0,4805	0,4001	0,3332	0,2309	0,1333
0,25000	0,8702	0,7580	0,6597	0,5746	0,5001	0,4352	0,3299	0,2176
0,40000	0,9121	0,8328	0,7596	0,6935	0,6325	0,5770	0,4805	0,3649
0,63000	0,9550	0,9121	0,8702	0,8311	0,7937	0,7580	0,6907	0,6017
1,00000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,60000	1,0481	1,0986	1,1514	1,2068	1,2649	1,3258	1,4564	1,6770
2,50000	1,0964	1,2008	1,3165	1,4434	1,5825	1,7332	2,0834	2,7429
4,00000	1,1491	1,3192	1,5159	1,7402	1,9997	2,2979	3,0313	4,5951

Suite de la table 2

x \ α	1,4	1,7	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0
0,00010	$0,0^{5}251$	$0,0^{6}158$	$0,0^{7}100$	$0,0^{9}100$	$0,0^{11}100$	$0,0^{13}100$	$0,0^{15}100$	$0,0^{19}100$
0,00016	$0,0^{5}485$	$0,0^{6}352$	$0,0^{7}225$	$0,0^{9}324$	$0,0^{11}410$	$0,0^{13}519$	$0,0^{15}656$	$0,0^{18}105$
0,00025	$0,0^{4}898$	$0,0^{5}746$	$0,0^{6}620$	$0,0^{9}988$	$0,0^{10}156$	$0,0^{12}247$	$0,0^{14}391$	$0,0^{18}977$
0,00040	$0,0^{3}173$	$0,0^{4}166$	$0,0^{5}159$	$0,0^{7}317$	$0,0^{9}640$	$0,0^{11}128$	$0,0^{13}256$	$0,0^{16}102$
0,00063	$0,0^{4}331$	$0,0^{5}363$	$0,0^{6}398$	$0,0^{8}998$	$0,0^{9}250$	$0,0^{11}629$	$0,0^{12}158$	$0,0^{16}996$
0,00100	$0,0^{4}631$	$0,0^{5}795$	$0,0^{5}100$	$0,0^{7}317$	$0,0^{8}100$	$0,0^{10}317$	$0,0^{11}100$	$0,0^{14}100$
0,00160	$0,0^{3}122$	$0,0^{4}177$	$0,0^{5}256$	$0,0^{6}102$	$0,0^{8}410$	$0,0^{9}163$	$0,0^{11}657$	$0,0^{13}105$
0,00250	$0,0^{3}228$	$0,0^{4}375$	$0,0^{5}625$	$0,0^{6}313$	$0,0^{7}156$	$0,0^{9}782$	$0,0^{10}391$	$0,0^{13}979$
0,00400	$0,0^{3}440$	$0,0^{4}839$	$0,0^{4}160$	$0,0^{5}101$	$0,0^{7}641$	$0,0^{8}405$	$0,0^{9}256$	$0,0^{11}103$
0,00630	$0,0^{3}830$	$0,0^{3}181$	$0,0^{4}397$	$0,0^{5}315$	$0,0^{6}250$	$0,0^{7}198$	$0,0^{8}158$	$0,0^{11}993$
0,01000	$0,0^{2}158$	$0,0^{3}398$	$0,0^{3}100$	$0,0^{4}100$	$0,0^{5}100$	$0,0^{6}100$	$0,0^{7}100$	$0,0^{9}100$
0,01600	$0,0^{2}306$	$0,0^{3}885$	$0,0^{3}256$	$0,0^{4}324$	$0,0^{5}410$	$0,0^{6}518$	$0,0^{7}656$	$0,0^{8}105$
0,02500	$0,0^{2}571$	$0,0^{2}189$	$0,0^{3}625$	$0,0^{4}987$	$0,0^{4}156$	$0,0^{5}247$	$0,0^{6}390$	$0,0^{8}976$
0,04000	0,01110	$0,0^{2}421$	$0,0^{2}160$	$0,0^{3}321$	$0,0^{4}642$	$0,0^{4}128$	$0,0^{5}257$	$0,0^{6}103$
0,06300	0,0208	$0,0^{2}910$	$0,0^{2}397$	$0,0^{3}998$	$0,0^{3}250$	$0,0^{4}629$	$0,0^{4}158$	$0,0^{6}996$
0,10000	0,0398	0,0200	$0,0^{2}549$	$0,0^{2}317$	$0,0^{2}100$	$0,0^{3}317$	$0,0^{3}100$	$0,0^{4}100$
0,16000	0,0769	0,0444	0,0256	0,0102	$0,0^{2}748$	$0,0^{2}164$	$0,0^{3}659$	$0,0^{3}105$
0,25000	0,1437	0,0948	0,0625	0,0313	0,0156	$0,0^{2}782$	$0,0^{2}391$	$0,0^{3}978$
0,40000	0,2775	0,2108	0,1601	0,1013	0,0640	0,0405	0,0256	0,0102
0,63000	0,5236	0,4561	0,3969	0,3151	0,2501	0,1985	0,1575	0,0993
1,00000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,60000	1,9309	2,2233	2,5600	3,2381	4,0960	5,1810	6,5535	$1,0486 \cdot 10$
2,50000	3,6111	4,7541	6,2589	9,9046	$1,5658 \cdot 10$	$2,4749 \cdot 10$	$3,9173 \cdot 10$	$9,8003 \cdot 10$
4,00000	6,9587	$1,0549 \cdot 10$	$1,5991 \cdot 10$	$3,1976 \cdot 10$	$6,3943 \cdot 10$	$1,2774 \cdot 10^{2}$	$2,5570 \cdot 10^{2}$	$1,0225 \cdot 10^{3}$

Table 3

Quantiles de la distribution normale

p	u_p	p	u_p	p	u_p
0,50	0,000	0,68	0,468	0,86	1,080
0,51	0,025	0,69	0,496	0,87	1,126
0,52	0,051	0,70	0,524	0,88	1,175
0,53	0,075	0,71	0,553	0,89	1,227
0,54	0,100	0,72	0,583	0,90	1,281
0,55	0,125	0,73	0,613	0,91	1,341
0,56	0,150	0,74	0,643	0,92	1,405
0,57	0,176	0,75	0,674	0,93	1,476
0,58	0,202	0,76	0,706	0,94	1,555
0,59	0,228	0,77	0,739	0,95	1,645
0,60	0,254	0,78	0,772	0,96	1,751
0,61	0,279	0,79	0,806	0,97	1,881
0,62	0,306	0,80	0,842	0,98	2,054
0,63	0,332	0,81	0,878	0,99	2,326
0,64	0,358	0,82	0,915	0,999	3,090
0,65	0,385	0,83	0,954	0,9999	3,720
0,66	0,412	0,84	0,995	0,99999	4,265
0,67	0,440	0,85	1,036		

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_p} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

Table 4

Quantiles de la distribution du χ^2 *)

Nombre de degrés de liberté n	$\chi^2_{0,1}$	$\chi^2_{0,3}$	$\chi^2_{0,5}$	$\chi^2_{0,7}$	$\chi^2_{0,9}$	$\chi^2_{0,95}$	$\chi^2_{0,99}$	$\chi^2_{0,999}$
1	0,016	0,148	0,455	1,07	2,71	3,84	6,63	10,8
2	0,211	0,713	1,39	2,41	4,61	5,99	9,21	13,8
3	0,594	1,42	2,37	3,67	6,25	7,81	11,3	16,3
4	1,06	2,19	3,36	4,88	7,78	9,49	13,3	18,5
5	1,61	3,00	4,35	6,06	9,24	11,1	15,1	20,5
6	2,20	3,83	5,35	7,23	10,6	12,6	16,8	22,5
7	2,83	4,67	6,35	8,38	12,0	14,1	18,5	24,3
8	3,49	5,53	7,34	9,52	13,4	15,5	20,1	26,1
9	4,17	6,39	8,34	10,7	14,7	16,9	21,7	27,9
10	4,87	7,27	9,34	11,8	16,0	18,3	23,2	29,6
11	5,58	8,15	10,3	12,9	17,3	19,7	24,7	31,3
12	6,30	9,03	11,3	14,0	18,5	21,0	26,2	32,9
13	7,04	9,93	12,3	15,1	19,8	22,4	27,7	34,5
14	7,79	10,08	13,3	16,2	21,1	23,7	29,1	36,1
15	8,55	11,7	14,3	17,3	22,3	25,0	30,6	37,7
16	9,31	12,6	15,3	18,4	23,5	26,3	32,0	39,3
17	10,10	13,5	16,3	19,5	24,8	27,6	33,4	40,8
18	10,9	14,4	17,3	20,6	26,0	28,9	34,8	42,3
19	11,7	15,4	18,3	21,7	27,2	30,1	36,2	43,8
20	12,4	16,3	19,3	22,8	28,4	31,4	37,6	45,3
21	13,2	17,2	20,3	23,9	29,6	32,7	38,9	46,8
22	14,0	18,1	21,3	24,9	30,8	33,9	40,3	48,3
23	14,8	19,0	22,3	26,0	32,0	35,2	41,6	49,7
24	15,7	19,9	23,3	27,1	33,2	36,4	43,0	51,2
25	16,5	20,9	24,3	28,2	34,4	37,7	44,3	52,6
26	17,3	21,8	25,3	29,2	35,6	38,9	45,6	54,1
27	18,1	22,7	26,3	30,3	36,7	40,1	47,0	55,5
28	18,9	23,6	27,3	31,4	37,9	41,3	48,3	56,9
29	19,8	24,6	28,3	32,5	39,1	42,6	49,6	58,3
30	20,6	25,5	29,3	33,5	40,3	43,8	50,9	59,7

$$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{\chi_p^2} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x}\,dx = p$$

*) Y. Yanko. Tables mathématico-statistiques, Gosstatizdat, Moscou, 1961.

Table 5

Table abrégée de la distribution binomiale

On donne dans la table les valeurs de $\sum_{k=d}^{n} C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$. Par exemple, si 15 éléments sont soumis à l'essai d'après le plan [N, B, T], la probabilité de la panne d'un élément étant $p=0{,}06$, la probabilité pour que l'on enregistre un nombre de pannes supérieur ou égal à trois est égale à 0,05713, et la probabilité pour que le nombre de pannes soit égal à trois est 0,05713—0,01036=0,04677

n	d \ p	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
5	1	0,04901	0,09608	0,14127	0,18463	0,22622	0,26610	0,30431	0,34092	0,37597	0,40951
	2	00098	00384	00847	01476	02259	03187	04249	05436	06738	08146
	3	00001	00008	00026	00060	00116	00197	00308	00453	00634	00856
	4	00000	00000	00000	00001	00003	00006	00011	00019	00030	00046
	5	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00001	00001
6	1	0,05852	0,11416	0,16703	0,21724	0,26491	0,31013	0,35301	0,39364	0,43213	0,46856
	2	00146	00569	01246	02155	03277	04592	06082	07729	09515	11427
	3	00002	00015	00050	00117	00223	00376	00584	00851	01183	01585
	4	00000	00000	00001	00004	00009	00018	00032	00054	00085	00127
	5	00000	00000	00000	00000	00000	00000	00001	00002	00003	00006
7	1	0,06793	0,13187	0,19202	0,24855	0,30166	0,35152	0,39830	0,44215	0,48324	0,52170
	2	00203	00786	01709	02938	04438	06178	08127	10259	12548	14969
	3	00003	00026	00086	00198	00376	00629	00969	01401	01933	02569
	4	00000	00001	00003	00008	00019	00039	00071	00118	00184	00273
	5	00000	00000	00000	00000	00001	00001	00003	00006	00011	00018
8	1	0,07726	0,14924	0,21626	0,27861	0,33658	0,39043	0,44042	0,48678	0,52975	0,56953
	2	00269	01034	02234	03815	05724	07916	10347	12976	15768	18690
	3	00005	00042	00135	00308	00579	00962	01470	02110	02889	03809
	4	00000	00001	00005	00016	00037	00075	00134	00220	00341	00502
	5	00000	00000	00000	00001	00002	00004	00008	00015	00026	00043

Suite de la table 5

n	d \ p	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
9	1	0,08648	0,16625	0,23977	0,30747	0,36975	0,42701	0,47959	0,52784	0,57207	0,61258
	2	00344	01311	02816	04777	07121	09784	12705	15832	19117	22516
	3	00008	00061	00198	00448	00836	01380	02091	02979	04048	05297
	4	00000	00002	00009	00027	00064	00128	00227	00372	00570	00833
	5	00000	00000	00000	00001	00003	00008	00017	00031	00055	00089
10	1	0,09562	0,18293	0,26258	0,33517	0,40126	0,46138	0,51602	0,56561	0,61058	0,65132
	2	00427	01618	03451	05815	08614	11759	15173	18788	22545	26390
	3	00011	00086	00276	00621	01150	01884	02834	04008	05404	07019
	4	00000	00003	00015	00044	00103	00203	00358	00580	00883	01280
	5	00000	00000	00001	00002	00006	00015	00031	00059	00101	00163
11	1	0,10466	0,19927	0,28470	0,36176	0,43120	0,49370	0,54990	0,60036	0,64563	0,68619
	2	00518	01951	04135	06923	10189	13822	17723	21810	26011	30264
	3	00016	00117	00372	00829	01524	02476	03698	05190	06947	08956
	4	00000	00005	00023	00067	00155	00304	00531	00854	01290	01853
	5	00000	00000	00001	00004	00011	00026	00054	00100	00171	00275
12	1	0,11362	0,21528	0,30616	0,38729	0,45964	0,52408	0,58140	0,63233	0,67752	0,71757
	2	00617	02311	04865	08094	11836	15954	20332	24868	29481	34100
	3	00021	00154	00485	01073	01957	03157	04680	06520	08662	11087
	4	00000	00007	00033	00098	00224	00434	00753	01201	01799	02564
	5	00000	00000	00002	00006	00018	00043	00088	00161	00272	00433
13	1	0,12248	0,23098	0,32697	0,41180	0,48666	0,55263	0,61071	0,66175	0,70655	0,74581
	2	00725	02695	05637	09319	13542	18142	22978	27937	32925	37866
	3	00027	00197	00616	01354	02451	03925	05775	07987	10536	13388
	4	00001	00010	00047	00137	00310	00598	01028	01627	02417	03416
	5	00000	00000	00003	00010	00029	00067	00134	00244	00410	00646
14	1	0,13125	0,24636	0,34716	0,43533	0,51233	0,57948	0,63796	0,68881	0,73296	0,77123
	2	00840	03103	06449	10593	15299	20369	25645	30996	36321	41537
	3	00034	00247	00767	01672	03005	04778	06980	09583	12551	15836
	4	00001	00014	00064	00185	00417	00797	01360	02136	03148	04413
	5	00000	00001	00004	00015	00043	00098	00197	00354	00590	00923

Suite de la table 5

n	d \ p	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
15	1	0,13994	0,26143	0,36675	0,45791	0,53671	0,60471	0,66330	0,71370	0,75699	0,79411
	2	00963	03534	07297	11911	17095	22624	28315	34027	39649	45096
	3	00042	00304	00937	02029	03620	05713	08286	11297	14690	18406
	4	00001	00018	00085	00245	00547	01036	01753	02731	03994	05556
	5	00000	00001	00006	00022	00061	00140	00278	00497	00820	01272
20	1	0,18209	0,33239	0,45621	0,55800	0,64151	0,70989	0,76576	0,81131	0,84836	0,87842
	2	01686	05990	11984	18966	26416	33955	41314	48314	54840	60825
	3	00100	00707	02101	04386	07548	11497	16100	21205	26657	32307
	4	00004	00060	00267	00741	01590	02897	04713	07062	09933	13295
	5	00000	00004	00026	00096	00257	00563	01071	01834	02904	04317
25	1	0,22218	0,39654	0,53303	0,63960	0,72261	0,78709	0,83704	0,87564	0,90537	0,92821
	2	02576	08865	17196	26419	35762	44734	53040	60528	67139	72879
	3	00195	01324	03796	07648	12711	18711	25344	32317	39370	46291
	4	00011	00145	00619	01652	03409	05976	09361	13509	18315	23641
	5	00000	00012	00078	00278	00716	01505	02745	04514	06861	09799
30	1	0,26030	0,45452	0,59899	0,70614	0,78536	0,84374	0,88663	0,91803	0,94095	0,95761
	2	03615	12055	22692	33882	44646	54453	63064	70421	76573	81630
	3	00332	02172	06007	11690	18782	26760	35125	43460	51447	58865
	4	00022	00289	01190	03059	06077	10262	15498	21579	28253	35256
	5	00001	00030	00185	00632	01564	03154	05526	08736	12769	17549
40	1	0,33103	0,55430	0,70429	0,80463	0,87149	0,91584	0,94513	0,96439	0,97700	0,98522
	2	06074	19046	33846	47902	60094	70096	77994	84055	88603	91953
	3	00750	04567	11783	21447	32326	43350	53748	63055	71058	77719
	4	00069	00824	03140	07484	13815	21726	30631	39925	49079	57687
	5	00005	00118	00667	02102	04803	08958	14537	21321	28971	37098
50	1	0,39499	0,63583	0,78193	0,87011	0,92306	0,95467	0,97344	0,98453	0,99104	0,99485
	2	08944	26423	44472	59952	72057	81000	87351	91729	94676	96621
	3	01382	07843	18920	32329	45947	58375	68921	77403	83946	88827
	4	00160	01776	06276	13913	23959	35270	46726	57470	66966	74971
	5	00015	00321	01681	04897	10362	17940	27097	37105	47234	56880

Table 6

Formules des estimations et des intervalles de confiance pour le paramètre λ de la loi exponentielle

Plan d'expérience	Statistique exhaustive	Estimation	Biais de l'estimation	Variance de l'estimation	Intervalle de confiance à seuil de confiance non inférieur à $\alpha = 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$	Tables
$[N, V, T]$	$d(T)$ le nombre de pannes au cours du temps T	$\hat{\lambda} = \frac{d(T)}{NT}$	non biaisée	$D[\hat{\lambda}] = \frac{\lambda}{NT}$	$\underline{\lambda} = \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(d-1)}{NT}$, $\overline{\lambda} = \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(d)}{NT}$, $d = d(T)$	$\Delta_\alpha(d)$ sont donnés dans la table 7
$[N, V, r]$	t_r l'instant de la r-ième panne	$\hat{\lambda} = \frac{r-1}{Nt_r}$	non biaisée si $r > 1$	$D[\hat{\lambda}] = \frac{\lambda^2}{r-2}$, $r > 2$	$\underline{\lambda} = \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{Nt_r}$, $\overline{\lambda} = \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{Nt_r}$	$\Delta_\alpha(d)$ sont donnés dans la table 7
$[N, V, (r, T)]$	$\begin{cases} t_r, \text{ si } t_r \leqslant T \\ d(T), \text{ si } t_r > T \end{cases}$	$\hat{\lambda} = \begin{cases} \frac{d(T)}{NT}, & t_r > T \\ \frac{r-1}{Nt_r}, & t_r \leqslant T \end{cases}$	non biaisée si $r > 1$	$D[\hat{\lambda}] = \frac{\lambda}{NT} L_{r-2}(\lambda NT) + \frac{\lambda^2}{r-2}[1 - L_{r-2}(\lambda NT)]$	Si $t_r \leqslant T$ pour $\underline{\lambda}$ et $\overline{\lambda}$, on utilise les formules du plan $[N, V, r]$; si par contre $t_r > T$, on utilise les formules du plan $[N, V, T]$	
$[N, B, T]$	$d(T)$ et $S_B(T)$ le temps global de fonctionnement à l'instant T	$\hat{\lambda} = \frac{d(T)}{S_B T}$ ou $\hat{\lambda} = \frac{d(T)}{\left[N - \frac{d(T)}{2}\right] T}$ si $\frac{d(T)}{N}$ est petit	biaisée	formule complexe sous forme de série	$\underline{\lambda} = \frac{\underline{\Delta}'(d)}{T}$, $\overline{\lambda} = \frac{\overline{\Delta}'(d)}{T}$	$\underline{\Delta}', \overline{\Delta}'$ sont donnés dans la table 8 pour $\alpha = 0{,}95$

Table 6

Plan d'expérience	Statistique exhaustive	Estimation	Biais de l'estimation	Variance de l'estimation	Intervalle de confiance à seuil de confiance non inférieur à $\alpha=1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$	Tables
$[N, B, r]$	$S_B(t_r)$ le temps global de fonctionnement à l'instant t_r	$\hat{\lambda}=\frac{r-1}{S_B(t_r)}$	non biaisée	$D[\lambda]=\frac{\lambda^2}{r-2}, r>2$	$\underline{\lambda}=\frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{S_B(t_r)}$, $\overline{\lambda}=\frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{S_B(t_r)}$	$\Delta_\alpha(d)$ sont donnés dans la table 7
$[N, B, (r, T)]$	$\begin{cases} d(T),\ S_B(T), \\ \text{si } t_r>t; \\ S_B(t_r), \\ \text{si } t_r\leqslant T \end{cases}$	$\hat{\lambda}=\begin{cases} \frac{d(T)}{S_B(T)}, & t_r>T \\ \frac{r-1}{S_B(t_r)}, & t_r\leqslant T \end{cases}$	biaisée	formule complexe sous forme de série	Si $t_r>T$, on utilise la formule pour $\underline{\lambda}$, $\overline{\lambda}$ du plan $[N, B, T]$, si par contre $t_r\leqslant T$, on trouve $\underline{\lambda}$ et $\overline{\lambda}$ en tant que solutions des équations (3.4.38), (3.4.39)	
$[N, B, (r, HS_0)]$	$\begin{cases} S_B(t_r), \\ \text{si } t_r<T; \\ d(t_0), \\ \text{si } S_0=S_B(t_0)< \\ <S_B(t_r) \end{cases}$	$\hat{\lambda}=\begin{cases} \frac{d(t_0)}{S_0}, & S_0<S_B(t_r) \\ \frac{r-1}{S_B(t_r)}, & S_0\geqslant S_B(t_r) \end{cases}$	non biaisée	$D[\hat{\lambda}]=\frac{\lambda}{S_0}L_{r-2}(\lambda S_0)+$ $+\frac{\lambda^2}{r-2}[1-L_{r-2}(\lambda S_0)]$	$\underline{\lambda}=\frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(d-1)}{S_0}$, $\overline{\lambda}=\frac{\Delta_{\varepsilon_1}(d)}{S_0}$, si $S_0<S_B(t_r)$; $\begin{cases} \underline{\lambda}=\frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{S_B(t_r)}, \\ \overline{\lambda}=\frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{S_B(t_r)}, \text{ si} \end{cases}$ $S_0\geqslant S_B(t_r)$	$\Delta_\alpha(d)$ sont donnés dans la table 7

Table 7

Quantiles $\Delta_\alpha(d)$ de la distribution poissonienne, $L_d(\Delta_\alpha(d)) = \alpha$

d \ α	0,99993	0,9999	0,9993	0,999	0,993	0,99	0,95
0	0,000070	0,000100	0,000700	0,00100	0,00702	0,01005	0,05129
1	0,01188	0,01421	0,03789	0,04540	0,12326	0,14855	0,35536
2	0,07633	0,08618	0,16824	0,19053	0,38209	0,43604	0,81769
3	0,21115	0,23180	0,38894	0,42855	0,74108	0,82325	1,36632
4	0,41162	0,44446	0,68204	0,73937	1,17032	1,27911	1,97015
5	0,66825	0,71375	1,03236	1,10710	1,65152	1,78528	2,61301
6	0,97222	1,03040	1,42874	1,52034	2,17293	2,33021	3,28532
7	1,31628	1,38697	1,86297	1,97081	2,72659	2,90611	3,98082
8	1,69465	1,77758	2,32894	2,45242	3,30682	3,50746	4,69523
9	2,10271	2,19758	2,82197	2,96052	3,90942	4,13020	5,42541
10	2,53672	2,64323	3,33840	3,49148	4,53118	4,77125	6,16901
11	2,99367	3,11150	3,87531	4,04244	5,16960	5,42818	6,92421
12	3,47103	3,59988	4,43033	4,61106	5,82265	6,09907	7,68958
13	3,96672	4,10632	5,00152	5,19544	6,48871	6,78235	8,46394
14	4,47896	4,62904	5,58725	5,79398	7,16642	7,47673	9,24633
15	5,00626	5,16657	6,18615	6,40533	7,85464	8,18111	10,03596
16	5,54732	5,71762	6,79705	7,02835	8,55241	8,89457	10,83214

d \ α	0,93	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40
0	0,07257	0,10536	0,22314	0,35667	0,51082	0,69315	0,91629
1	0,43081	0,53181	0,82439	1,09735	1,37642	1,67835	2,02231
2	0,94230	1,10206	1,53504	1,91378	2,28508	2,67406	3,10538
3	1,53414	1,74477	2,29679	2,76371	3,21132	3,67206	4,17526
4	2,17670	2,43259	3,08954	3,63361	4,14774	4,67091	5,23662

Suite de la table 7

d \ α	0,93	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40
5	2,85488	3,15190	3,90366	4,51714	5,09098	5,67016	6,29192
6	3,55984	3,89477	4,73366	5,41074	6,03924	6,66964	7,34265
7	4,28584	4,65612	5,57606	6,31217	6,99137	7,66925	8,38977
8	5,02895	5,43247	6,42848	7,21993	7,94661	8,66895	9,43395
9	5,78633	6,22130	7,28922	8,13293	8,90441	9,66871	10,47568
10	6,55583	7,02075	8,15702	9,05036	9,86440	10,66852	11,51533
11	7,33581	7,82934	9,03090	9,97161	10,82624	11,66836	12,55317
12	8,12496	8,64594	9,91010	10,89620	11,78972	12,66823	13,58944
13	8,92222	9,46962	10,79398	11,82373	12,75462	13,66811	14,62431
14	9,72672	10,29962	11,68206	12,75388	13,72081	14,66802	15,65793
15	10,53773	11,13530	12,57389	13,68639	14,68814	15,66793	16,69043
16	11,35465	11,97613	13,46913	14,62103	15,65651	16,66785	17,72191

d \ α	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
0	1,20397	1,60944	2,30258	2,99573	3,68888	4,60517	5,29832
1	2,43922	2,99431	3,88972	4,74386	5,57164	6,63835	7,43013
2	3,61557	4,27903	5,32232	6,29579	7,22469	8,40595	9,27379
3	4,76223	5,51504	6,68078	7,75366	8,76727	10,04512	10,97748
4	5,89036	6,72098	7,99359	9,15352	10,24159	11,60462	12,59409
5	7,00555	7,90599	9,27467	10,51303	11,66833	13,10848	14,14976
6	8,11105	9,07538	10,53207	11,84240	13,05947	14,57062	15,65968
7	9,20895	10,23254	11,77091	13,14811	14,42268	15,99996	17,13359
8	10,30068	11,37977	12,99471	14,43465	15,76319	17,40265	18,57822
9	11,38727	12,51875	14,20599	15,70522	17,08480	18,78312	19,99842
10	12,46951	13,65073	15,40664	16,96222	18,39036	20,14468	21,39783
11	13,54798	14,77666	16,59812	18,20751	19,68204	21,48991	22,77926
12	14,62316	15,89731	17,78158	19,44257	20,96158	22,82084	24,14494
13	15,69544	17,01328	18,95796	20,66857	22,23040	24,13912	25,49669
14	16,78512	18,12509	20,12801	21,88648	23,48962	25,44609	26,83598
15	17,83246	19,23316	21,29237	23,09713	24,74022	26,74289	28,16406
16	18,89769	20,33782	22,45158	24,30118	25,98300	20,03045	29,48198

Table 8

Valeurs de $\underline{\Delta}'_{\alpha}$ (*d*) et $\overline{\Delta}'_{\alpha}$ (*d*), $\alpha = 0{,}95$

d \ *N*	50	60	80	100	150	200
0	0,07378 0,00000	0,06148 0,00000	0,04611 0,00000	0,03689 0,00000	0,02459 0,00000	0,01844 0,00000
1	0,11257 0,00051	0,09365 0,00042	0,07009 0,00032	0,05600 0,00025	0,03727 0,00017	0,02793 0,00013
2	0,14750 0,00489	0,12248 0,00407	0,09146 0,00305	0,07298 0,00243	0,04849 0,00162	0,03631 0,00121
3	0,18090 0,01263	0,14994 0,01049	0,11172 0,00783	0,08902 0,00625	0,05904 0,00415	0,04417 0,00311
4	0,21362 0,02248	0,17672 0,01863	0,13136 0,01388	0,10454 0,01106	0,06921 0,00734	0,05173 0,00549
5	0,24607 0,03384	0,20317 0,20800	0,15066 0,02082	0,11972 0,01657	0,07912 0,01097	0,05909 0,00820
6	0,27853 0,04640	0,22949 0,03832	0,16975 0,02842	0,13471 0,02259	0,08886 0,01493	0,06630 0,01115
7	0,31115 0.05995	0,25582 0,04942	0,18875 0,03657	0,14957 0,02902	0,09848 0,01915	0,07341 0,01429
8	0,34408 0,07440	0,28226 0,06120	0,20772 0,04518	0,16435 0,03580	0,10801 0,02358	0,08044 0,01758
9	0,37742 0,08966	0,30889 0,07360	0,22671 0,05419	0,17910 0,04289	0,11748 0,02819	0,08741 0,02100
10	0,41126 0,10570	0,33578 0,08657	0,24576 0,06358	0,19385 0,05025	0,12691 0,03297	0,09434 0,02453
11	0,44568 0,12247	0,36297 0,10008	0,26490 0,07331	0,20863 0,05785	0,13631 0,03788	0,10123 0,02816
12	0,48077 0,13996	0,39053 0,11411	0,28417 0,08336	0,22344 0,06568	0,14569 0,04293	0,10810 0,03189
13	0,51659 0,15818	0,41848 0,12865	0,30359 0,09372	0,23831 0,07372	0,15507 0,04809	0,11495 0,03569
14	0,55322 0,17711	0,44688 0,14368	0,32318 0,10437	0,25325 0,08198	0,16445 0,05337	0,12178 0,03957
15	0,59074 0,19677	0,47577 0,15921	0,34295 0,11531	0,26828 0,09042	0,17384 0,05875	0,12861 0,04352
16	0,62922 0,21717	0,50519 0,17524	0,36294 0,12654	0,28341 0,09906	0,18325 0,06423	0,13544 0,04753
17	0,66875 0,23833	0,53518 0,19177	0,38314 0,13804	0,29864 0,10788	0,19267 0,06980	0,14226 0,05160
18	0,70942 0,26027	0,56578 0,20881	0,40360 0,14982	0,31399 0,11688	0,20213 0,07547	0,14909 0,05574
19	0,75131 0,28303	0,59704 0,22637	0,42431 0,16188	0,32947 0,12607	0,21161 0,08123	0,15592 0,05993

Table 9

Vérification de l'hypothèse sur l'égalité des probabilités de fonctionnement sans défaillance des éléments de deux types avec une probabilité d'erreur $\alpha = 0{,}1$

$\frac{N_1}{N_1+N_2}=$	0,1		1/6		0,2		0,25		0,3		1/3		0,4		0,5	
d_1+d_2	d'	d"	d'	d"	d'	d"	d'	d"	d'	d"	d'	d"	d'	d"	d'	d"
0	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
2	*	2	*	2	*	2	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
3	*	2	*	3	*	3	*	3	*	3	*	3	*	*	*	*
4	*	3	*	3	*	3	*	4	*	4	*	4	*	4	*	*
5	*	3	*	3	*	4	*	4	*	4	*	4	*	5	0	5
6	*	3	*	4	*	4	*	4	*	5	*	5	0	5	0	6
7	*	3	*	4	*	4	*	5	*	5	*	5	0	6	0	7
8	*	3	*	4	*	5	*	5	*	6	0	6	0	6	1	7
9	*	4	*	4	*	5	*	5	0	6	0	6	0	7	1	8
10	*	4	*	5	*	5	*	6	0	6	0	7	1	8	1	9
11	*	4	*	5	*	6	0	6	0	7	0	7	1	8	2	9
12	*	4	*	5	*	6	0	7	0	7	0	8	1	9	2	10
13	*	4	*	6	*	6	0	7	0	8	1	8	1	9	3	10
14	*	4	*	6	0	6	0	7	1	8	1	9	2	10	3	11
15	*	5	*	6	0	7	0	8	1	9	1	9	2	10	3	12
16	*	5	*	6	0	7	0	8	1	9	1	9	2	11	4	12
17	*	5	0	7	0	7	0	8	1	9	2	10	3	11	4	13
18	*	5	0	7	0	8	1	9	1	10	2	10	3	12	5	13
19	*	5	0	7	0	8	1	9	2	10	2	11	3	12	5	14
20	*	5	0	7	0	8	1	9	2	10	[illegible]	11	3	13	5	15
21	*	5	0	7	0	8	1	10	2	11	3	12	4	13	6	15
22	*	6	0	8	1	9	1	10	2	11	3	12	4	14	6	16
23	*	6	0	8	1	9	2	10	2	12	3	12	4	14	7	16
24	*	6	0	8	1	9	2	11	3	12	3	13	5	15	7	17
25	*	6	0	8	1	9	2	11	3	12	4	13	5	15	7	18
26	*	6	0	9	1	10	2	11	3	13	4	14	5	16	8	18
27	*	6	1	9	1	10	2	12	3	13	4	14	6	16	8	19
28	*	7	1	9	1	10	2	12	4	13	4	15	6	16	9	19
29	0	7	1	9	1	10	3	12	4	14	5	15	6	17	9	20
30	0	7	1	10	2	11	3	13	4	14	5	15	7	17	10	20

Limites de confiance de niveau 0,95 pour le paramètre

d \ N—d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	0,975	0,842	0,708	0,602	0,522	0,459	0,410	0,369	0,336
	—	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	1,000	0,987	0,906	0,806	0,716	0,641	0,579	0,527	0,483	0,445
	0,025	0,013	0,008	0,006	0,005	0,004	0,004	0,003	0,003	0,003
2	1,000	0,992	0,932	0,853	0,777	0,710	0,651	0,600	0,556	0,518
	0,158	0,094	0,068	0,053	0,043	0,037	0,032	0,028	0,025	0,023
3	1,000	0,994	0,947	0,882	0,816	0,755	0,701	0,652	0,610	0,572
	0,292	0,194	0,147	0,118	0,099	0,085	0,075	0,067	0,060	0,055
4	1,000	0,995	0,957	0,901	0,843	0,788	0,738	0,692	0,651	0,614
	0,398	0,284	0,223	0,184	0,157	0,137	0,122	0,109	0,099	0,091
5	1,000	0,996	0,963	0,915	0,863	0,813	0,766	0,723	0,684	0,649
	0,478	0,359	0,290	0,245	0,212	0,187	0,167	0,151	0,139	0,128
6	1,000	0,996	0,968	0,925	0,878	0,833	0,789	0,749	0,711	0,677
	0,541	0,421	0,349	0,299	0,262	0,234	0,211	0,192	0,177	0,163
7	1,000	0,997	0,972	0,933	0,891	0,849	0,808	0,770	0,734	0,701
	0,590	0,473	0,400	0,348	0,308	0,277	0,251	0,230	0,213	0,198
8	1,000	0,997	0,975	0,940	0,901	0,861	0,823	0,787	0,753	0,722
	0,631	0,517	0,444	0,390	0,349	0,316	0,289	0,266	0,247	0,230
9	1,000	0,997	0,977	0,945	0,909	0,872	0,837	0,802	0,770	0,740
	0,664	0,555	0,482	0,428	0,386	0,351	0,323	0,299	0,278	0,260
10	1 000	0,998	0,979	0,950	0,916	0,882	0,848	0,816	0,785	0,756
	0,692	0,587	0,516	0,462	0,419	0,384	0,354	0,329	0,308	0,289
11	1,000	0,998	0,981	0,953	0,922	0,890	0,858	0,827	0,797	0,769
	0,715	0,615	0,572	0,492	0,449	0,413	0,383	0,357	0,335	0,315
12	1,000	0,998	0,982	0,957	0,927	0,897	0,867	0,837	0,809	0,782
	0,735	0,640	0,572	0,519	0,476	0,440	0,410	0,384	0,361	0,340
13	1,000	0,998	0,983	0,960	0,932	0,903	0,874	0,846	0,819	0,793
	0,753	0,661	0,595	0,544	0,501	0,465	0,435	0,408	0,384	0,364
14	1,000	0,998	0,984	0,962	0,936	0,909	0,881	0,854	0,828	0,803
	0,768	0,681	0,617	0,566	0,524	0,488	0,457	0,430	0,407	0,385
15	1,000	0,998	0,985	0,964	0,939	0,913	0,887	0,861	0,836	0,812
	0,782	0,698	0,636	0,586	0,544	0,509	0,478	0,451	0,427	0,406
16	1,000	0,999	0,986	0,966	0,943	0,918	0,893	0,868	0,844	0,820
	0,794	0,713	0,653	0,604	0,563	0,529	0,498	0,471	0,447	0,425
17	1,000	0,999	0,987	0,968	0,946	0,922	0,898	0,874	0,851	0,828
	0,805	0,727	0,669	0,621	0,581	0,547	0,516	0,488	0,465	0,443
18	1,000	0,999	0,988	0,970	0,948	0,925	0,902	0,879	0,857	0,835
	0,815	0,740	0,683	0,637	0,597	0,564	0,533	0,506	0,482	0,460
19	1,000	0,999	0,988	0,971	0,950	0,929	0,906	0,884	0,862	0,841
	0,824	0,751	0,696	0,651	0,612	0,579	0,549	0,522	0,408	0,476
20	1,000	0,999	0,989	0,972	0,953	0,932	0,910	0,889	0,868	0,847
	0,832	0,762	0,708	0,664	0.626	0,593	0,564	0,537	0,513	0,492

Exemple. Si lors des essais de 25 éléments d'après le plan [N, B, T] 7 éléments 0,95 que la probabilité $P(T)$ de panne de l'élément est comprise dans l'intervalle

*) Y. Yanko, Tables mathématico-statistiques, Gosstatizdat, Moscou, 1961.

Table 10

de la distribution binomiale pour les petits N *)

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,308	0,285	0,265	0,247	0,232	0,218	0,206	0,195	0,185	0,176	0,168
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0 000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,413	0,385	0,360	0,339	0,319	0,302	0,287	0,273	0,260	0,249	0,238
0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
0,484	0,545	0,428	0,405	0,383	0,364	0,347	0,331	0,317	0,304	0,292
0,021	0,019	0,018	0,017	0,016	0,015	0,014	0,013	0,012	0,012	0,011
0,538	0,508	0,481	0,456	0,434	0,414	0,396	0,379	0,363	0,349	0,336
0,050	0,047	0,043	0,040	0,038	0,036	0,034	0,032	0,030	0,029	0,028
0.581	0,551	0,524	0,499	0,476	0,456	0,437	0,419	0,403	0,388	0,374
0,084	0,078	0,073	0,068	0,064	0,061	0,057	0,054	0,052	0,050	0,047
0,616	0,587	0,560	0,535	0,512	0,491	0,471	0,453	0,436	0,421	0,407
0,118	0,110	0,103	0,097	0,091	0,087	0,082	0,078	0,075	0.071	0,068
0,646	0,617	0,590	0,565	0,543	0,522	0,502	0,484	0,467	0,451	0,436
0,152	0,142	0,133	0,126	0,119	0,113	0,107	0,102	0,098	0,094	0,090
0,671	0,643	0,616	0,592	0,570	0,549	0,529	0,512	0,494	0,478	0,463
0,184	0,173	0,163	0,154	0,146	0,139	0,132	0,126	0,121	0,116	0,111
0,692	0,665	0,639	0,616	0,593	0,573	0,553	0,535	0,518	0,502	0,487
0,215	0,203	0,191	0,181	0,172	0,164	0,156	0,149	0,143	0,138	0,132
0,711	0,685	0,660	0,636	0,615	0,594	0,575	0,557	0,540	0,524	0,508
0,244	0,231	0,218	0,207	0,197	0,188	0,180	0,172	0,165	0,159	0,153
0,728	0,702	0,678	0,655	0,634	0,614	0,595	0,577	0,560	0,544	0,528
0,272	0,257	0,244	0,232	0,221	0,211	0,202	0,194	0,186	0,179	0,173
0,743	0,718	0,694	0,672	0,651	0,631	0,612	0,594	0,578	0,561	0,546
0,298	0,282	0,268	0,256	0,244	0,234	0,224	0,215	0,207	0,199	0,192
0,756	0,732	0,709	0,687	0,666	0,647	0,628	0,611	0,594	0,578	0,563
0,322	0,306	0,291	0,278	0,266	0,255	0,245	0,235	0,227	0,218	0,211
0,768	0,744	0,722	0,701	0,680	0,661	0,643	0,626	0,609	0,594	0,579
0,345	0,328	0,313	0,299	0,287	0,275	0,264	0,255	0,245	0,237	0,229
0,779	0,756	0,734	0,713	0,694	0,675	0,657	0,640	0,624	0,608	0,593
0,366	0,349	0,334	0,320	0,306	0,295	0,283	0,273	0,264	0,255	0,247
0,789	0,766	0,745	0,725	0,705	0,687	0,669	0,653	0,637	0,621	0,607
0,386	0,369	0,353	0,339	0,325	0,313	0,302	0,291	0,281	0,272	0,263
0,798	0,776	0,755	0,736	0,717	0,698	0,681	0,665	0,649	0,634	0,619
0,405	0,388	0,372	0,357	0,343	0,331	0,319	0,308	0,298	0,288	0,280
0,806	0,785	0,765	0,745	0,727	0,709	0,692	0,676	0,660	0,645	0,631
0,423	0,406	0,389	0,374	0,360	0,347	0,335	0,324	0,314	0,304	0,295
0,814	0,793	0,773	0,755	0,736	1,719	0,702	0,686	0,671	0,656	0,642
0,440	0,422	0,406	0,391	0,376	0,363	0,351	0,340	0,329	0,319	0,310
0,821	0,801	0,782	0,763	0,745	0,728	0,712	0,696	0,681	0,666	0,652
0,456	0,439	0,422	0,408	0,392	0,379	0,366	0,355	0,344	0,334	0,324
0,827	0,808	0,789	0,771	0,753	0,737	0,720	0,705	0,690	0,676	0,662
0,472	0,454	0,437	0,421	0,407	0,393	0,381	0,369	0,358	0,348	0,338

sont tombés en panne, alors on peut affirmer avec une probabilité non inférieure à $0,121 < P(T) < 0,494$, puisque dans le cas $d = 7$, $N - d = 18$.

Table 11

Valeurs critiques de la distribution de F*)

a) $f_{0,99}$

f_2 \ f_1	2	4	6	8	10	12	20	24	30	40	60	120	∞
2	99,000	99,249	99,332	99,374	99,399	99,416	99,449	99,458	99,466	99,474	99,483	99,491	99,501
4	18,000	15,977	15,207	14,799	14,546	14,374	14,020	13,929	13,838	13,745	13,652	13,558	13,463
6	10,925	9,148	8,466	8,102	7,874	7,718	7,396	7,313	7,229	7,143	7,057	6,969	6,880
8	8,649	7,006	6,371	6,029	5,814	5,667	5,359	5,279	5,198	5,116	5,032	4,946	4,859
10	7,559	5,994	5,386	5,057	4,849	4,706	4,405	4,327	4,247	4,165	4,082	3,997	3,909
12	6,927	5,412	4,821	4,499	4,296	4,155	3,858	3,781	3,701	3,619	3,536	3,449	3,361
14	6,515	5,035	4,456	4,140	3,939	3,800	3,505	3,427	3,348	3,266	3,181	3,094	3,004
16	6,226	4,773	4,202	3,890	3,691	3,553	3,259	3,181	3,101	3,018	2,933	2,845	2,753
18	6,013	4,579	4,015	3,705	3,508	3,371	3,077	2,999	2,919	2,835	2,749	2,660	2,566
20	5,849	4,431	3,871	3,564	3,368	3,231	2,938	2,859	2,779	2,695	2,608	2,517	2,421
22	5,719	4,313	3,758	3,453	3,258	3,121	2,827	2,749	2,668	2,583	2,495	2,403	2,306
24	5,614	4,218	3,667	3,363	3,168	3,032	2,738	2,659	2,577	2,492	2,404	2,310	2,211
26	5,526	4,140	3,591	3,288	3,094	2,958	2,664	2,585	2,503	2,417	2,327	2,233	2,132
28	5,453	4,074	3,528	3,226	3,032	2,896	2,602	2,522	2,440	2,354	2,263	2,167	2,064
30	5,390	4,018	3,474	3,173	2,979	2,843	2,549	2,469	2,386	2,299	2,208	2,111	2,006
40	5,179	3,828	3,291	2,993	2,801	2,665	2,369	2,288	2,203	2,114	2,019	1,917	1,805
60	4,977	3,649	3,119	2,823	2,632	2,469	2,198	2,115	2,029	1,936	1,836	1,726	1,601
120	4,787	3,480	2,956	2,663	2,472	2,336	2,035	1,950	1,860	1,763	1,656	1,533	1,381
∞	4,605	3,319	2,802	2,511	2,321	2,185	1,878	1,791	1,696	1,592	1,473	1,325	1,000

*) Y. Yanko, Tables mathématico-statistiques, Gosstatizdat, Moscou, 1961.

Suite de la table 11

b) $f_{0.995}$

f_2 \ f_1	2	4	6	8	10	12	20	24	30	40	60	120	∞
2	199,00	199,25	199,33	199,37	199,40	199,42	199,45	199,46	199,47	199,47	199,48	199,49	199,51
4	26,284	23,155	21,975	21,352	20,967	20,705	20,167	20,030	19,892	19,752	19,611	19,468	19,325
6	14,544	12,028	11,073	10,566	10,250	10,034	9,589	9,474	9,358	9,241	9,122	9,002	8,879
8	11,042	8,805	7,952	7,496	7,211	7,015	6,608	6,503	6,396	6,288	6,177	6,065	5,951
10	9,427	7,343	6,545	6,116	5,847	5,661	5,274	5,173	5,071	4,966	4,859	4,750	4,639
12	8,510	6,521	5,575	5,345	5,086	4,906	4,530	4,432	4,331	4,228	4,123	4,015	3,904
14	7,922	5,998	5,257	4,857	4,603	4,428	4,059	3,961	3,862	3,760	3,655	3,547	3,436
16	7,514	5,638	4,913	4,521	4,272	4,099	3,734	3,638	3,539	3,437	3,332	3,224	3,112
18	7,215	5,375	4,663	4,276	4,031	3,860	3,498	3,402	3,303	3,201	3,096	2,987	2,873
20	6,987	5,174	4,472	4,090	3,847	3,678	3,318	3,222	3,123	3,022	2,916	2,806	2,690
22	6,806	5,017	4,323	3,944	3,703	3,535	3,176	3,081	2,982	2,880	2,774	2,663	2,546
24	6,661	4,890	4,202	3,826	3,587	3,420	3,062	3,967	2,868	2,765	2,659	2,546	2,428
26	6,541	4,785	4,103	3,730	3,492	3,325	2,969	2,873	2,774	2,671	2,563	2,450	2,330
28	6,440	4,698	4,020	3,649	3,412	3,246	2,890	2,794	2,695	2,592	2,483	2,369	2,247
30	6,335	4,623	3,949	3,580	3,344	3,179	2,823	2,727	2,628	2,524	2,415	2,300	2,176
40	6,066	4,374	3,713	3,350	3,117	2,953	2,598	2,502	2,402	2,296	2,184	2,064	1,932
60	5,795	4,140	3,492	3,134	2,904	2,742	2,387	2,290	2,187	2,079	1,962	1,834	1,688
120	5,539	3,921	3,285	2,933	2,705	2,544	1,188	2,089	1,984	1,871	1,747	1,606	1,431
∞	5,298	3,715	3,091	2,744	2,519	2,358	2,000	1,898	1,789	1,669	1,533	1,364	1,000

Table 12

Critère de Hartley *)

n	$h_{0,05}$	$h_{0,01}$	n	$h_{0,05}$	$h_{0,01}$
2	39	199	8	403	2063
3	88	448	9	475	2432
4	142	729	10	550	2813
5	202	1036	11	626	3204
6	266	1362	12	704	3605
7	333	1705			

*) H. O. Hartley. The maximum F-ratio as a short-cut test of heterogeneity of variance. Biometrika 37 (1950), 308—312.

Table 13

Critère de Fisher *)

$\alpha=0,95$		$\alpha=0,95$		$\alpha=0,95$	
n	$g_\alpha(n)$	n	$g_\alpha(n)$	n	$g_\alpha(n)$
5	0,68377	25	0,22805	40	0,15738
10	0,44495	30	0,19784	45	0,14310
15	0,33462	35	0,17513	50	0,13135
20	0,27040				

*) R. A. Fisher. Tests of significance in harmonic analysis. Proc. Roy. Soc. 125 (1929), 54-59.

Table 14

Valeurs de la fonction $y=2$ arc sin $\sqrt{x}$ *)

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,000	0,200	0,284	0,348	0,403	0,451	0,495	0,536	0,574	0,609
0,10	0,644	0,676	0,707	0,738	0,767	0,795	0,823	0,850	0,876	0,902
0,20	0,927	0,952	0,976	1,000	1,024	1,047	1,070	1,093	1,115	1,137
0,30	1,159	1,181	1,203	1,224	1,245	1,266	1,287	1,308	1,328	1,349
0,40	1,369	1,390	1,410	1,430	1,451	1,471	1,491	1,511	1,531	1,551
0,50	1,571	1,591	1,611	1,631	1,651	1,671	1,691	1,711	1,731	1,752
0,60	1,772	1,793	1,813	1,834	1,855	1,875	1,897	1,918	1,939	1,961
0,70	1,982	2,004	2,026	2,049	2,071	2,094	2,118	2,141	2,165	2,190
0,80	2,214	2,240	2,265	2,292	2,319	2,346	2,375	2,404	2,434	2,465
0,90	2,498	2,532	2,568	2,606	2,647	2,691	2,739	2,793	2,858	2,941

*) Y. Yanko. Tables mathématico-statistiques. Gosstatizdat, Moscou, 1961.

Table 15

Critère de Kolmogorov. Valeurs de la fonction de Kolmogorov $K(y)$ *)

y	$K(y)$	y	$K(y)$	y	$K(y)$	y	$K(y)$	y	$K(y)$	y	$K(y)$
		0,61	0,1492	1,00	0,7300	1,40	0,9603	1,80	$0{,}9^{2}693$	2,20	$0{,}9^{3}874$
		0,62	0,1632	1,01	0,7406	1,41	0,9625	1,81	$0{,}9^{2}715$	2,21	$0{,}9^{3}886$
		0,63	0,1777	1,02	0,7508	1,42	0,9645	1,82	$0{,}9^{2}735$	2,22	$0{,}9^{3}896$
		0,64	0,1927	1,03	0,7608	1,43	0,9665	1,83	$0{,}9^{2}753$	2,23	$0{,}9^{4}04$
		0,65	0,2080	1,04	0,7704	1,44	0,9684	1,84	$0{,}9^{2}770$	2,24	$0{,}9^{4}12$
		0,66	0,2236	1,05	0,7798	1,45	0,9701	1,85	$0{,}9^{2}787$	2,25	$0{,}9^{4}20$
0,28	$0{,}0^{5}1$	0,67	0,2396	1,06	0,7889	1,46	0,9718	1,86	$0{,}9^{2}802$	2,26	$0{,}9^{4}26$
0,29	$0{,}0^{5}4$	0,68	0,2558	1,07	0,7976	1,47	0,9734	1,87	$0{,}9^{2}814$	2,27	$0{,}9^{4}34$
0,30	$0{,}0^{5}9$	0,69	0,2722	1,08	0,8061	1,48	0,9750	1,88	$0{,}9^{2}830$	2,28	$0{,}9^{4}40$
0,31	$0{,}0^{4}21$	0,70	0,2888	1,09	0,8143	1,49	0,9764	1,89	$0{,}9^{2}842$	2,29	$0{,}9^{4}44$
0,32	$0{,}0^{4}46$	0,71	0,3055	1,10	0,8223	1,50	0,9778	1,90	$0{,}9^{2}854$	2,30	$0{,}9^{4}49$
0,33	$0{,}0^{4}91$	0,72	0,3223	1,11	0,8299	1,51	0,9791	1,91	$0{,}9^{2}864$	2,31	$0{,}9^{4}54$
0,34	$0{,}0^{3}171$	0,73	0,3391	1,12	0,8373	1,52	0,9803	1,92	$0{,}9^{2}874$	2,32	$0{,}9^{4}58$
0,35	$0{,}0^{3}303$	0,74	0,3560	1,13	0,8445	1,53	0,9815	1,93	$0{,}9^{2}884$	2,33	$0{,}9^{4}62$
0,36	$0{,}0^{3}511$	0,75	0,3728	1,14	0,8514	1,54	0,9826	1,94	$0{,}9^{2}892$	2,34	$0{,}9^{4}65$
0,37	$0{,}0^{3}826$	0,76	0,3896	1,15	0,8580	1,55	0,9836	1,95	$0{,}9^{3}004$	2,35	$0{,}9^{4}68$
0,38	$0{,}0^{2}128$	0,77	0,4064	1,16	0,8644	1,56	0,9846	1,96	$0{,}9^{3}079$	2,36	$0{,}9^{4}70$
0,39	$0{,}0^{2}193$	0,78	0,4230	1,17	0,8706	1,57	0,9855	1,97	$0{,}9^{3}149$	2,37	$0{,}9^{4}73$
0,40	$0{,}0^{2}281$	0,79	0,4395	1,18	0,8765	1,58	0,9864	1,98	$0{,}9^{3}213$	2,38	$0{,}9^{4}76$
0,41	$0{,}0^{2}397$	0,80	0,4558	1,19	0,8822	1,59	0,9873	1,99	$0{,}9^{3}273$	2,39	$0{,}9^{4}78$

Suite de la table 15

y	$K(y)$	y	$K(y)$	y	$K(y)$	y	$K(y)$	y	$K(y)$	y	$K(y)$
0,42	$0,0^{2}548$	0,81	0,4720	1,20	0,8877	1,60	0,9880	2,00	$0,9^{3}329$	2,40	$0,9^{4}80$
0,43	$0,0^{2}738$	0,82	0,4880	1,21	0,8930	1,61	0,9888	2,01	$0,9^{3}380$	2,41	$0,9^{4}32$
0,44	$0,0^{2}973$	0,83	0,5038	1,22	0,8981	1,62	0,9895	2,02	$0,9^{3}428$	2,42	$0,9^{4}84$
0,45	0,0126	0,84	0,5194	1,23	0,9030	1,63	$0,9^{2}015$	2,03	$0,9^{3}474$	2,43	$0,9^{4}86$
0,46	0,0160	0,85	0,5347	1,24	0,9076	1,64	$0,9^{2}078$	2,04	$0,9^{3}516$	2,44	$0,9^{4}87$
0,47	0,0200	0,86	0,5497	1,25	0,9121	1,65	$0,9^{2}136$	2,05	$0,9^{3}552$	2,45	$0,9^{4}88$
0,48	0,0247	0,87	0,5645	1,26	0,9164	1,66	$0,9^{2}192$	2,06	$0,9^{3}588$	2,46	$0,9^{4}39$
0,49	0,0300	0,88	0,5791	1,27	0,9205	1,67	$0,9^{2}244$	2,07	$0,9^{3}620$	2,47	$0,9^{5}$
0,50	0,0360	0,89	0,5933	1,28	0,9245	1,68	$0,9^{2}293$	2,08	$0,9^{3}650$	2,48	$0,9^{5}1$
0,51	0,0428	0,90	0,6073	1,29	0,9283	1,69	$0,9^{2}339$	2,09	$0,9^{3}680$	2,49	$0,9^{5}2$
0,52	0,0503	0,91	0,6209	1,30	0,9319	1,70	$0,9^{2}383$	2,10	$0,9^{3}705$	2,50	$0,9^{5}25$
0,53	0,0585	0,92	0,6343	1,31	0,9354	1,71	$0,9^{2}423$	2,11	$0,9^{3}723$	2,55	$0,9^{5}56$
0,54	0,0675	0,93	0,6473	1,32	0,9387	1,72	$0,9^{2}461$	2,12	$0,9^{3}750$	2,60	$0,9^{5}74$
0,55	0,0772	0,94	0,6601	1,33	0,9418	1,73	$9,9^{2}497$	2,13	$0,9^{3}770$	2,65	$0,9^{5}84$
0,56	0,0876	0,95	0,6725	1,34	0,9449	1,74	$0,9^{2}531$	2,14	$0,9^{3}790$	2,70	$0,9^{6}0$
0,57	0,0986	0,96	0,6846	1,35	0,9477	1,75	$0,9^{2}562$	2,15	$0,9^{3}806$	2,75	$0,9^{6}4$
0,58	0,1104	0,97	0,6964	1,36	0,9505	1,76	$0,9^{2}592$	2,16	$0,9^{3}822$	2,80	$0,9^{6}7$
0,59	0,1228	0,98	0,7079	1,37	0,9531	1,77	$0,9^{2}620$	2,17	$0,9^{3}838$	2,85	$0,9^{6}82$
0,60	0,1357	0,99	0,7191	1,38	0,9556	1,78	$0,9^{2}646$	2,18	$0,9^{3}852$	2,90	$0,9^{7}$
				1,39	0,9580	1,79	$0,9^{2}670$	2,19	$0,9^{3}864$	2,95	$0,9^{7}4$
										3,00	$0,9^{7}7$

*) Y. Yanko, Tables mathématico-statistiques, Gosstatizdat, Moscou, 1961.

Table 16

Valeurs critiques de l'écart maximal des fonctions empirique et théorique de répartition (cas des tailles finies des échantillons)*)

n	$\alpha = 0,20$	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,02$	$\alpha = 0,01$
1	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
2	684	776	842	900	929
3	565	636	708	785	829
4	493	565	624	689	734
5	447	509	563	627	669
6	410	468	519	577	617
7	381	436	483	538	576
8	358	410	454	507	542
9	339	387	430	480	513
10	323	369	409	457	489
11	0,308	0,352	0,391	0,437	0,468
12	296	338	375	419	449
13	285	325	361	404	432
14	275	314	349	390	418
15	266	304	338	377	404
16	258	295	327	366	392
17	250	286	318	355	381
18	244	279	309	346	371
19	237	271	301	337	361
20	232	265	294	329	352
21	0,226	0,259	0,287	0,321	0,344
22	221	253	281	314	337
23	216	247	275	307	330
24	212	242	269	301	323
25	208	238	264	295	317
26	204	233	259	290	311
27	200	229	254	284	305
28	197	225	250	279	300
29	193	221	246	275	295
30	190	218	242	270	290
31	0,187	0,214	0,238	0,266	0,285
32	184	211	234	262	281
33	182	208	231	258	277

*) Y. Yanko, Tables mathématico-statistiques, Gosstatizdat, Moscou, 1961.

Suite de la table 16

n	$a = 0,20$	$a = 0,10$	$a = 0,05$	$a = 0,02$	$a = 0,01$
34	0,179	0,205	0,227	0,254	0,273
35	177	202	224	251	269
36	174	199	221	247	265
37	172	196	218	244	262
38	170	194	215	241	258
39	168	191	213	238	255
40	165	189	210	235	252
41	0,163	0,187	0,208	0,232	0,249
42	162	185	205	229	246
43	160	183	203	227	243
44	158	181	201	224	241
45	156	179	198	222	238
46	155	177	196	219	235
47	153	175	194	217	233
48	151	173	192	215	231
49	150	171	190	213	228
50	148	170	188	211	226
51	0,147	0,168	0,187	0,209	0,224
52	146	166	185	207	222
53	144	165	183	205	220
54	143	163	181	203	218
55	142	162	180	201	216
56	140	160	178	199	214
57	139	159	177	198	212
58	138	158	175	196	210
59	137	156	174	194	208
60	136	155	172	193	207
61	0,135	0,154	0,171	0,191	0,205
62	133	153	170	190	203
63	132	151	168	188	202
64	132	150	167	187	200
65	131	149	166	185	199
66	130	148	164	184	197
67	129	147	163	183	196

Suite de la table 16

n	$a = 0{,}20$	$a = 0{,}10$	$a = 0{,}05$	$a = 0{,}02$	$a = 0{,}01$
68	128	146	162	181	194
69	127	145	161	180	193
70	126	144	160	179	192
71	0,125	0,143	0,159	0,177	0,190
72	124	142	158	176	189
73	123	141	156	175	188
74	122	140	155	174	186
75	122	139	154	173	185
76	121	138	153	172	184
77	120	137	152	170	183
78	119	136	151	169	182
79	119	136	151	168	181
80	118	135	150	167	179
81	0,117	0,134	0,149	0,166	0,178
82	116	133	148	165	177
83	116	132	147	164	176
84	115	131	146	163	175
85	114	131	145	162	174
86	114	130	144	161	173
87	113	129	144	161	172
88	112	128	143	160	171
89	112	128	142	159	170
90	111	127	141	158	169
91	0,111	0,126	0,140	0,157	0,168
92	110	126	140	156	168
93	109	125	139	155	167
94	109	124	138	155	166
95	108	124	137	154	165
96	108	123	137	153	164
97	107	122	136	152	163
98	107	122	135	151	162
99	106	121	135	151	162
100	106	121	134	150	161

Table 17

Critère de Smirnov *)

$n = m$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$	$k = 11$	$k = 12$
1	1,000000											
2	0,666667	1,000000										
3	400000	0,900000	1,000000									
4	228571	771429	0,971429	1,000000								
5	126984	642857	920635	0,992063	1,000000							
6	0,069264	0,525974	0,857143	0,974026	0,997835	1,000000						
7	037296	424825	787879	946970	991841	0,999417	1,000000					
8	019891	339860	717327	912976	981352	997514	0,999845	1,000000				
9	010537	269889	648293	874126	966434	993706	999260	0,999959	1,000000			
10	005542	213070	582476	832179	947552	987659	997943	999783	0,999989	1,000000		
11	0,002903	0,167412	0,520850	0,788524	0,925339	0,979261	0,995634	0,999345	0,999938	0,999997	1,000000	
12	001515	131018	463902	744225	900453	968564	992141	998503	999796	999982	0,999999	
13	000788	102194	411804	700080	873512	955728	987351	997125	999500	999938	999995	1,000000
14	000408	079484	364515	656680	845065	940970	981218	995100	998979	999837	999981	0,999999
15	000211	061669	321862	614453	815584	924536	973752	992344	998163	999647	999948	999994
16	0,000109	0,047744	0,283588	0,573707	0,785465	0,906674	0,965002	0,988801	0,996985	0,999330	0,999880	0,999983
17	000056	036893	249393	534647	755041	887623	955047	984439	995389	998847	999762	999960
18	000029	028460	218952	497410	724582	867606	943982	979252	993331	998160	999571	999917
19	$0^{4}148$	021922	191938	462071	694311	846827	931911	973251	990776	997233	999286	999844
20	$0^{5}761$	016863	168030	428664	664409	825467	918942	966458	987701	996033	998884	999729
21	$0,0^{5}390$	0,012956	0,146921	0,397187	0,635020	0,803688	0,905183	0,958911	0,984095	0,99453	0,99834	0,99956
22	$0^{5}199$	009943	128321	367614	606260	781632	890738	950653	979953	99271	99764	99933
23	$0^{5}102$	007623	111963	339899	578218	759422	875705	941731	975280	99055	99676	99901

Suite de la table 17

$n = m$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$	$k = 11$	$k = 12$
24	$0{,}0^{6}52$	0,005839	0,097600	0,313983	0,550963	0,737166	0,860177	0,932197	0,970087	0,98803	0,99568	0,99860
25	$0^{6}27$	004468	085007	289796	524546	714958	844240	922101	964389	98516	99438	99808
26	$0{,}0^{6}14$	0,003417	0,073980	0,267263	0,499005	0,692877	0,827971	0,911498	0,958206	0,98193	0,99287	0,99744
27	$0^{7}69$	002611	064338	246303	474362	670992	811443	900437	951562	97833	99111	99667
28	$0^{7}35$	001994	055914	226833	450633	649362	794722	888969	944481	97438	98911	99576
29	$0^{7}18$	001522	048563	208772	427823	628036	777865	877140	936989	97007	98686	99469
30	$0^{8}91$	001161	042154	192037	405929	607055	760927	864996	929113	96542	98436	99346
31	$0{,}0^{8}46$	0,000885	0,036570	0,176546	0,384946	0,586455	0,743955	0,852580	0,920880	0,96044	0,98160	0,9921
32	$0^{8}23$	000674	031710	162223	364861	566264	726992	839930	912319	95514	97859	9905
33	$0^{8}12$	000513	027483	148989	345657	546505	710076	827086	903455	94953	97533	9888
34	$0^{9}60$	000391	023808	136773	327316	527198	693242	814080	894315	94363	97182	9868
35	$0^{9}31$	000297	020616	125505	309816	508355	676519	800946	884924	93745	96807	9847
36	$0{,}0^{9}16$	0,000226	0,017845	0,115120	0,293133	0,489989	0,659934	0,787713	0,875307	0,93101	0,96407	0,9824
37	$0^{10}79$	000172	015440	105553	277243	472107	643512	774409	865487	92432	95985	9799
38	$0^{10}40$	000131	013355	096747	262121	354713	627273	761059	855487	91740	95540	9773
39	$0^{10}20$	000099	011547	088645	247738	437811	611234	747687	845327	91027	95074	9744
40	$0^{10}10$	000075	009981	081195	234069	321400	595413	734313	835029	90293	94587	9714

*) F. J. Massey : a) The distribution table for the deviation between two sample cumulatives, Ann. Math. Statist. 23, N°3 (1952), 435-442. b) The distribution of the maximum deviation between two sample cumulatives step functions, Ann. Math. Statist. 22, N° 1 (1951), 125-128.

Table 18

Limites du domaine critique pour le critère des signes *)

n	Limites unilatérales		
	2,5 %	1%	0,5%
5	0 5	0 5	0 5
6	1 5	0 6	0 6
7	1 6	1 6	0 7
8	1 7	1 7	1 7
9	2 7	1 8	1 8
10	2 8	1 9	1 9
11	2 9	2 9	1 10
12	3 9	2 10	2 10
13	3 10	2 11	2 11
14	3 11	3 11	2 12
15	4 11	3 12	3 12
16	4 12	3 13	3 13
17	5 12	4 13	3 14
18	5 13	4 14	4 14
19	5 14	5 14	4 15
20	6 14	5 15	4 16
21	6 15	5 16	5 16
22	6 16	6 16	5 17
23	7 16	6 17	5 18
24	7 17	6 18	6 18
25	8 17	7 18	6 19
26	8 18	7 19	7 19
27	8 19	8 19	7 20
28	9 19	8 20	7 21
29	9 20	8 21	8 21
30	10 20	9 21	8 22
31	10 21	9 22	8 23
32	10 22	9 23	9 23
33	11 22	10 23	9 24
34	11 23	10 24	10 24
35	12 23	11 24	10 25
36	12 24	11 25	10 26
37	13 24	11 26	11 26
38	13 25	12 26	11 27
39	13 26	12 27	12 27
40	14 26	13 27	12 28
41	14 27	13 28	12 29
42	15 27	14 28	13 29
43	15 28	14 29	13 30
44	16 28	14 30	14 30
45	16 29	15 30	14 31
46	16 30	15 31	14 32
47	17 30	16 31	15 32
48	17 31	16 32	15 33
49	18 31	16 33	16 33
50	18 32	17 33	16 34
51	19 32	17 34	16 35
52	19 33	18 34	17 35
53	19 34	18 35	17 36
54	20 34	19 35	18 36
	5%	2%	1%
n	Limites bilatérales		

n	Limites unilatérales		
	2,5%	1%	0,5%
55	20 35	19 36	18 37
56	21 35	19 37	18 38
57	21 36	20 37	19 38
58	22 36	20 38	19 39
59	22 37	21 38	20 39
60	22 38	21 39	20 40
61	23 38	21 40	21 40
62	23 39	22 40	21 41
63	24 39	22 41	21 42
64	24 40	23 41	22 42
65	25 40	23 42	22 43
66	25 41	24 42	23 43
67	26 41	24 43	23 44
68	26 42	24 44	23 45
69	26 43	25 44	24 45
70	27 43	25 45	24 46
71	27 44	26 45	25 46
72	28 44	26 46	25 47
73	28 45	27 46	26 47
74	29 45	27 47	26 48
75	29 46	27 48	26 49
76	29 47	28 48	27 49
77	30 47	28 49	27 50
78	30 48	29 49	28 50
79	31 48	29 50	28 51
80	31 49	30 50	29 51
81	32 49	30 51	29 52
82	32 50	31 51	29 53
83	33 50	31 52	30 53
84	33 51	31 53	30 54
85	33 52	32 53	31 54
86	34 52	32 54	31 55
87	34 53	33 54	32 55
88	35 53	33 55	32 56
89	35 54	34 55	32 57
90	36 54	34 56	33 57
91	36 55	34 57	33 58
92	37 55	35 57	34 58
93	37 56	35 58	34 59
94	38 56	36 58	35 59
95	38 57	36 59	35 60
96	38 58	37 59	35 61
97	39 58	37 60	36 61
98	39 59	38 60	36 62
99	40 59	38 61	37 62
100	40 60	38 62	37 63
	5%	2%	1%
n	Limites bilatérales		

*) Van der Waerden. Statistique mathématique. IL, 1960.

Table 19

Distribution de la statistique de Wilcoxon*)

u ↓	2; 5	2; 6	2; 7	2; 8	2; 9	2; 10	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6	3; 7	3; 8	3; 9	3; 10
	Tailles des échantillons *g* et *h*													
0	4,76	3,57	2,78	2,22	1,82	1,52	5,00	2,86	1,79	1,19	0,83	0,61	0,45	0,35
1				4,44	3,64	3,03			3,57	2,38	1,67	1,21	0,91	0,70
2										4,76	3,33	2,42	1,82	1,40
3												4,24	3,18	2,45
4													5,00	3,85

u ↓	4; 4	4; 5	4; 6	4; 7	4; 8	4; 9	4; 10	5; 5	5; 6	5; 7	5; 8	5; 9	5; 10	6; 6
	Tailles des échantillons *g* et *h*													
0	1,43	0,79	0,48	0,30	0,20	0,14	0,10	0,40	0,22	0,13	0,08	0,05	0,03	0,11
1	2,86	1,59	0,95	0,61	0,40	0,28	0,20	0,79	0,43	0,25	0,16	0,10	0,07	0,22
2		3,17	1,90	1,21	0,81	0,56	0,40	1,59	0,87	0,51	0,31	0,20	0,13	0,43
3			3,33	2,12	1,41	0,98	0,70	2,78	1,52	0,88	0,54	0,35	0,23	0,76
4				3,64	2,42	1,68	1,20	4,76	2,60	1,52	0,93	0,60	0,40	1,30
5					3,64	2,52	1,80		4,11	2,40	1,48	0,95	0,63	2,06
6						3,78	2,70			3,66	2,25	1,45	0,97	3,25
7							3,80				3,26	2,10	1,40	4,65
8											4,66	3,00	2,00	
9												4,15	2,76	
10													3,76	
11													4,96	

*) Van der Waerden. Statistique mathématique, IL, 1960.

Suite de la table 19

u ↓	Tailles des échantillons g et h														
	6; 7	6; 8	6; 9	6; 10	7; 7	7; 8	7; 9	7; 10	8; 8	8; 9	8; 10	9; 9	9; 10	10; 10
0	0,06	0,03	0,02	0,01	0,03	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00				
1	0,12	0,07	0,04	0,02	0,06	0,03	0,02	0,01	0,02	0,01	0,00	0,00		
2	0,23	0,13	0,08	0,05	0,12	0,06	0,03	0,02	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00	
3	0,41	0,23	0,14	0,09	0,20	0,11	0,06	0,04	0,05	0,03	0,02	0,01	0,01	0,00
4	0,70	0,40	0,24	0,15	0,35	0,19	0,10	0,06	0,09	0,05	0,03	0,02	0,01	0,01
5	1,11	0,63	0,38	0,24	0,55	0,30	0,17	0,10	0,15	0,08	0,04	0,04	0,02	0,01
6	1,75	1,00	0,60	0,37	0,87	0,47	0,26	0,15	0,23	0,12	0,07	0,06	0,03	0,02
7	2,56	1,47	0,88	0,55	1,31	0,70	0,39	0,23	0,35	0,19	0,10	0,09	0,05	0,02
8	3,67	2,13	1,28	0,80	1,89	1,03	0,58	0,34	0,52	0,28	0,15	0,14	0,07	0,04
9		2,96	1,80	1,12	2,65	1,45	0,82	0,48	0,74	0,39	0,22	0,20	0,10	0,05
10		4,06	2,48	1,56	3,64	2,00	1,15	0,68	1,03	0,56	0,31	0,28	0,15	0,08
11			3,32	2,10	4,87	2,70	1,56	0,93	1,41	0,76	0,43	0,39	0,21	0,10
12			4,40	2,80		3,61	2,09	1,25	1,90	1,03	0,58	0,53	0,28	0,14
13				3,63		4,69	2,74	1,65	2,49	1,37	0,78	0,71	0,38	0,19
14				4,67			3,56	2,15	3,25	1,80	1,03	0,94	0,51	0,26
15							4,54	2,77	4,15	2,32	1,33	1,22	0,66	0,34
16								3,51		2,96	1,71	1,57	0,86	0,45
17								4,39		3,72	2,17	2,00	1,10	0,57
18										4,64	2,73	2,52	1,40	0,73
19											3,38	3,13	1,75	0,93
20											4,16	3,85	2,17	1,16
21												4,70	2,67	1,44
22													3,26	1,77
23													3,94	2,16
24													4,74	2,62
25														3,15
26														3,76
27														4,46

Table 20

Standard Colombien : échantillonnage simple *)

Nombre de code	Taille d'échantillon	Intervalles de qualité admissible en %													
		0,024—0,035	0,035—0,06	0,06—0,12	0,12—0,17	0,17—0,22	0,22—0,32	0,32—0,65	0,65—1,2	1,2—2,2	2,2—3,2	3,2—4,4	4,4—5,3	5,3—6,4	6,4—8,5
A	5	§	§	§	↓	↓	↓	↓	0	↓	↓	↓	↓	1	1
B	10	§	↓	↓	↓	↓	↓	0	↓	↓	↓	1	1	2	2
C	15	↓	↓	↓	↓	↓	↓	0	↓	↓	1	1	2	2	3
D	20	↓	↓	↓	↓	↓	0	↓	↓	1	1	2	2	3	3
E	30	↓	↓	↓	↓	0	↓	↓	1	2	2	3	3	4	5
F	40	↓	↓	↓	0	↓	↓	↓	1	2	3	3	4	5	6
G	55	↓	↓	0	↓	↓	↓	1	2	3	3	4	5	6	8
H	75	↓	0	↓	↓	↓	↓	1	2	3	4	6	7	8	10
I	115	↓	↓	↓	↓	↓	↓	2	3	5	6	8	10	11	14
J	150	0	↓	↓	↓	↓	1	2	4	6	8	10	12	14	18
K	225	↓	↓	↓	↓	1	2	3	5	8	11	14	17	21	25
L	300	↓	↓	↓	1	2	2	4	7	10	14	18	22	27	1
M	450	↓	↓	1	2	2	3	5	9	14	20	26	1	1	1
N	750	↓	1	2	3	3	5	8	13	23	↑	↑	↑	↑	↑
O	1500	1	2	3	4	6	8	13	24	↑	↑	↑	↑	↑	↑

« § » signifie le contrôle intégral du lot ;
« ↓ », « ↑ » signifient que l'on choisit en qualité de nombre d'acceptation le premier nombre situé plus bas (plus haut) que la flèche.

*) Statistical research group Columbia University, « Sampling inspection », Mc Graw-Hill, N.Y., 1948.

Standard colombien :

Nombre de code	n° de l'échantillon	Taille de l'échantillon	0,024—0,035 A	0,024—0,035 R	0,035—0,06 A	0,035—0,06 R	0,06—0,12 A	0,06—0,12 R	0,12—0,17 A	0,12—0,17 R	0,17—0,22 A	0,17—0,22 R	0,22—0,32 A	0,22—0,32 R
A	1	3	§		§		§		↓		↓		↓	
	2	6												
B	1	7	§		↓		↓		↓		↓		↓	
	2	14												
C	1	10	↓		↓		↓		↓		↓		↓	
	2	20												
D	1	13	↓		↓		↓		↓		↓		+	
	2	26												
E	1	20	↓		↓		↓		↓		+		↓	
	2	40												
F	1	25	↓		↓		↓		+		↓		↓	
	2	50												
G	1	35	↓		↓		+		↓		↓		↓	
	2	70												
H	1	50	↓		+		↓		↓		↓		↓	
	2	100												
I	1	75	↓		↓		↓		↓		↓		0	2
	2	150											1	2
J	1	100	+		↓		↓		↓		0	2	0	3
	2	200									1	2	2	3
K	1	150	↓		↓		↓		0	3	0	3	1	3
	2	300							2	3	2	3	2	3
L	1	200	↓		↓		0	2	0	3	1	3	1	4
	2	400					1	2	2	3	2	3	3	4
M	1	300	↓		0	2	0	3	1	3	1	4	1	6
	2	600			1	2	2	3	2	3	3	4	5	6
N	1	500	0	2	0	3	1	4	1	6	2	5	3	8
	2	1000	1	2	2	3	3	4	5	6	4	5	7	8
O	1	1000	0	3	1	4	1	6	2	8	3	10	5	13
	2	2000	2	3	3	4	5	6	7	8	9	10	12	13

(Intervalles de qualité)

« § » signifie le contrôle intégral du lot ;
«+» indique qu'il faut utiliser les plans du type d'échantillonnage simple ;
«↓», «↑» signifient que les nombres d'acceptation et de rejet sont posés égaux aux « A » et « R » sont respectivement pour accepter et rejeter.

*) Statistical research group Columbia University, «Sampling inspection», Mc Graw-

Table 21

échantillonnage double *)

admissible en %

0,32—0,65		0,65—1,2		1,2—2,2		2,2—3,2		3,2—4,4		4,4—5,3		5,3—6,4		6,4—8,5	
A	R	A	R	A	R	A	R	A	R	A	R	A	R	A	R
↓		+		↓		↓		↓		↓		0	2	0	2
												1	2	1	2
+		↓		↓		↓		0	3	0	3	1	3	1	4
								2	3	2	3	2	3	3	4
+		↓		↓		0	3	0	3	1	3	1	4	1	6
						2	3	2	3	2	3	3	4	5	6
↓		↓		0	3	0	3	0	5	0	5	1	6	1	6
				2	3	2	3	4	5	4	5	5	6	5	6
↓		0	2	1	3	1	4	1	5	1	6	2	7	3	8
		1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8
↓		0	3	1	4	1	5	1	6	2	6	2	9	2	11
		2	3	3	4	4	5	5	6	5	6	8	9	10	11
0	2	1	3	1	5	1	6	2	7	2	9	3	10	4	13
1	2	2	3	4	5	5	6	6	7	8	9	9	10	12	13
0	3	1	4	1	6	2	7	3	10	4	11	5	13	6	17
2	3	3	4	5	6	6	7	9	10	10	11	12	13	16	17
1	3	1	6	3	6	4	9	5	12	6	15	6	19	8	24
2	3	5	6	5	6	8	9	11	12	14	15	18	19	23	24
1	4	2	6	3	10	5	12	6	17	8	20	8	26	11	31
3	4	5	6	9	10	11	12	16	17	19	20	25	26	30	31
2	5	3	8	5	14	7	19	9	24	11	29	14	34	16	44
4	5	7	8	13	14	18	19	23	24	28	29	33	34	43	44
2	7	4	10	6	17	9	25	11	33	14	38	18	45	↑	
6	7	9	10	16	17	24	25	32	33	37	38	44	45		
3	9	5	16	8	26	12	36	16	48	↑		↑		↑	
8	9	15	16	25	26	35	36	47	48						
5	13	7	24	14	41	↑		↑		↑		↑		↑	
12	13	23	24	40	41										
7	26	14	44	↑		↑		↑		↑		↑		↑	
25	26	43	44												

premiers nombres situés plus bas (plus haut) que la flèche ;

Hill, N.Y., 1948.

Standard colombien :

Nombre de code	n° de l'échantillon	Taille de l'échantillon	Intervalles de qualité 0,024—0,035 A	R	0,035—0,06 A	R	0,06—0,12 A	R	0,12—0,17 A	R	0,17—0,22 A	R	0,22—0,32 A	R
A	1 2 3	3 2 2	§		§		§		↓		↓		↓	
B	1 2 3 4 5	4 4 4 4 4	§		↓		↓		↓		↓		↓	
C	1 2 3 4 5	5 5 5 5 5	↓		↓		↓		↓		↓		↓	
D	1 2 3 4 5 6	6 6 6 6 6 6	↓		↓		↓		↓		↓		+	
E	1 2 3 4 5 6 7	8 8 8 8 8 8 8	↓		↓		↓		↓		+		↓	
F	1 2 3 4 5 6 7	10 10 10 10 10 10 10	↓		↓		↓		+		↓		↓	
G	1 2 3 4 5 6 7	14 14 14 14 14 14 14	↓		↓		+		↓		↓		↓	
H	1 2 3 4 5 6 7	20 20 20 20 20 20 20	↓		+		↓		↓		↓		" " " 0 0 0 2	2 2 2 2 2 2 3
I	1 2 3 4 5 6 7	30 30 30 30 30 30 30	↓		↓		↓		↓		" " " 0 0 1 2	2 2 2 2 2 3 3	" " 0 0 1 1 2	2 2 2 2 3 3 3

« A » et « R » sont respectivement pour accepter et rejeter.

Table 22

échantillonnage progressif *)

admissible en %

0,32–0,65		0,65–1,2		1,2–2,2		2,2–3,2		3,2–4,4		4,4–5,3		5,3–6,4		6,4–8,5	
A	R	A	R	A	R	A	R	A	R	A	R	A	R	A	R
↓		+		↓		↓		↓		↓		0	2	0	2
												0	2	0	2
												1	2	2	3
+		↓		↓		↓		*	2	*	2	0	2	0	2
								0	2	0	3	0	3	0	3
								1	3	1	3	1	4	1	4
								1	3	1	3	2	4	2	5
								3	4	3	4	4	5	4	5
+		↓		↓		*	2	*	2	*	2	*	2	0	3
						0	2	0	2	1	3	1	3	0	3
						0	3	0	3	1	3	1	4	2	4
						1	3	1	3	1	3	1	4	3	6
						2	3	3	4	3	4	3	4	5	6
↓		↓		*	2	*	2	*	2	*	2	*	3	*	3
				0	2	0	2	0	3	0	3	1	3	1	4
				0	2	0	3	1	3	1	4	1	5	2	4
				0	3	0	3	2	4	2	4	2	6	2	5
				1	3	1	4	2	4	3	5	3	6	3	6
				2	3	3	4	3	4	4	5	5	6	5	6
↓		*	2	*	2	*	2	*	2	*	3	*	3	0	3
		*	2	0	2	0	3	0	4	0	3	1	4	1	5
		0	2	1	3	1	3	1	4	1	4	2	5	2	6
		1	3	2	4	2	4	2	5	2	5	3	6	3	7
		1	3	2	4	2	4	3	6	4	6	4	6	5	8
		1	3	2	4	2	4	5	7	5	7	6	8	6	8
		2	3	3	4	3	4	6	7	6	7	7	8	8	9
↓		*	2	*	2	*	2	*	3	*	3	*	3	0	4
		*	2	0	3	0	3	0	3	1	4	1	4	1	5
		0	2	1	3	1	4	1	4	2	4	2	6	3	7
		0	3	1	4	2	5	2	6	3	6	4	7	4	8
		1	3	2	4	4	6	3	7	4	7	5	8	5	9
		2	4	2	4	4	6	4	7	5	7	7	9	7	10
		3	4	4	5	5	6	6	7	6	7	8	9	10	11
*	2	*	2	*	2	*	3	*	3	*	3	0	4	0	4
*	2	0	3	0	3	0	3	1	4	1	5	1	5	3	6
0	2	1	3	1	4	1	4	2	4	2	6	3	6	4	8
0	2	1	3	3	5	2	5	3	6	4	7	5	8	6	10
1	3	2	4	3	5	4	6	4	6	6	9	6	9	8	12
2	4	3	5	3	5	4	6	5	7	7	10	8	10	10	14
3	4	4	5	4	5	5	6	6	7	10	11	9	10	13	14
*	2	*	2	*	3	*	3	0	4	0	4	0	4	1	5
*	2	0	3	0	4	1	4	1	5	2	6	3	7	3	8
0	2	1	3	1	4	2	5	3	6	5	7	6	9	6	11
1	3	2	4	2	5	3	6	5	8	6	9	8	11	9	13
1	3	2	4	4	6	5	7	8	10	8	12	10	12	13	16
1	3	2	4	4	6	6	8	9	11	11	14	12	14	16	18
2	3	3	4	5	6	7	8	10	11	13	14	14	15	18	19
*	2	*	3	*	3	0	4	0	4	1	5	1	5	1	7
0	2	0	3	1	4	2	5	3	7	3	7	3	9	5	10
1	3	1	4	3	6	3	8	5	9	6	10	5	12	9	13
2	4	2	6	5	7	4	9	7	11	9	13	8	15	13	18
3	5	3	6	6	8	6	10	9	13	11	15	11	18	18	22
3	5	5	7	7	9	8	12	12	15	14	18	14	20	22	25
4	5	6	7	8	9	11	12	14	15	17	18	19	20	25	26

Nombre de code	n° de l'échantillon	Taille de l'échantillon	Intervalles de qualité											
			0,024 0,035		0,035— 0,06		0,06— 0,12		0,12— 0,17		0,17— 0,22		0,22— 0,32	
			A	R	A	R	A	R	A	R	A	R	A	R
	1	40							”	2	”	2	”	2
	2	40							”	2	”	2	”	2
	3	40							”	2	0	2	0	2
J	4	40	+		↓		↓		0	2	0	2	0	3
	5	40							0	2	1	3	1	3
	6	40							1	3	1	3	2	4
	7	40							2	3	2	3	4	5
	1	50					”	2	”	2	”	2	”	2
	2	50					”	2	”	2	”	2	0	2
	3	50					”	2	0	2	0	2	0	3
	4	50					0	2	0	2	0	3	1	3
K	5	50	↓		↓		0	2	0	2	1	3	2	4
	6	50					0	2	0	3	1	3	2	4
	7	50					0	2	0	3	2	4	2	4
	8	50					1	2	2	3	3	4	3	4
	1	75			”	1	”	2	”	2	”	2	”	2
	2	75			”	2	”	2	”	2	0	2	0	3
	3	75			”	2	0	2	0	2	0	4	0	3
L	4	75	↓		0	2	0	2	0	3	2	4	1	4
	5	75			0	2	0	2	1	4	2	5	2	5
	6	75			1	3	1	3	2	4	2	5	2	5
	7	75			2	3	2	3	3	4	4	5	4	5
	1	100	”	1	”	1	”	2	”	2	”	2	”	3
	2	100	”	2	”	2	”	2	0	3	0	3	0	3
	3	100	”	2	”	2	0	2	0	3	0	3	0	4
	4	100	”	2	0	3	0	3	1	3	1	4	1	4
M	5	100	0	2	0	3	1	3	1	4	1	4	2	5
	6	100	0	2	1	3	1	3	1	4	2	4	3	6
	7	100	0	2	1	3	1	3	2	4	3	5	4	7
	8	100	1	2	2	3	2	3	3	4	5	6	6	7
	1	150	”	1	”	2	”	2	”	2	”	2	”	3
	2	150	”	2	”	2	”	2	0	3	0	4	1	4
	3	150	”	2	0	2	0	3	0	4	1	4	2	4
	4	150	0	2	0	2	0	3	0	4	1	5	3	6
N	5	150	0	2	0	2	1	4	1	4	2	6	4	7
	6	150	0	3	0	3	1	5	2	5	3	6	5	8
	7	150	1	3	0	3	2	5	3	5	4	7	6	9
	8	150	1	3	1	3	3	5	4	6	5	8	7	10
	9	150	2	3	2	3	4	5	5	6	7	8	10	11
	1	300	”	2	”	2	”	3	”	3	”	3	0	4
	2	300	”	2	”	2	”	3	0	4	1	5	1	5
	3	300	0	2	0	3	0	4	1	5	1	6	2	7
	4	300	0	3	1	4	1	4	2	6	3	7	4	9
O	5	300	0	3	2	5	1	5	3	7	4	8	6	11
	6	300	0	3	2	5	2	6	4	7	5	9	8	13
	7	300	0	3	2	5	3	7	5	8	7	10	10	14
	8	300	1	3	3	5	3	7	6	9	8	11	12	15
	9	300	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	15	16

« § » signifie le contrôle intégral ;
« + » indique la nécessité d'utiliser des plans du type d'échantillonnage simple ;
« ↓ », « ↑ » indiquent que les nombres d'acceptation et de rejet sont posés égaux aux
« ” » signifie que si le nombre des articles défectueux décelés est inférieur au nombre
« A » et « R » sont respectivement pour accepter et rejeter.

*) Statistical research group Columbia University, « Sampling inspection », Mc Graw-

Suite de la table 22

admissible en %															
0,32—0,65		0,65—1,2		1,2—2,2		2,2—3,2		3,2—4,4		4,4—5,3		5,3—6,4		6,4—8,5	
A	R	A	R	A	R	A	R	A	R	A	R	A	R	A	R
*	2	*	3	0	4	0	4	1	5	1	6	2	6	2	8
0	3	1	4	1	5	2	7	2	8	5	9	5	11	7	12
1	3	2	4	3	6	5	9	5	11	7	12	9	15	13	16
3	5	4	6	5	8	7	11	8	14	10	16	13	19	18	21
3	5	5	7	6	10	9	13	11	17	13	19	17	22	23	26
3	5	6	8	8	12	11	15	14	19	17	21	22	26	28	31
4	5	8	9	11	12	15	16	18	19	22	23	26	27	30	31
*	2	*	3	0	4	0	5	1	6	2	7	2	7	3	9
0	4	1	4	2	6	3	8	3	9	4	11	7	13	8	14
2	4	2	6	3	8	5	11	7	13	8	15	12	18	14	20
2	5	3	7	5	10	8	13	10	16	12	19	17	22	19	25
3	6	4	8	7	12	10	15	13	19	16	22	21	27	25	31
4	7	5	9	9	14	13	18	16	22	21	26	26	32	30	38
5	7	7	10	11	16	15	20	19	25	25	29	30	36	36	43
6	7	9	10	15	16	19	20	24	25	28	29	36	37	43	44
*	3	0	4	0	5	1	7	2	8	3	9	4	10		
1	4	2	5	3	8	4	10	6	13	8	15	11	16		
1	5	3	7	6	10	8	14	10	17	13	20	18	23		
2	6	5	9	8	13	12	18	15	22	19	26	25	30	↑	
3	6	7	10	11	16	15	21	19	26	25	32	32	36		
5	8	9	11	13	18	18	25	24	31	30	37	39	43		
7	8	10	11	18	19	24	25	30	31	36	37	42	43		
*	3	0	4	0	7	1	8	2	10						
1	5	2	6	4	9	5	13	8	16						
1	6	4	8	6	13	10	18	13	21						
3	7	6	11	9	16	14	22	19	27						
4	8	8	13	12	19	18	26	24	33	↑		↑		↑	
5	9	10	15	15	22	23	31	30	38						
7	10	12	17	19	25	27	35	35	44						
9	10	16	17	24	25	34	35	43	44						
0	4	0	6	1	8										
1	5	3	8	6	13										
2	7	5	11	10	18										
4	9	7	13	15	22										
6	11	10	16	19	27	↑		↑		↑		↑		↑	
8	13	13	19	24	31										
10	14	15	21	28	36										
12	15	18	24	33	41										
15	16	23	24	41	42										
0	6	1	8												
2	9	6	13												
4	11	10	18												
7	14	15	22												
10	17	19	27	↑		↑		↑		↑		↑		↑	
13	20	24	13												
15	23	28	36												
18	24	33	41												
23	24	41	42												

premiers nombres situés plus bas (plus haut) que la flèche ;
d'acceptation, on doit passer à l'échantillon suivant ;

Hill, N.Y., 1948.

Table 23

Valeurs de ρ_c

r	λ	ρ_c
0	1,0	0,367 879
1	1,618 034	0,839 962
2	2,269 531	1,371 102
3	2,945 186	1,942 381
4	3,639 547	2,543 534
5	4,349 048	3,168 185
6	5,071 184	3,812 021
7	5,804 110	4,471 954
8	6,546 411	5,145 672
9	7,296 973	5,831 388
10	8,054 895	6,527 684
11	8,819 440	7,233 412
12	9,589 989	7,947 624
13	10,366 021	8,669 525
14	11,147 089	9,398 444
15	11,932 806	10,133 803
16	12,722 834	10,875 103
17	13,516 878	11,621 909
18	14,314 674	12,373 837
19	15,115 990	13,130 548
20	15,920 615	13,891 741

Table 24

Valeurs de θ_c. Les plans du type d'échantillonnage simple $(n, c)_{23}$ assurant le minimum d'inspection pour une qualité limite donnée de sortie

c	$k_m = 1,25$	1,5	1,75	2,0	2,25	2,5	2,75	3,0
0	1,8577	1,7801	1,7218	1,6761	1,6393	1,6090	1,5836	1,5619
1	5,9938	6,2035	6,4506	6,7231	7,0138	7,3181	7,6328	7,9559
2	12,8489	14,3061	15,9794	17,8538	19,9201	22,1727	24,6074	27,2215
3	22,8056	27,2709	32,7432	39,3031	47,0379	56,0381	66,3953	78,2018
4	36,2546	46,5288	60,1200	77,6940	99,9893	127,8114	162,0318	203,5869
5	53,6074	73,8210	102,7752	143,2597	198,6348	272,8749	370,6220	497,2384
6	75,3021	111,2667	167,1075	251,6220	376,3707	556,2021	809,8459	1160,5589
7	101,8075	161,4402	261,8326	426,3712	688,5724	1095,1553	1709,7170	2617,1010
8	133,6275	227,4595	398,7442	702,7834	1225,9578	2098,7605	3512,8680	5742,6847
9	171,3037	313,0920	593,7016	1133,1702	2135,5421	3934,8835	7059,7682	12321,9866

c	$k_m = 3,5$	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
0	1,5269	1,4998	1,4782	1,4606	1,4459	1,4335
1	8,6207	9,3039	10,0002	10,7061	11,4195	12,1386
2	32,9793	39,4335	46,5761	54,4014	62,9057	72,0860
3	106,5346	141,7821	184,6943	236,0230	296,5222	366,9476
4	312,7753	464,1827	667,6728	934,1697	1275,6565	1705,1578

c	$k_m = 7,0$	8,0	9,0	10,0	12,0	15,0
0	1,4136	1,3984	1,3864	1,3767	1,3619	1,3468
1	13,5897	15,0531	16,5250	18,0032	20,9723	25,4460
2	92,4665	115,5311	141,2726	169,6862	234,5184	351,7536
3	540,6050	763,0557	1040,3821	1378,6538	2262,3052	4196,8272
4	2885,6530	4601,0190	6994,2623	10223,1926	19916,9796	45696,8272

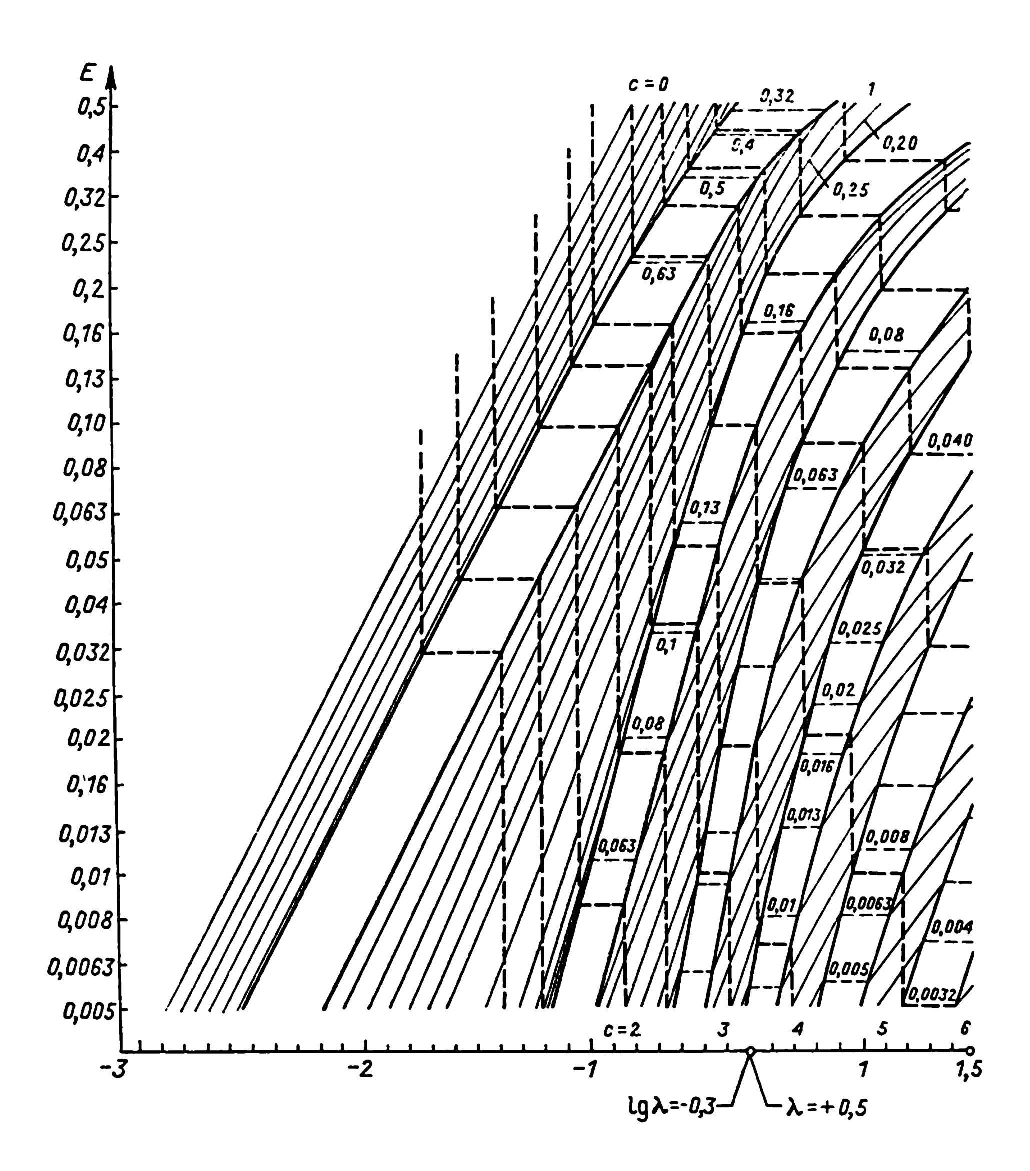
Plans économiques du type

c \ E	0,0063		0,010		0,016	
	lg γ	lg λ	lg γ	lg λ	lg γ	lg λ
0	1,0706	−3,3067	0,9761	−3,0197	0,8805	−2,7300
0	0,4793	−2,8043	0,4310	−2,5678	0,3814	−2,3279
0—1	−0,1120	−2,4489 −2,0909	−0,1141	−2,2470 −1,8895	−0,1177	−2,0409 −1,6840
1	−0,7033	−1,5281	−0,6593	−1,3792	−0,6167	−1,2275
1—2	−1,2946	−1,1338 −0,9242	−1,2044	−1,0276 −0,8188	−1,1158	−0,9177 −0,7101
2	−1,5363	−0,7328	−1,4318	−0,6455	−1,3288	−0,5549
2—3	−1,7781	−0,6033 −0,4564	−1,6592	−0,5275 −0,3814	−1,5418	−0,4485 −0,3034
3	−1,9233	−0,3589	−1,7973	−0,2928	−1,6726	−0,2238
3—4	−2,0685	−0,2900 −0,1774	−1,9354	−0,2294 −0,1175	−1,8034	−0,1659 −0,0549
4	−2,1702	−0,1176	−2,0327	−0,0630	−1,8962	−0,0056
4—5	−2,2719	−0,0734 0,0176	−2,1300	−0,0221 0,0683	−1,9891	0,0318 0,1216
5—6	−2,4265	0,0898 0,1660	−2,2786	0,1348 0,2105	−2,1316	0,1822 0,2574
6—7	−2,5503	0,2196 0,2851	−2,3980	0,2599 0,3250	−2,2465	0,3026 0,3672
7—8	−2,6531	0,3267 0,3841	−2,4974	0,3635 0,4206	−2,3424	0,4025 0,4592
8—9	−2,7406	0,4176 0,4686	−2,5823	0,4516 0,5023	−2,4244	0,4876 0,5380
9—10	−2,8167	0,4962 0,5422	−2,6561	0,5279 0,5736	−2,4960	0,5616 0,6070

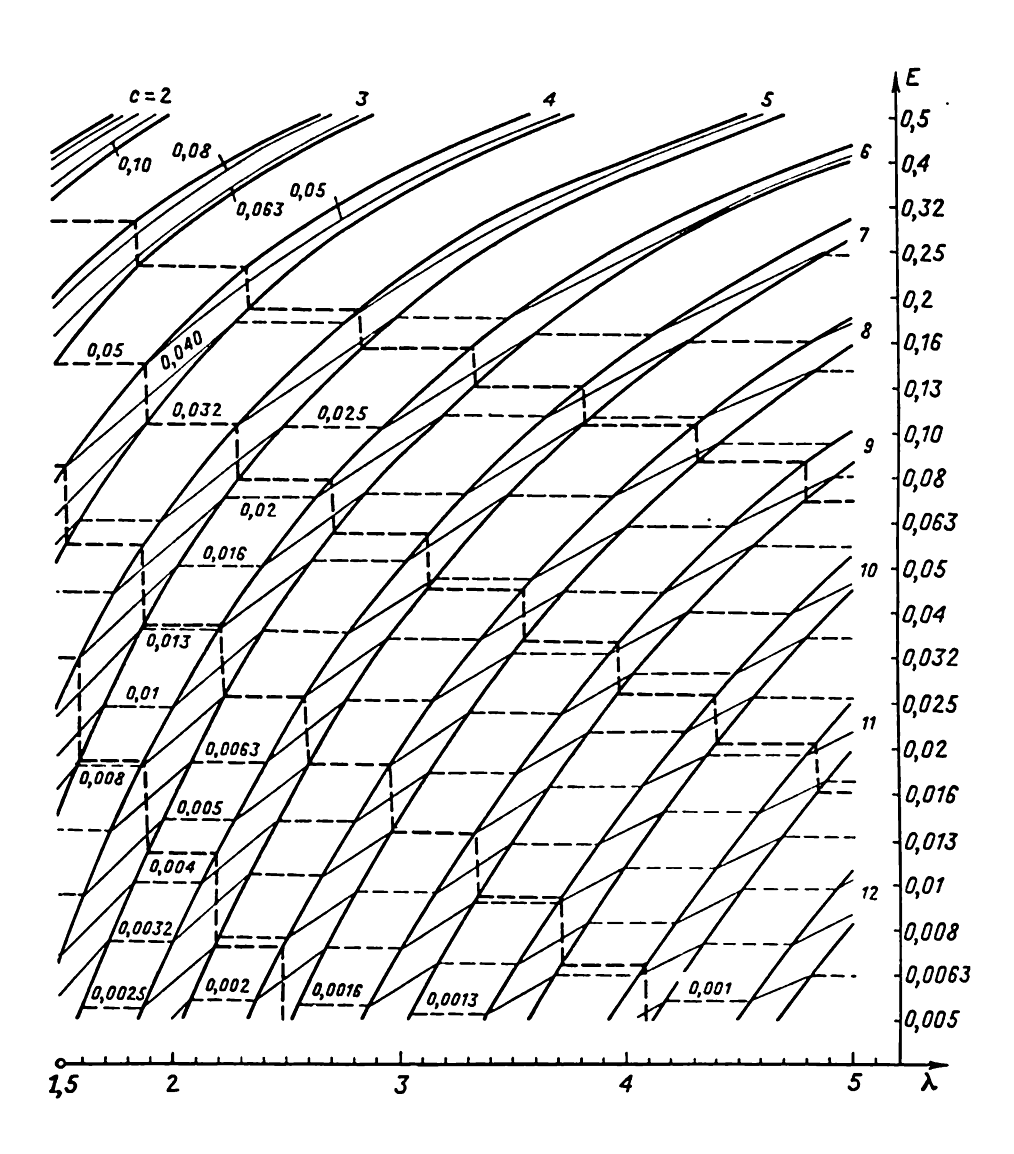
Table 25

d'échantillonnage simple

0,025		0,040		0,063		0,10	
lg γ	lg λ	lg γ	lg λ	lg γ	lg λ	lg γ	lg λ
0,7896	−2,4569	0,6928	−2,1707	0,5962	−1,8944	0,4914	−1,6115
0,3333	−2,1004	0,2804	−1,8604	0,2251	−1,6268	0,1610	−1,3853
−0,1230	−1,8442 −1,4881	−0,1320	−1,6351 −1,2806	−0,1460	−1,4301 −1,0780	−0,1694	−1,2168 −0,8686
−0,5793	−1,0829	−0,5444	−0,9293	−0,5172	−0,7787	−0,4998	−0,6216
−1,0356	−0,8112 −0,6050	−0,9567	−0,6960 −0,4917	−0,8883	−0,5805 −0,3788	−0,8302	−0,4572 −0,2589
−1,2350	−0,4670	−1,1421	−0,3714	−1,0600	−0,2754	−0,9881	−0,1723
−1,4345	−0,3712 −0,2273	−1,3274	−0,2868 −0,1444	−1,2318	−0,2012 −0,0607	−1,1459	−0,1088 0,0292
−1,5584	−0,1561	−1,4440	−0,0818	−1,3413	−0,0065	−1,2481	0,0752
−1,6823	−0,1035 0,0066	−1,5606	−0,0349 0,0740	−1,4508	0,0351 0,1426	−1,3502	0,1113 0,2169
−1,7709	0,0509	−1,6446	0,1132	−1,5302	0,1768	−1,4250	0,2461
−1,8594	0,0851 0,1741	−1,7286	0,1439 0,2320	−1,6097	0,2042 0,2911	−1,4987	0,2700 0,3555
−1,9960	0,2292 0,3038	−1,8588	0,2812 0,3550	−1,7337	0,3347 0,4076	−1,6161	0,3933 0,4650
−2,1065	0,3449 0,4091	−1,9647	0,3919 0,4554	−1,8348	0,4403 0,5031	−1,7132	0,4936 0,5554
−2,1991	0,4413 0,4975	−2,0535	0,4844 0,5401	−1,9200	0,5289 0,5839	−1,7945	0,5779 0,6322
−2,2784	0,5235 0,5736	−2,1299	0,5625 0,6121	−1,9934	0,6048 0,6538	−1,8648	0,6505 0,6988
−2,3477	0,5951 0,6402	−2,1968	0,6325 0,6772	−2,0579	0,6712 0,7154	−1,9266	0,7141 0,7577



Nomogramme des plans économiques



du type d'échantillonnage simple

BIBLIOGRAPHIE

CHAPITRE PREMIER

1. МАЛИКОВ И. М., ПОЛОВКО А. М., РОМАНОВ Н. А., ЧУКРЕЕВ П. А.— Основы теории и расчета надежности. Судпромгиз, 1960 [MALIKOV I., POLOVKO A., ROMANOV N., TCHOUKRÉEV P.— Fondements théoriques et calculs en fiabilité].
2. ШОР Я. Б.— Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. «Советское радио», 1962 [CHOR I.— Méthodes statistiques d'analyse et de contrôle de la qualité et de la fiabilité].
3. ЛЛОЙД Д., ЛИПОВ М.— Надежность. Организация исследования, методы, математический аппарат. «Советское радио», 1964 [LLOYD D., LIPOV M.— Fiabilité. Organisation des recherches, méthodes, appareil mathématique].
4. BAZOVSKY I.— Reliability theory and practice. Prentice-Holl, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
5. ГНЕДЕНКО Б. В.— Курс теории вероятностей, Физматгиз, 1961 [GNÉDENKO B.— Cours de théorie des probabilités].
6. ВЕНТЦЕЛЬ Е. С.— Теория вероятностей. Физматгиз, 1962. VENTZEL E. — Théorie des probabilités].
7. ЛЕМАН Э.— Проверка статистических гипотез. «Наука», 1964 [LEHMAN E.— Vérification des hypothèses statistiques].
8. ДУНИН-БАРКОВСКИЙ И. В. и СМИРНОВ Н. В.— Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). ГТТИ, 1955 [DOUNINE-BARKOVSKI I., SMIRNOV N.— Théorie des probabilités et statistique mathématique en technique].
9. КРАМЕР Г.— Математические методы статистики. ИЛ, 1948 [CRAMER H.— Méthodes mathématiques dans la statistique].
10. ВАН ДЕР ВАРДЕН Б. Л.— Математическая статистика. ИЛ, 1960 [VAN DER WAERDEN B.— Statistique mathé atique].
11. КОЛМОГОРОВ А. Н.— Основные понятия теории вероятностей. ОНТИ, 1936 [KOLMOGOROV A.— Les notions principales de la théorie des probabilités].
12. СЕРЕНСЕН С. В., КОГАЕВ В. П., СТЕПНОВ М. Н., ГИАЦИНТОВ Е. В.— О законе распределения долговечности при усталостных испытаниях. Заводская лаборатория 24, 3 (1958), 324-329 [SERENCEN S., KOGAEV V., STEPNOV M., GUIATZINTOV E.— Une loi de distribution de la longévité des échantillons lors des essais à la fatigue].
13. WEIBULL W.— A statistical distribution function of wide applicability. J. Appl. Mech. 18, 3 (1951), 293-297.
14. КОЛМОГОРОВ А. Н.— О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении. ДАН СССР, 31, 2 (1941), 99-101 [KOLMOGOROV A.— Sur la distribution lognormale des dimensions des particules de morcellement].

15. ФИЛИППОВ А. Ф.— О распределении размеров частиц при дроблении. Теория вероятностей и ее применения, 6 (1961), 209-318 [PHILIPPOV A.— Sur la distribution des dimensions des particules de morcellement].
16. ХИНЧИН А. Я.— Об унимодальных распределениях. Томск, Изв. НИИ матем. и механ. ун-та 2, 2 (1938), 1-7 [KHINTCHINE A.— Sur les distributions unimodales].
17. GNÉDENKO B.— Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. Ann. Math. 44, 3 (1943).
18. GUMBEL E.— Statistics of extremes. Columbia University press, N.Y., 1958.
19. KAPTEYN J. C.— Skew Frequency Curves. 1903.
20. ХИНЧИН А. Я.— Математические методы теории массового обслуживания. Изд-во АН СССР, 1955 [KHINTCHINE A.— Méthodes mathématiques en théorie des files d'attente].
21. ГРИГЕЛИОНИС Б.— О сходимости сумм ступенчатых процессов к пуассоновскому. Теория вероятностей и ее применения 8, 2 (1963) [GRIGHELIONIS B.— Sur la convergence des sommes des processus discontinus vers un processus de Poisson. Théorie des probabilités et ses applications].
22. CLOPPER J., PEARSON E.— The use of confidence or fiducial limits illustrated in the case of the binomial. Biometrica 26, 404-413 (1934).

CHAPITRE 2

1. МАЛИКОВ И. М., ПОЛОВКО А. М., РОМАНОВ Н. А., ЧУКРЕЕВ П. А.— Основы теории и расчета надежности. Судпромгиз, 1960 [MALIKOV I., POLOVKO A., ROMANOV N., TCHOUKRÉEV P.— Fondements théoriques et calculs en fiabilité].
2. ПРОБЛЕМЫ НАДЕЖНОСТИ РАДИОЭЛЕКТРОННОЙ АППАРАТУРЫ (Сборник докладов пятого национального симпозиума США). Оборонгиз, 1960 [PROBLÈMES DE FIABILITE EN RADIO-ÉLECTRONIQUE. Ve Colloque national des Etats-Unis].
3. KNIGHT G. R., GERVIS E. R., HERD E. R.— The definition of terms of Interest in the study of reliability. Trans. IRE, PGRQC, April 1955, p. 34.
4. ТЕОРИЯ НАДЕЖНОСТИ В ОБЛАСТИ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ. Терминология. Изд-во АН СССР, 1962 [THÉORIE DE LA FIABILITÉ EN RADIO-ÉLECTRONIQUE. Terminologie].
5. ГНЕДЕНКО Б.В., ШОР Я.Б.— Надежность. Энциклопедический справочник «Автоматизация производства и промышленная электроника», т. 2, Советская энциклопедия, 1963, 348-353 [GNÉDENKO B., CHOR I.— Fiabilité. Encyclopédie « Automatisation dans l'industrie et électronique appliquée »].
6. ШЕННОН К.,— Бандвагон. Сб. «Работы по теории информации и кибернетики». ИЛ, 1963 [SHANNON C.— Bandwagon].
7. BELLMAN R., DREYFUS S.— Dynamic Programming and the Reliability of Multicomponent Devices. Operation Research 6, 2 (1958), 200-206.
8. БЕЛЯЕВ Ю. К.— Линейчатые марковские процессы и их приложение к задачам теории надежности. Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс, 1962, 309-323 [BÉLIAEV Y.— Processus markoviens linéaires et leur application aux problèmes théoriques de fiabilité. VIe Congrès soviétique con-

sacré aux problèmes de la théorie des probabilités et aux statistiques mathématiques].

9. СЕВАСТЬЯНОВ Б.А.— Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами. Теория вероятностей и ее применения, 2, 1 (1957), 106-116 [SÉVASTIANOV B.— Théorème ergodique pour les processus markoviens et ses applications aux systèmes téléphoniques non fiables].
10. МАРЬЯНОВИЧ Т. П.— Надежность систем со смешанным резервом. ДАН УРСР, 8 (1961), 944-947 [MARIANOVITCH T.— Fiabilité des systèmes avec une réserve mixte].
11. ГНЕДЕНКО Б. В.—Курс теории вероятностей. Физматгиз, 1961 [GNÉDENKO B.— Cours de théorie des probabilités].
12. СМИТ В.— Теория восстановления. Сб. переводов, ИЛ, «Математика», 5, 3 (1961), 95-150 [SMIT W.— Théorie de renouvellement. Recueil des traductions].
13. ХИНЧИН А. Я.— Работы по теории массового обслуживания. Физматгиз, 1963 [KHINTCHINE A.— Travaux sur la théorie des files d'attente].
14. СОЛОВЬЕВ А. Д.— Математические вопросы теории надежности. Радиоэлектронная промышленность, 4 (1958) [SOLOVIEV A.— Questions mathématiques de la théorie de la fiabilité].
15. ДРУЖИНИН Г. В.— Предсказание сохранности элементов и систем автоматики при векторных определяющих параметрах. Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, 2 (1961), 165-170 [DROUJININE G.—Prévision de la non-défaillance des éléments et systèmes automatiques dans le cas des paramètres vectoriels définissants].
16. ГРИГЕЛИОНИС Б. И.—Предельные теоремы для сумм процессов восстановления. Сб. «Кибернетику на службу коммунизму», т. 2 (1964), 246-265 [GRIGHÉLIONIS B.— Théorèmes limites pour les sommes des processus de renouvellement].
17. СОЛОВЬЕВ А. Д.— Надежность систем с восстановлением. Сб. «Кибернетику на службу коммунизму», т. 2, 1964, 189-193 [SOLOVIEV A.— Fiabilité des systèmes avec renouvellement].

CHAPITRE 3

1. EPSTEIN B.— Testing for the validity of the assumption that the underlying distribution of life is exponential. Technometrics 1-2 (1960), 83-101, 167-183.
2. EPSTEIN B., SOBEL M.— Life Testing. J. Amer. Stat. Assoc. 48 (1953), 486-502.
3. EPSTEIN B., SOBEL M.— Sequential Life Tests in the Exponential Case. Ann. Math. Statist. 26, 1 (1955), 82-93.
4. BUCKLAND W. R.— Statistical assesement of the life characteristic, Griffin's statistical monographs & courses. London, 1964 (a bibliographic guide).
5. KAO J. H. K.— Computer Methods for Estimating Weibull Parameters in Reliability Study. Trans. IRE, PGRQC, July 1958, 15-22.
6. ENDICOTT. H S., ZOELLNER J. A.— A preliminary investigation of the steady and progressive stress testing of mica capacitors Proc. 7-th Nat. Symp. on reliability and quality control, 1961, 229-240.
7. SARHAN A., GREENBERG B.— Contributions to Order Statistics. N.Y., 1962.

8. ДЫНКИН Е. Б.— Необходимые и достаточные статистики для семейства распределений вероятностей. Успехи матем. наук, 6, 1 (1951), 68-90 [DYNKINE E.— Statistiques nécessaires et exhaustives pour une famille de distributions des probabilités].

9. БОЛЬШЕВ Л. Н.— О сравнении параметров распределения Пуассона. Теория вероятностей и ее применения, 7, 1 (1962), 119-120 [BOLCHEV L.— Sur la comparaison des paramètres de la distribution poissonienne].

10. PUGH E. L.— The best estimate of reliability in the exponential case. Oper. Res. 11, 1 (1963), 57-61.

11. МИРНЫЙ Р. А., СОЛОВЬЕВ А. Д.— Оценка надежности системы по результатам испытаний ее компонент. Сб. «Кибернетику на службу коммунизму», т. 2, 1964, 213-218 [MIRNI R., SOLOVIEV A.— Estimation de la fiabilité du système d'après les résultats d'essai de ses composants].

12. КОЛМОГОРОВ А. Н.— Несмещенные оценки. Изв. АН СССР, сер. матем., 14 (1950), 303-326 [KOLMOGOROV A.— Estimations non biaisées].

13. GIRCHICK, MOSTELLER, FREDERIC, SAVAGE — Unbiased estimates for certain sampling planes with applications. Ann. Math. Stat. 17, 13-23.

CHAPITRE 4

1. ЛЕМАН Э.— Проверка статистических гипотез. «Наука», 1964 [LEHMAN E.— Vérification des hypothèses statistiques].

2. ВАЛЬД А.— Последовательный анализ. Физматгиз, 1960 [WALD A.— Analyse progressive].

3. WALD A.— Statistical decision functions. N.Y., 1950.

4. ЯНКО Я.— Математико-статистические таблицы. Госстатиздат, 1961 [YANKO Y.— Tables mathématico-statistiques].

5. EPSTEIN B.— Testing for the validity of the assumption that the underlying distribution of life is exponential. Technometrics 2, 1-2 (1960), 83-101, 167-183.

6. COCHRAN W. G.— The χ^2 test of goodness of fit. Ann. Math. Statist. 23, 3 (1952), 315-345.

7. SHERMAN B.— A random variable related to the spacing of sample values. Ann. Math. Statist. 21 (1950), 339-361.

8. BARTHOLOMEW D. J.— Testing for departure from the exponential distribution. Biometrika 44 (1957), 253-256.

9. FISHER R. A.— Tests of significance in harmonic analysis. Proc. Roy. Soc. A 125 (1929), 54-59.

10. HARTLEY H. O.— The maximum F-ratio as a short-cut test of heterogeneity of variance. Biometrika, 37 (1950), 308-312.

11. DVORETZKY A., KIEFER J., WOLFOWITZ I.— Sequential decision problems for processes with continuous time parameter, testing hypotheses. Ann. Math. Statist. 24 (1953), 254-264.

12. МИХАЛЕВИЧ В. С.— Последовательные бейесовские решения и оптимальные методы приемочного статистического контроля. Теория вероятностей и ее применения, 1, 4 (1956) [MIKHALEVITCH B.— Critères bayesiens et méthodes optimales du contrôle statistique d'acceptation].

13. ШИРЯЕВ А. Н.— К теории решающих функций и управлению процессом наблюдения по неполным данным. Прага, 1964, 657-681 [CHIRIAEV A.— Sur la théorie des fonctions de décision et la conduite des observations d'après les données incomplètes].

14. БЕЛЛМАН Р.— Динамическое программирование, ИЛ, 1960 [BELLMAN P.— Programmation dynamique].

15. KIEFER J., WOLFOWITZ I.— Sequential tests of hypotheses about the mean occurence time of a continuous parameter Poisson process. Naval research logistics quarterly, 3, 3 (1956), 205-219.

16. ВАН ДЕР ВАРДЕН Б. Л.— Математическая статистика ИЛ, 1960, 321-357 [VAN DER WAERDEN B.— Statistique mathématique].

17. ГНЕДЕНКО Б. В.— Курс теории вероятностей. Физматгиз, 1961, 354-360 [GNÉDENKO B.— Cours de théorie des probabilités].

18. ГНЕДЕНКО Б. В.— О критерии Вилкоксона сравнения двух выборок. Бюлл. Польск. АН, сер. матем., астр. и физ. наук, VI, 10 (1958), 611-614 [GNÉDENKO B.— Sur le critère de Wilcoxon de comparaison de deux échantillons].

19. ГНЕДЕНКО Б. В.— Проверка неизменности распределения вероятностей в двух независимых выборках. Mathem. Nachr. 12, 1-2 (1954), 29-66 [GNÉDENKO B.— Vérification de la constance de la distribution des probabilités dans deux échantillons indépendants].

20. БЕРЛЯНД Х. Л., КВИТ И. Д.— Об одной задаче сравнения двух выборок. ДАН УРСР, 1 (1952), 13-15 [BERLAND CH., QUIT J.— Un problème de comparaison de deux échantillons].

21. КВИТ И. Д.— О теореме Н. В. Смирнова относительно сравнения двух выборок. ДАН СССР, 71, 2 (1950), 229-231 [QUIT I.— Sur le théorème de N. Smirnov concernant la comparaison de deux échantillons].

22. МАНИЯ Г. М.— Практическое применение оценки максимума двухсторонних уклонений эмпирической кривой распределения в заданном интервале роста теоретического закона. Сообщ. АН Груз. ССР 14, 9 (1953), 521-524 [MANIA G.— Application pratique de l'estimation du maximum des écarts bilatéraux de la courbe empirique de distribution dans un intervalle donné de croissance de la fonction théorique].

23. МАНИЯ Г. М.— Практическое применение оценки максимума односторонних уклонений эмпирической кривой распределения в заданном интервале роста теоретического закона. Тр. Груз. политехн. ин-та, 30 (1954), 89-94 [MANIA G.— Application pratique de l'estimation du maximum des écarts unilatéraux de la courbe empirique de distribution dans un intervalle donné de croissance de la fonction théorique].

24. MANN H. B. and WHITNEY D. R.— On a Test of Whether One of Two Random variables in Stochastically Larger than the Other. Ann. Math. Statist. 18, 1 (1947), 50-60.

25. РВАЧЕВА Е. Л.— О максимальном расхождении между двумя эмпирическими распределениями. Укр. матем. ж., 4, 4 (1952), 373-392 [RVATCHÊVA E.— Sur l'écart maximal entre deux distributions empiriques].

26. MASSEY F. J.— The distribution table for the deviation between two sample cumulatives. Ann. Math. Statist. 23, 3 (1952), 435-442.

27. MASSEY F. J.— The distribution of the maximum deviation between two sample cumulative step functions. Ann. Math. Statist. 22, 1 (1951), 125-128.

28. ДУНИН-БАРКОВСКИЙ И. В. и СМИРНОВ Н. В.— Теория вероятностей и математическая статистика в технике. Гостехиздат, 1955 [DOUNINE-BARKOVSKI I., SMIRNOV N.— Théorie des probabilités et statistique mathématique en technique.]

CHAPITRE 5

1. ГНЕДЕНКО Б. В.— Курс теории вероятностей. Физматгиз, 1961 [GNÊDENKO B.— Cours de théorie des probabilités].
2. СМИРНОВ Н. В.— Предельные законы распределения для членов вариационного ряда. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 25 (1949) [SMIRNOV N.— Lois limites de distribution des termes de l'échantillon ordonné].
3. ФЕЛЛЕР В.— Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Изд-во «Мир», 1964 [FELLER W.— Introduction à la théorie des probabilités et ses applications].
4. ЛЛОЙД Д., ЛИПОВ М.— Надежность. «Советское радио», 1964, стр. 323 [LLOYD D., LIPOV M.— Fiabilité].
5. СИНИЦА М. А.— Методы резервирования радиоаппаратуры. Электросвязь, 4 (1959) [SINITZA M.— Méthodes de réservation en radio-électronique].

CHAPITRE 6

1. ГНЕДЕНКО Б. В.— О ненагруженном дублировании. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 4 (1964) [GNÊDENKO B.— Sur la réserve non chargée du type doublage].
2. ГНЕДЕНКО Б. В.— О дублировании с восстановлением. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 5 (1964) [GNÊDENKO B.— Sur le doublage avec renouvellement].
3. СОЛОВЬЕВ А. Д.— Асимптотическое распределение времени жизни дублированного элемента. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 5 (1964) [SOLOVIEV A.— Distribution asymptotique de la durée de vie d'un élément doublé].
4. СОЛОВЬЕВ А. Д.— Об определении резервов для систем многократного действия. Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, 2 (1962), 124-129 [SOLOVIEV A.— Sur la réservation dans les systèmes à réutilisation].
5. KARLIN S., Mc. GREGOR J.— The differential equations of Birth and Death processes and the Stieltjes moment problem. Trans. Amer. Math. Soc., 85, 2 (1957), 489-546.
6. ФЕЛЛЕР В.— Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Изд-во «Мир», 1964 [FELLER W.— Introduction à la théorie des probabilités et ses applications].
7. ХИНЧИН А. Я.— Работы по математической теории массового обслуживания. Физматгиз, 1953 [KHINTCHINE A.— Etudes sur la théorie mathématique des files d'attente].
8. ГНЕДЕНКО Б. В., КОВАЛЕНКО И. Н.— Лекции по теории массового обслуживания. Киев, 1964 [GNÊDENKO B., KOVALENKO I.— Conférences sur la théorie des files d'attente].
9. НАТАНСОН И. П.— Конструктивная теория функций. ГТТИ, 1949 [NATANSON I.— Théorie des fonctions constructiviste].
10. СОЛОВЬЕВ А. Д.— Надежность систем с восстановлением. Сб. «Кибернетику на службу коммунизму», т. 2, 1964 [SOLOVIEV A.— Fiabilité des systèmes avec renouvellement].
11. БЕЛЯЕВ Ю. К.— Линейчатые марковские процессы и их приложение к теории надежности. Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс, 1962, 309-323 [BÊLIAEV Y.— Processus markoviens linéaires et leur application à la théorie de fiabilité].

12. EPSTEIN B., HOSFORD T.— Reliability of some two units redundant systems. Proc. 6-th Nat. Symp. on reliability and quality control, 1960, 466-476.

13. GAVER D. P.— Time to failure and availability of paralleled systems with repair. Trans. IRE, PGRQC, June 1963, 30-38.

CHAPITRE 7

1. КОЛМОГОРОВ А. Н.— Несмещенные оценки. Изв. АН СССР, сер. матем., 14, 4 (1950), 303-326 [KOLMOGOROV A.— Estimations non biaisées].

2. СИРАЖДИНОВ С. Х., ЭЙДЕЛЬНАНТ М. И.— К вопросу об оценках качества продукции по результатам выборочного контроля. Тр. Ин-та матем. АН УзССР. Ташкент, 22, 1961 [SIRAJDINOV S., EIDELNANT M.— Sur l'appréciation de la qualité de la production d'après les résultats du contrôle d'échantillonnage].

3. ALEN WALLIS W.— Techniques of Statistical Analysis, N.-Y., 1947.

4. DODGE H. F., ROMIG H. G.— Sampling inspection, N.-Y., 1959.

5. STATISTICAL RESEARCH GROUP COLUMBIA UNIVERSITY, Sampling inspection, N.-Y., 1948.

6. КОУДЕН Д.— Статистические методы контроля качества. Физматгиз, 1961 [COWDEN D.— Méthodes statistiques de contrôle de la qualité].

7. СТАНДАРТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО КОНТРОЛЯ. Ташкент, 1961 [Standards du contrôle statistique].

8. HILL J. D.— Sampling inspection and defence specification, DEF-131, J. Roy. Statist. Soc. A 125, 1 (1962), 31-87.

9. ШОР Я. Б.— Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. «Советское радио», 1962 [CHOR I.— Méthodes statistiques d'analyse et de contrôle de la qualité et de la fiabilité].

10. HORSNELL G.— Economical acceptance sampling schemes. J. Roy. Statist. Soc. A 120 (1957), 148-201.

11. VAN DER WAERDEN B. L.— Sampling inspection as a minimum loss problem. Ann. Math. Statist. 31, 2 (1960), 369-384.

12. HALD A.— The compound hypergeometric distribution and a system of single sampling inspection plans based on prior distributions and costs. Technometrics 2, 3 (1960), 275-340, discussion 361-372.

13. БЕЛЯЕВ Ю. К., КОЛМОГОРОВ А. Н.— Экономичные планы приемочного контроля. Ленинград, 1960 [BÉLIAEV Y., KOLMOGOROV A.— Plans économiques du contrôle d'acceptation. Rapport au IVe Congrès national mathématique].

14. ВАЛЬД А.— Последовательный анализ. Физматгиз, 1960 [WALD A.— Analyse progressive].

15. СИРАЖДИНОВ С. Х.— Несмещенные оценки доли пропущенного брака при методе однократной выборки. Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР. Ташкент, 20 (1955), 89-100 [SIRAJDINOV S.— Estimations non biaisées de la proportion des pièces défectueuses acceptées à tort lors de l'utilisation de la méthode d'échantillonnage simple].

16. КОЛМОГОРОВ А. Н.— Статистический приемочный контроль при допустимом числе дефектных изделий, равном нулю. Ленинград, 1951 [KOLMOGOROV A.— Contrôle d'acceptation statistique].

17. ЭЙДЕЛЬНАНТ М. И., ИНАМОВ И.— О практическом применении оценочных функций для анализа результатов статистического контроля качества продукции. Теория вероятностей и математическая статистика,

1, 1964, 48-57 [EIDELNANT M., INAMOV I.— Sur l'application pratique des fonctions d'estimation pour l'analyse de l'efficacité du contrôle statistique de la qualité de la production].

18. PROC. NAT. SYMP. ON RELIABILITY AND CONTROL IN ELECTRONICS, USA, № 1-9, 1954-1963.

19. BOWKER A. H., GOOD H. P.— Sampling inspection by variables. N.-Y., 1952.

20. BARNARD G. A.— Control charts and stochastic processes, J. Roy. Statist. Soc. A 21, 2 (1959), 239-271.

21. GOLDSMITH P. L., WHITFIELD H.— Average run lengths in cumulative chart quality control schemes. Technometrics 3, 1 (1961), 11-20.

22. CHERNOFF H.— Sequential tests for the mean of a normal distribution. Proc. 4-th Berkeley Symp. on math. stat. and probability 1, (1961), 79-91.

23. ШИРЯЕВ А. Н.— К обнаружению разладок производственного процесса. Теория вероятностей и ее применения, 8, 3 (1963), 264-281, 4 (1963), 431-443 [CHIRIAEV A.— Décèlement des déréglages du processus technologique].

24. ШИРЯЕВ А. Н.— Последовательный анализ и управляемые случайные процессы (дискретное время). Кибернетика 3, 1965, 1-24 [CHIRIAEV A.— Plans de contrôle progressifs et processus aléatoires dirigés (temps discret)].

25. KNIGHT W.— A method of sequential estimation applicable to the hypergeometric binomial, Poisson and exponential distributions, Ann. Math. Stat. 36, 1494-1503.

INDEX